Reconnaissance de plan et fractions continues

Thomas Fernique

LIRMM – Univ. Montpellier 2

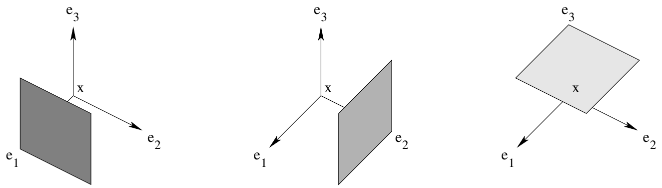
Saint-Dié, 9 Novembre 2007

Question : un objet discret donné est-il une discrétisation de plan ?

Plusieurs approches existent déjà.

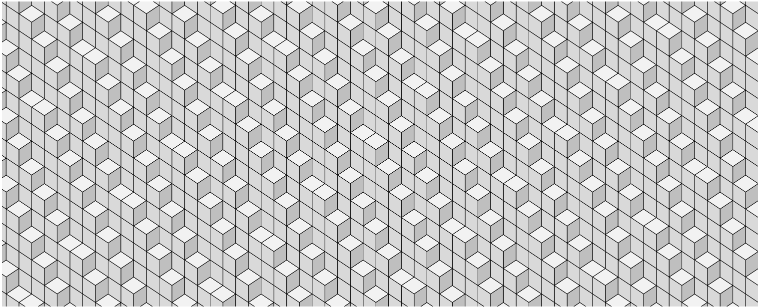
Ici : extension d'une approche pour les droites (Wu, Troesch).
Principe : alterner vérifications locales et “zooms arrière”.

Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.
Face de *type* $i \in \{1, \ldots, d\}$ localisée en $\vec{x} \in \mathbb{Z}^d$:



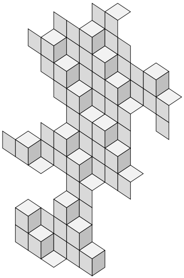
Objets discrets ici considérés : unions de faces.

Plan en escalier $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$: frontière de l'union des cubes unité de $\mathbb{Z}^d$ intersectant le demi-espace réel $\langle \vec{x} | \vec{\alpha} \rangle \leq \rho$.

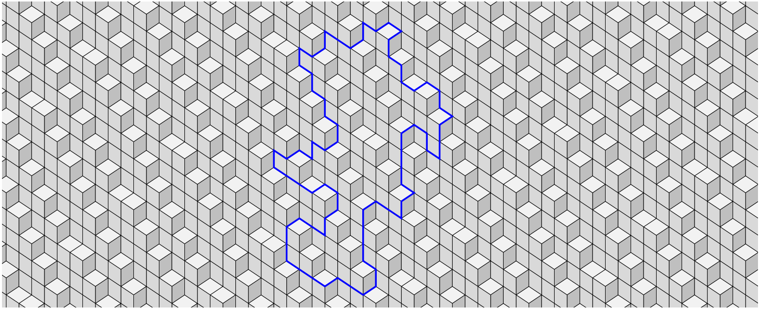


Selon la terminologie de Réveilles, l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$ forme un *plan discret standard* de paramètres $(\vec{\alpha}, \rho)$.

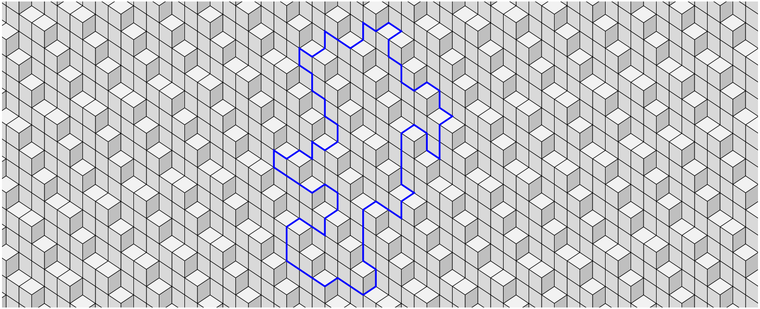
Un *morceau de plan* est une union de faces incluse dans un plan :



Un *morceau de plan* est une union de faces incluse dans un plan :



Un *morceau de plan* est une union de faces incluse dans un plan :



Soulignons que plusieurs plans peuvent partager un même morceau.

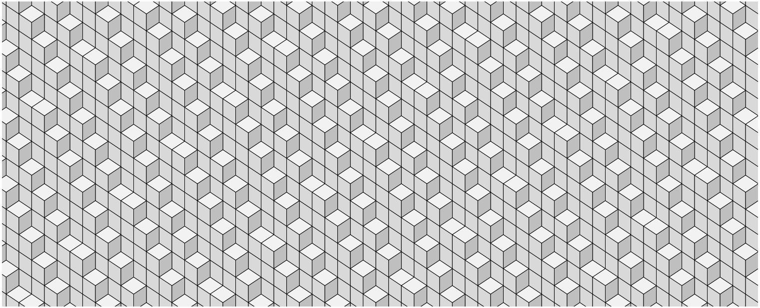
Plus généralement, étant donné une union de faces $\mathcal{B}$, on note $P(\mathcal{B})$ l'ens. des paramètres des plans dont $\mathcal{B}$ est un morceau :

$$P(\mathcal{B}) = \{(\vec{\alpha}, \rho) \in \mathbb{R}_+^d \backslash \{\vec{0}\} \times \mathbb{R} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}\}.$$

On parle des *paramètres acceptables* de $\mathcal{B}$. C'est un polytope convexe de $\mathbb{R}^{d+1}$, non vide ssi $\mathcal{B}$ est un morceau de plan.

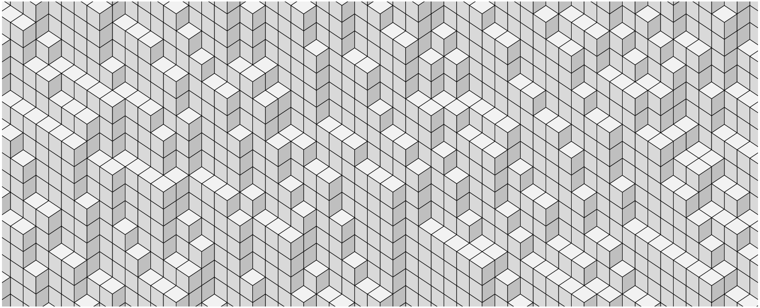
Reconnaître $\mathcal{B}$ consiste alors à *calculer* $P(\mathcal{B})$.

Plan en escalier : très contraint et régulier.



Planarité plausible.

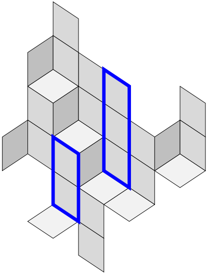
Plan en escalier : très contraint et régulier.



Planarité peu plausible.

Définition (palier)

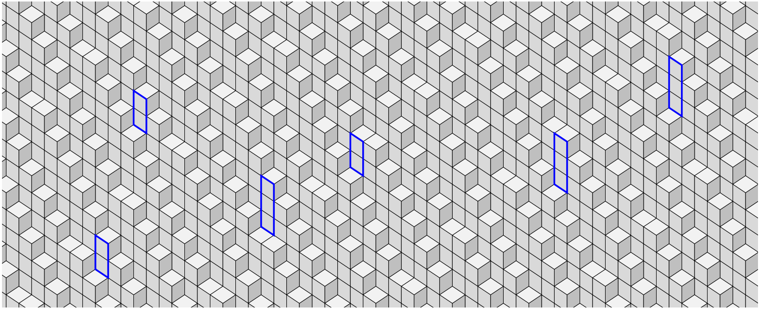
Un (i,j)-palier d'une union de faces $\mathcal{B}$ est une suite maximale de faces de type i, alignées dans la direction $\vec{e}_j$ et incluses dans $\mathcal{B}$.



$(1,3)$-paliers de tailles 2 et 3.

Proposition (Berthé-F. 2007)

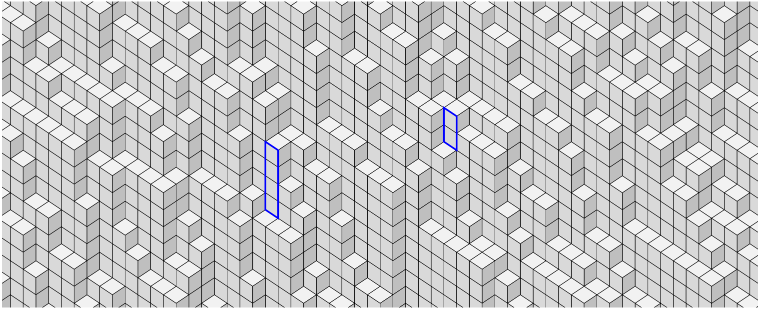
Les (i, j)-paliers du plan $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$ sont de tailles $\lfloor \alpha_i/\alpha_j \rfloor$ ou $\lceil \alpha_i/\alpha_j \rceil$.



Si c'est un plan de normale $\vec{\alpha}$, alors $2 < \alpha_1/\alpha_3 < 3$.

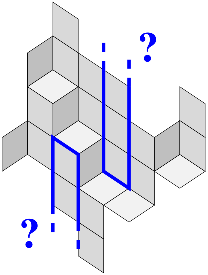
Proposition (Berthé-F. 2007)

Les (i, j)-paliers du plan $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$ sont de tailles $\lfloor \alpha_i/\alpha_j \rfloor$ ou $\lceil \alpha_i/\alpha_j \rceil$.

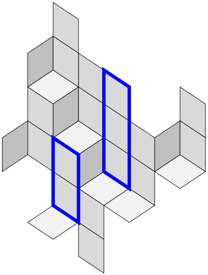


Ce n'est pas un plan en escalier (paliers de tailles incompatibles)

Pour un (éventuel) morceau de plan, pb des paliers incomplets :



Pour un (éventuel) morceau de plan, pb des paliers incomplets :



Conditions raisonnables $\rightsquigarrow$ info. sur (l'éventuel) vecteur normal.

On parle d'union de faces *reconnaissable*.

Recodage : application $\tilde{T}$ sur les unions de faces vérifiant :

- $\mathcal{B}$ morceau de $\mathcal{P}$ ssi $\tilde{T}(\mathcal{B})$ morceau de $\tilde{T}(\mathcal{P})$;
- $P(\mathcal{B})$ se déduit (facilement) de $P(\tilde{T}(\mathcal{B}))$;
- $\tilde{T}(\mathcal{B})$ comporte (beaucoup) moins de faces que $\mathcal{B}$.

Intérêt : ramène la reconnaissance de $\mathcal{B}$ à celle de $\tilde{T}(\mathcal{B})$.

Plus précisément (mais pas trop) :

Recodage par *substitutions généralisées* (*c.f.* exposé P. Arnoux) :

$$\tilde{T}(\mathcal{B}) = E_1^*(\sigma_{\mathcal{B}})(\mathcal{B}).$$

Détermination de $\sigma_{\mathcal{B}}$: via les paliers de $\mathcal{B}$ (si reconnaissable).

Plus précisément (mais pas trop) :

Recodage par *substitutions généralisées* (*c.f.* exposé P. Arnoux) :

$$\tilde{T}(\mathcal{B}) = E_1^*(\sigma_{\mathcal{B}})(\mathcal{B}).$$

Détermination de $\sigma_{\mathcal{B}}$: via les paliers de $\mathcal{B}$ (si reconnaissable).

Intuition du principe "complet" :

Calcul de la partie commune des développements en fractions continues (multi-dim.) des vecteurs normaux des plans dont $\mathcal{B}$ est un morceau.

Problème : appliquer $\tilde{T}$ nécessite des “bords” particuliers.
Cette condition est généralement non vérifiée.

Problème : appliquer $\tilde{T}$ nécessite des "bords" particuliers. Cette condition est généralement non vérifiée.

Solution : utiliser la notion d'équivalence suivante :

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \;\Leftrightarrow\; P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}').$$

Les classes d'équivalences sont généralement très grandes.
$\rightsquigarrow$ permet de se ramener à des "bons bords".

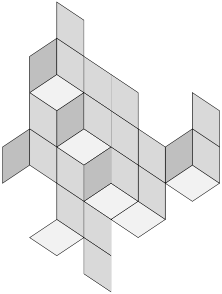
Problème : appliquer $\tilde{T}$ nécessite des “bords” particuliers.
Cette condition est généralement non vérifiée.

Solution : utiliser la notion d’équivalence suivante :

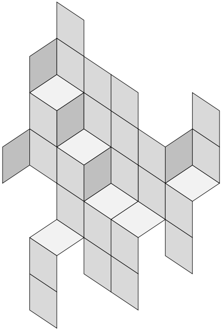
$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \;\Leftrightarrow\; P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{B}').$$

Les classes d’équivalences sont généralement très grandes.
$\rightsquigarrow$ permet de se ramener à des “bons bords”.

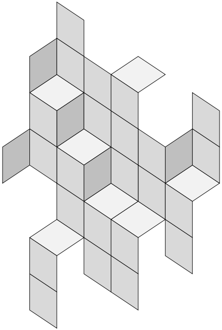
Note : union $\rightsquigarrow$ structure de semi-treillis pour chaque classe.



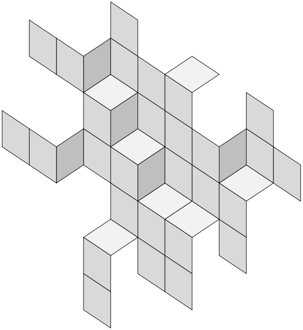
Si c'est un morceau de plan, les $(1, 3)$-paliers sont de tailles 2 et 3.



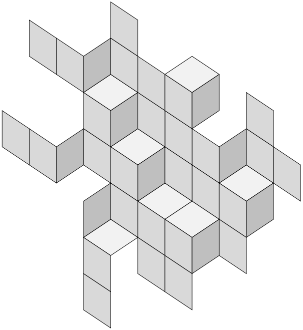
On peut donc prolonger les $(1,3)$-paliers taille inférieure à 2,



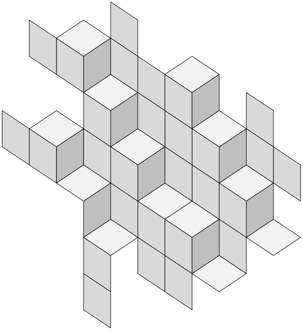
et "fermer" ceux de taille 3.



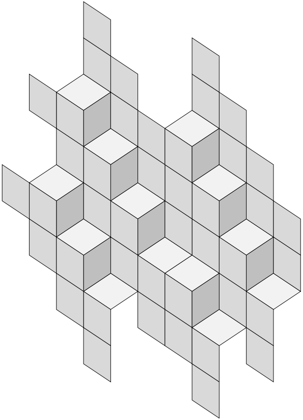
On peut procéder de même pour les $(1, 2)$-paliers



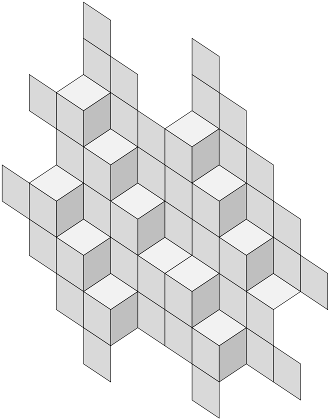
On peut procéder de même pour les $(1, 2)$-paliers



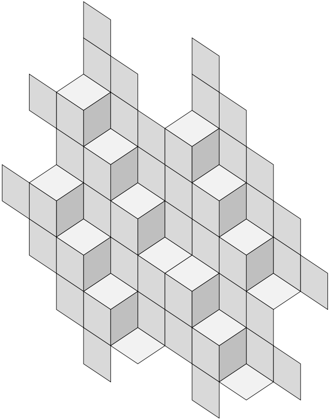
ainsi que pour les $(3,2)$-paliers.



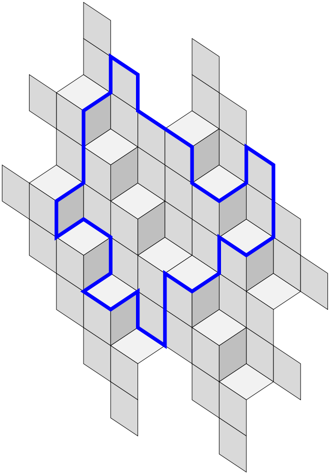
On peut alors itérer ces opérations.



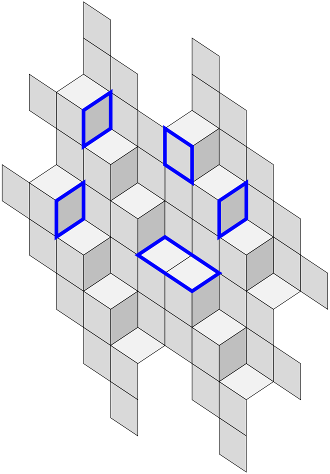
On peut alors itérer ces opérations.



On peut alors itérer ces opérations.



Si le nombre initial de faces est fini, le procédé converge.



On peut aussi enlever les faces “déductibles” $\rightsquigarrow$ grande liberté.

Algorithme :

```
1.  tant que B est reconnaissable faire
2.        B̃ ← équivalent recodable de B;
3.        B ← recodage de B̃;
4.  fin tant que;
5.  calculer P(B) par un autre algorithme;
6.  remonter aux paramètres de l'union de faces B initiale;
```

Chaque étape :

lecture paliers + calcul équivalent + recodage : $\mathcal{O}(|\mathcal{B}|)$.

Nombre d'étapes :

$\mathcal{O}(|\mathcal{B}|)$ au pire (recodage de $\tilde{\mathcal{B}}$ plus petit que $\mathcal{B}$).

$\rightsquigarrow$ algorithme quadratique.

Chaque étape :
lecture paliers + calcul équivalent + recodage : $\mathcal{O}(|\mathcal{B}|)$.

Nombre d'étapes :
$\mathcal{O}(|\mathcal{B}|)$ au pire (recodage de $\tilde{\mathcal{B}}$ plus petit que $\mathcal{B}$).
$\rightsquigarrow$ algorithme quadratique.

Nombre d'étapes si $\mathcal{B}$ est un morceau de plan :
borné indépendamment de $|\mathcal{B}|$ (lié aux paramètres reconnus).
$\rightsquigarrow$ algorithme linéaire.

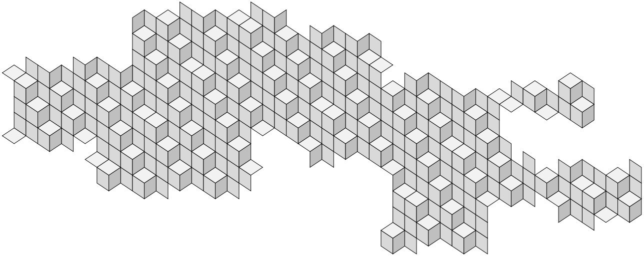
Chaque étape :
lecture paliers + calcul équivalent + recodage : $\mathcal{O}(|\mathcal{B}|)$.

Nombre d'étapes :
$\mathcal{O}(|\mathcal{B}|)$ au pire (recodage de $\tilde{\mathcal{B}}$ plus petit que $\mathcal{B}$).
$\rightsquigarrow$ algorithme quadratique.

Nombre d'étapes si $\mathcal{B}$ est un morceau de plan :
borné indépendamment de $|\mathcal{B}|$ (lié aux paramètres reconnus).
$\rightsquigarrow$ algorithme linéaire.

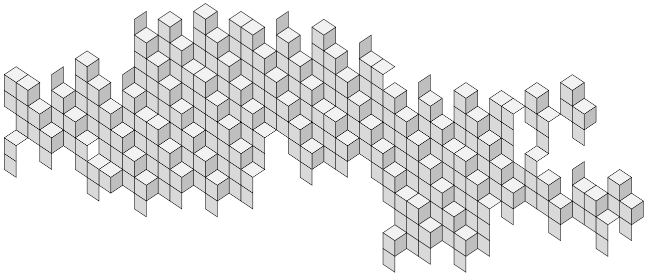
Attendu en pratique :
$|\mathcal{B}|$ décroît quasi-exponentiellement à chaque étape.
$\rightsquigarrow$ algorithme quasi-linéaire.

Exemple

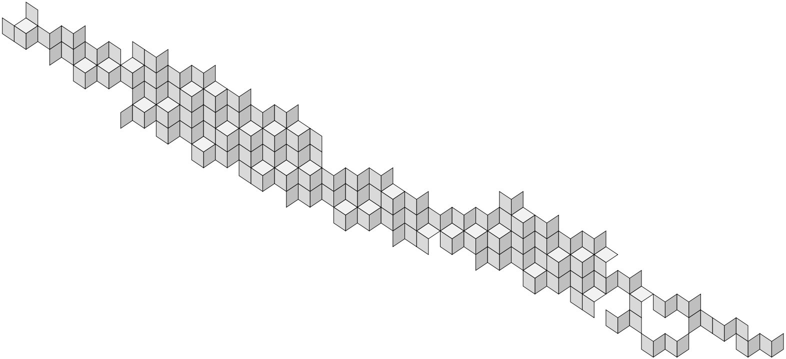


Union de 407 faces : est-ce un morceau de plan ?

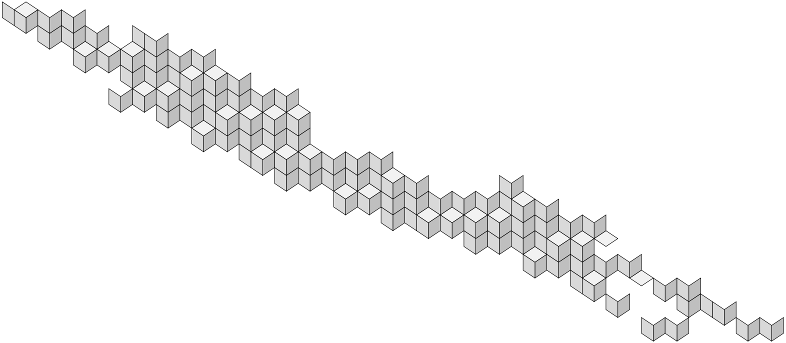
Exemple



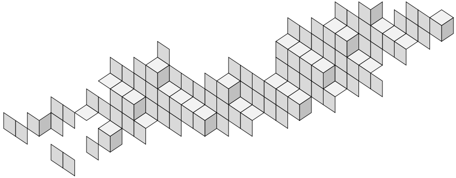
Union reconnaissable $\rightsquigarrow$ calcul d'un équivalent recodable.



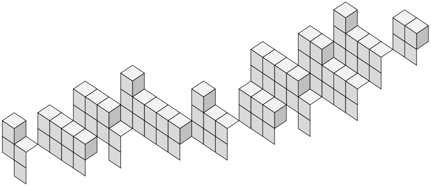
Recodage $\rightsquigarrow$ union de 216 faces. Est-ce un morceau de plan ?



Union reconnaissable $\rightsquigarrow$ calcul d'un équivalent recodable.

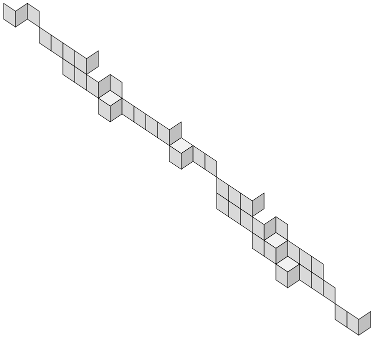


Recodage $\rightsquigarrow$ union de 129 faces. Est-ce un morceau de plan ?

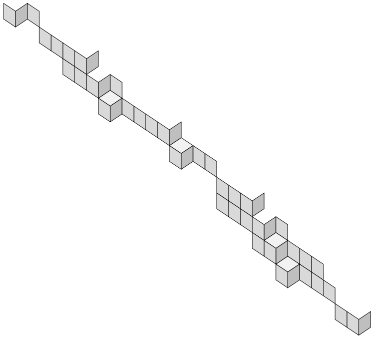


Union reconnaissable $\rightsquigarrow$ calcul d'un équivalent recodable.

Exemple



Recodage $\rightsquigarrow$ union de 52 faces. Est-ce un morceau de plan ?



Union non reconnaissable. Recours à un autre algorithme

Intérêt de la reconnaissance par recodage :

- nouveau (sauf pour les droites) ;
- bonne complexité attendue (quasi-linéaire) ;
- reconnaissance floue (convergence des fractions continues) ;
- recodage “en sens inverse” $\rightsquigarrow$ génération de plan.

Défauts :

- robustesse (adaptable ?) ;
- pas de tests “sérieux”.