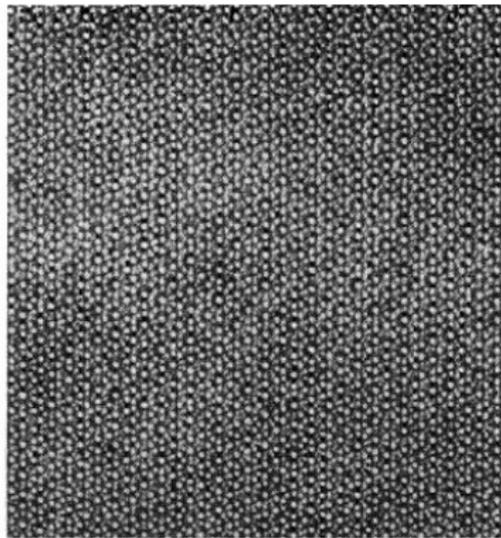
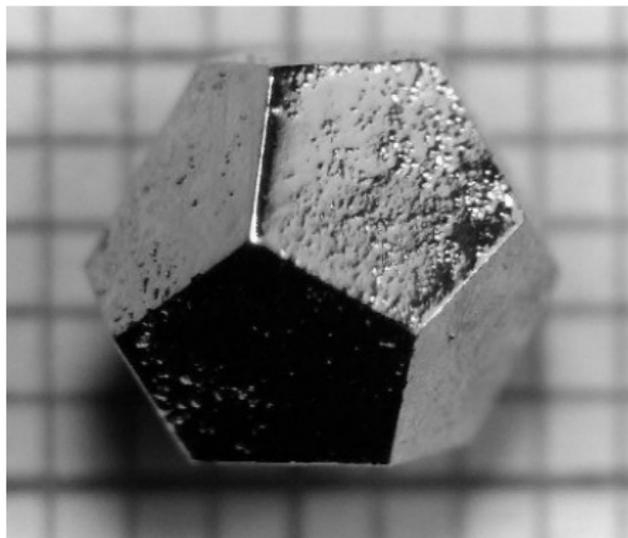


Flips et Puzzles

Thomas Fernique

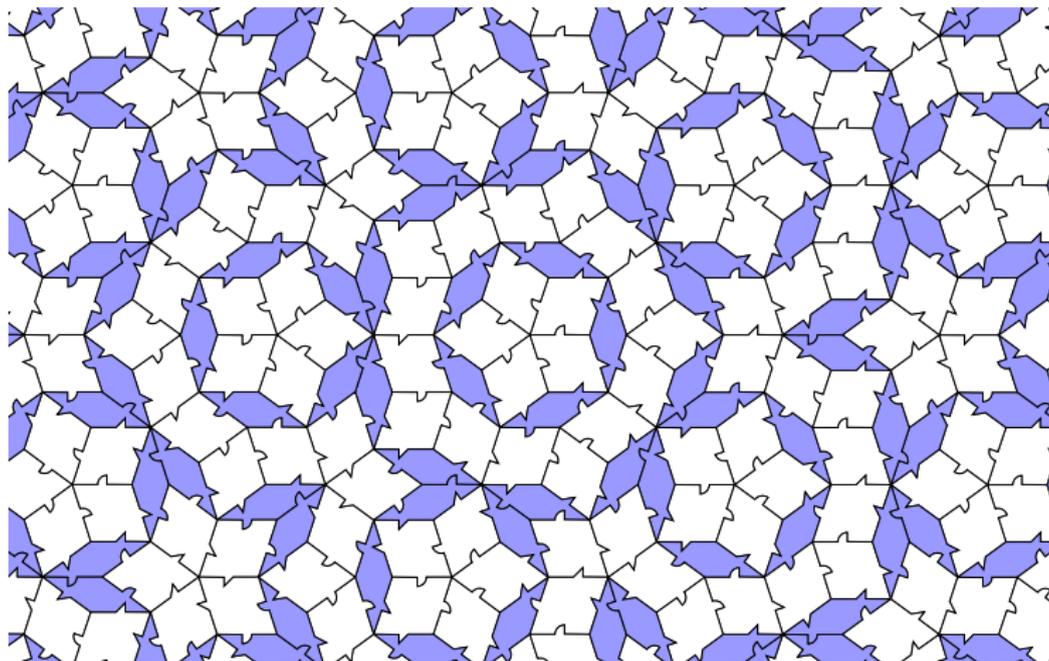
Habilitation à Diriger des Recherches
21 novembre 2016

Quasicristaux (1982)



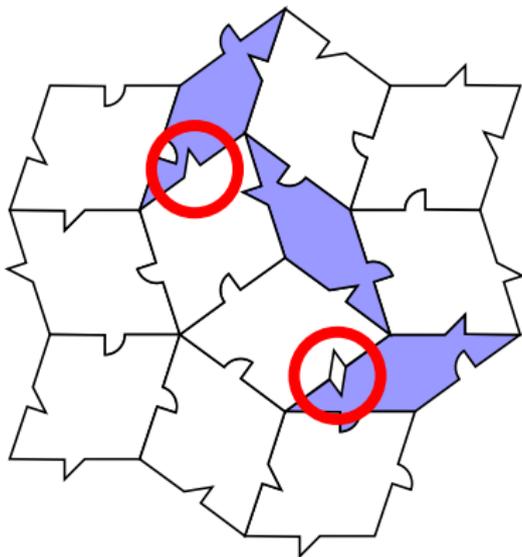
Un matériau **ordonné** s'avère ne pas forcément être **périodique** !

Puzzles



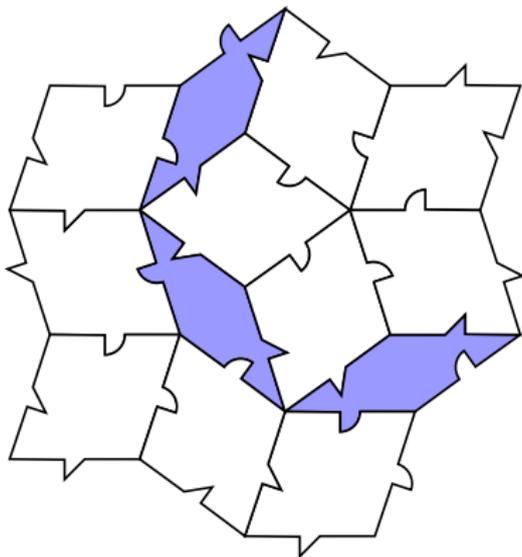
Puzzles (pavages quasipériodiques) : modèles des quasicristaux.

Flips



Flip : modèle de réorganisation élémentaire des matériaux.

Flips



Flip : modèle de réorganisation élémentaire des matériaux.

① Puzzles

② Flips

③ Quelques techniques

① Puzzles

- Pavages
- Coupe et Projection
- Règles Locales
- Substitutions
- Résultats

② Flips

③ Quelques techniques

① Puzzles

- Pavages
- Coupe et Projection
- Règles Locales
- Substitutions
- Résultats

② Flips

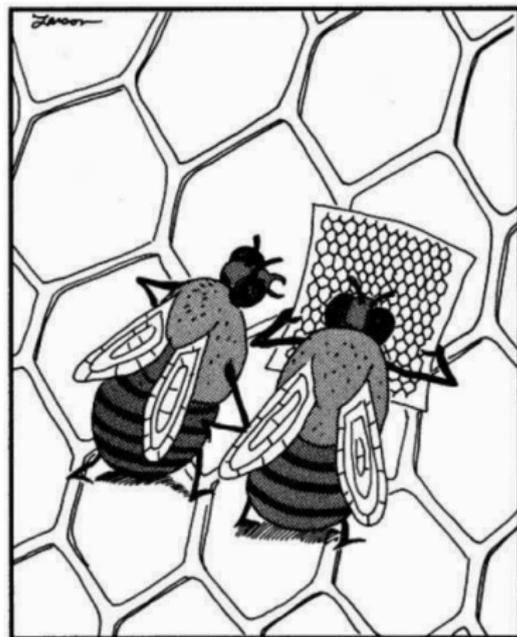
③ Quelques techniques

Pavage

Tuile : compact d'intérieur non vide (par exemple, un polygone).

Pavage : recouvrement de \mathbb{R}^d par des tuiles d'intérieurs disjoints.

Motif : sous-ensemble fini des tuiles d'un pavage.



"Face it, Fred—you're lost!"

Un pavage peut-être

- **périodique** s'il est invariant par une ou plusieurs translations ;
- **quasipériodique** si ses motifs apparaissent uniformément ;
- **ordonné** si sa figure de diffraction est essentiellement discrète ;
- **désordonné** sinon.

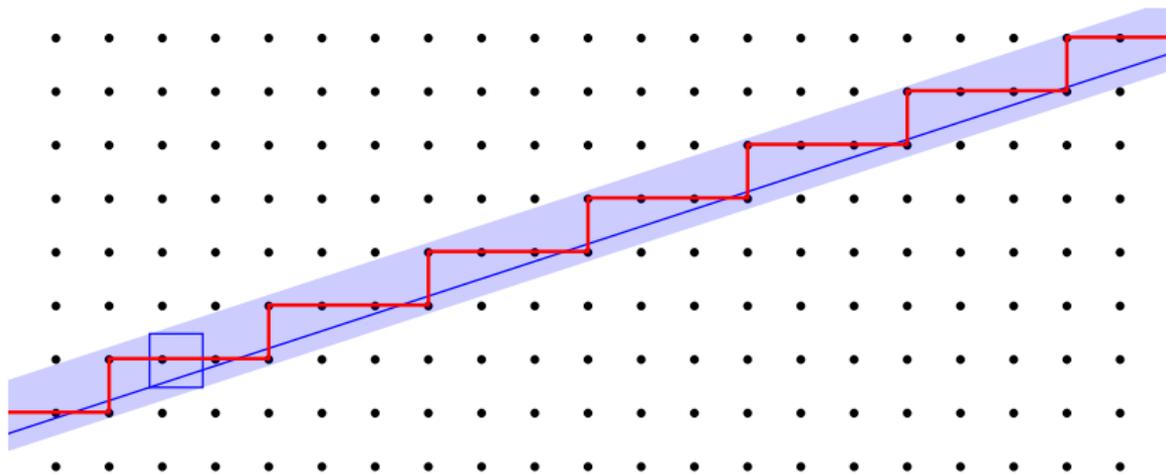
① Puzzles

- Pavages
- Coupe et Projection
- Règles Locales
- Substitutions
- Résultats

② Flips

③ Quelques techniques

Coupe du plan par une droite



Pavage planaire, ou mot sturmien quand la pente est irrationnelle.

Coupe $n \rightarrow d$

Définition (De Bruijn 1981)

Soit E un sous-espace affine de \mathbb{R}^n de dim. d tel que $E \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$.
Sélectionner les faces unités d -dim. de \mathbb{Z}^n incluses dans $E + [0, 1]^n$.
Les projeter sur E . On obtient un pavage, dit **planaire de pente E** .

Coupe $n \rightarrow d$

Définition (De Bruijn 1981)

Soit E un sous-espace affine de \mathbb{R}^n de dim. d tel que $E \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$.
Sélectionner les faces unités d -dim. de \mathbb{Z}^n incluses dans $E + [0, 1]^n$.
Les projeter sur E . On obtient un pavage, dit **planaire de pente E** .

On peut remplacer $[0, 1]^n$ par $[0, t]^n$ où $t \geq 1$ est l'**épaisseur**.

Coupe $n \rightarrow d$

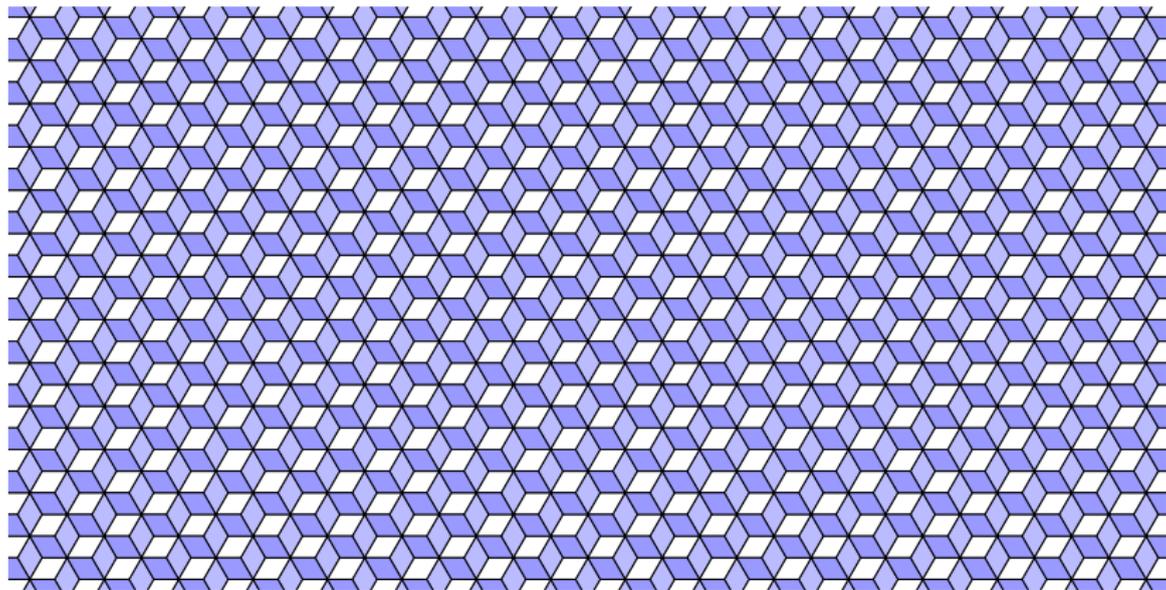
Définition (De Bruijn 1981)

Soit E un sous-espace affine de \mathbb{R}^n de dim. d tel que $E \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$.
Sélectionner les faces unités d -dim. de \mathbb{Z}^n incluses dans $E + [0, 1]^n$.
Les projeter sur E . On obtient un pavage, dit **planaire de pente E** .

On peut remplacer $[0, 1]^n$ par $[0, t]^n$ où $t \geq 1$ est l'**épaisseur**.

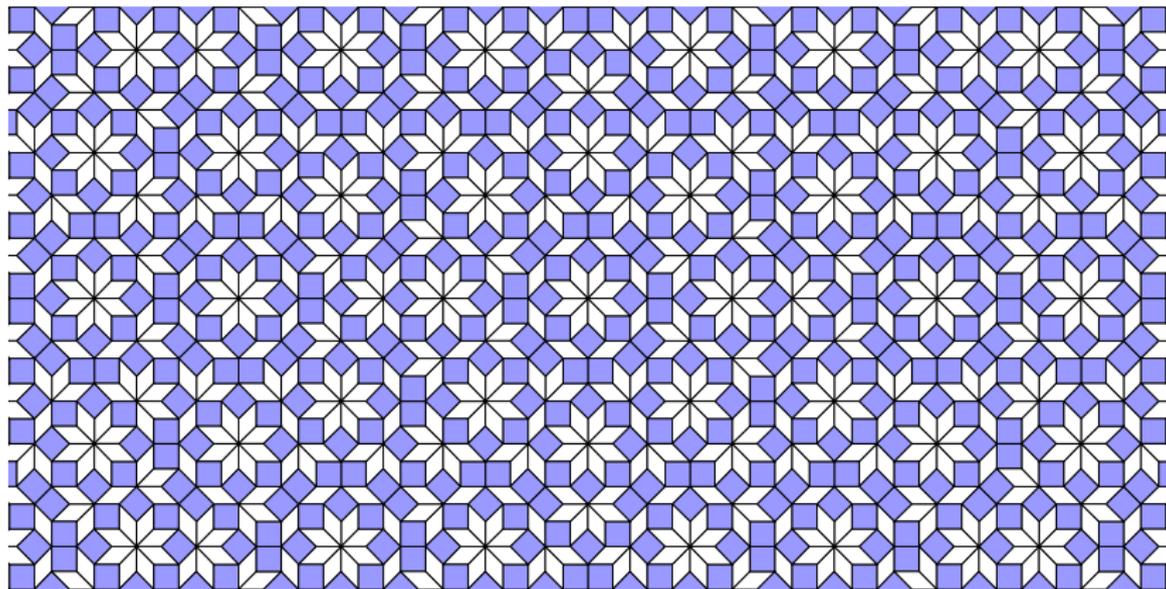
Les pavages plans sont tous ordonnés.

Coupe avec symétrie d'ordre $n = 2p$



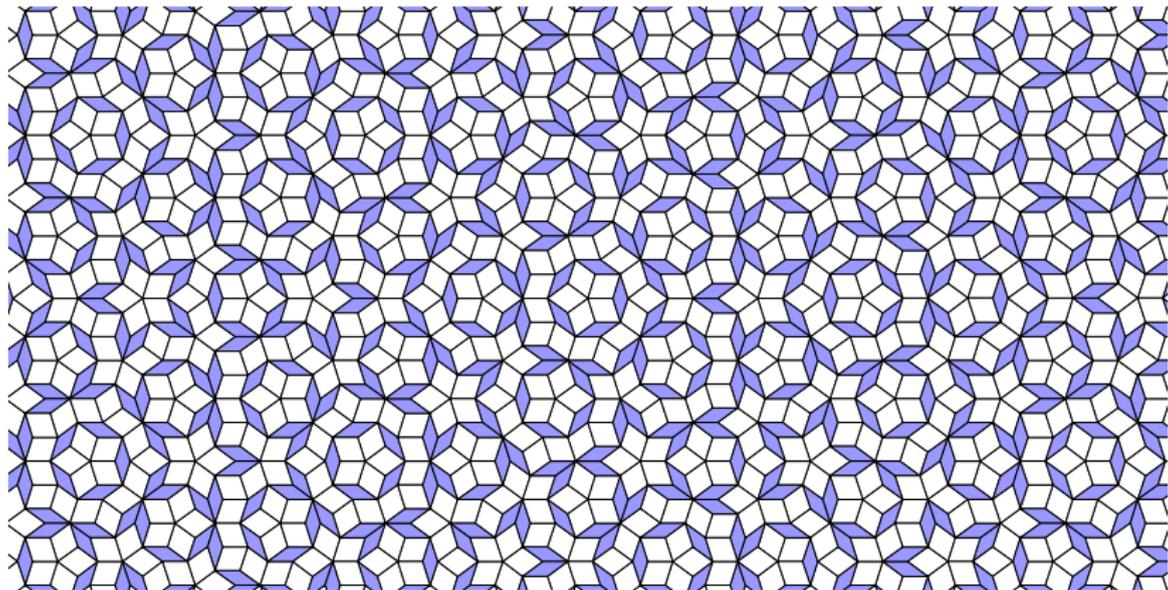
Pavages planaires de pente $\langle \cos(\frac{2k\pi}{p})_{0 \leq k < p}, \sin(\frac{2k\pi}{p})_{0 \leq k < p} \rangle \subset \mathbb{R}^p$.

Coupe avec symétrie d'ordre $n = 2p$



Pavages planaires de pente $\langle \cos(\frac{2k\pi}{p})_{0 \leq k < p}, \sin(\frac{2k\pi}{p})_{0 \leq k < p} \rangle \subset \mathbb{R}^p$.

Coupe avec symétrie d'ordre $n = 2p$



Pavages planaires de pente $\langle \cos(\frac{2k\pi}{p})_{0 \leq k < p}, \sin(\frac{2k\pi}{p})_{0 \leq k < p} \rangle \subset \mathbb{R}^p$.

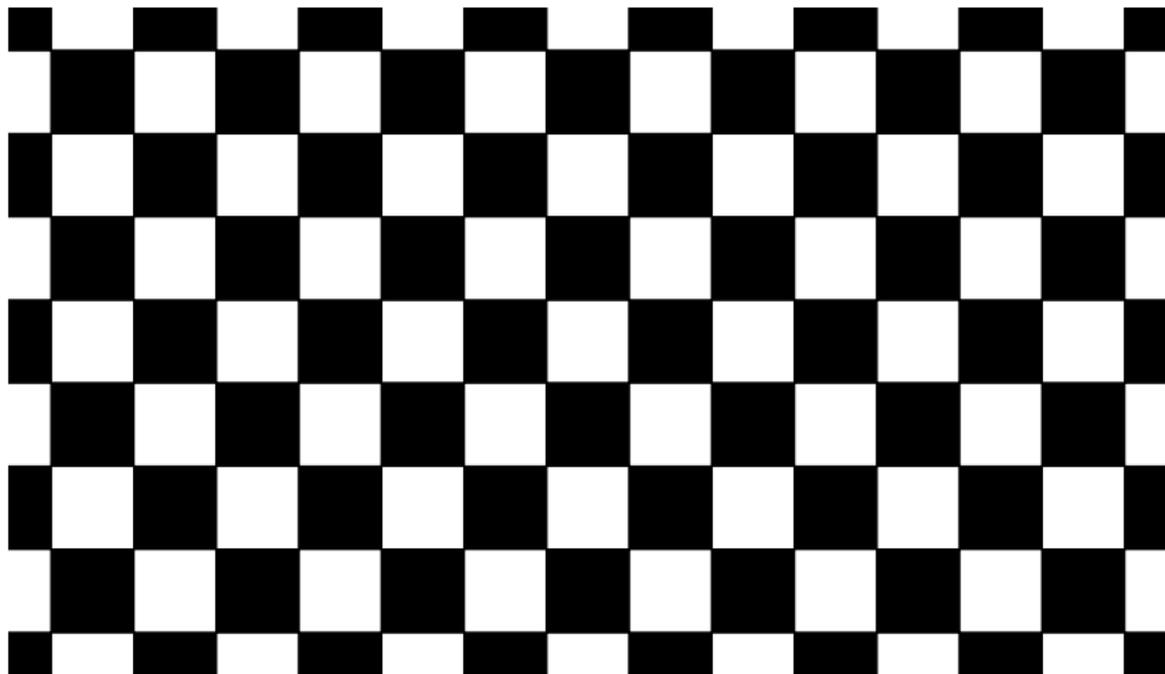
① Puzzles

- Pavages
- Coupe et Projection
- Règles Locales
- Substitutions
- Résultats

② Flips

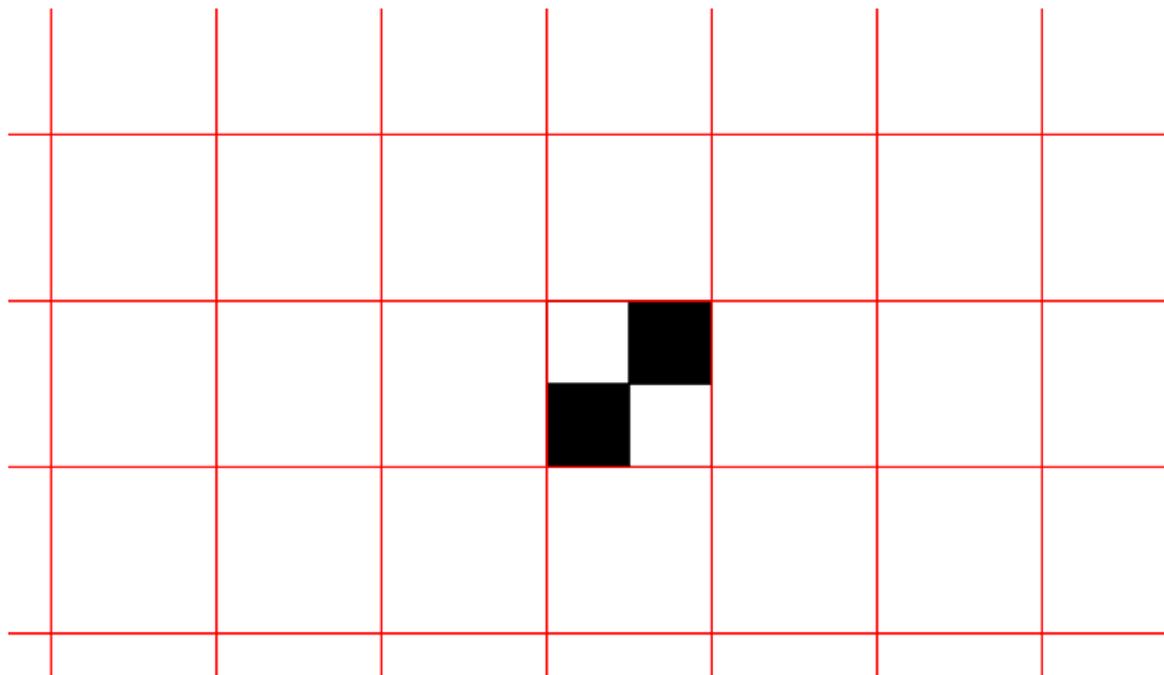
③ Quelques techniques

Règles du damier



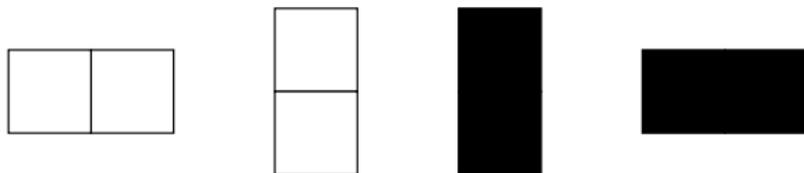
Comment décrire un damier ?

Règles du damier



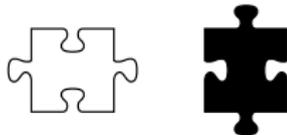
Solution “périodique” : répéter un motif sur une grille régulière.

Règles du damier



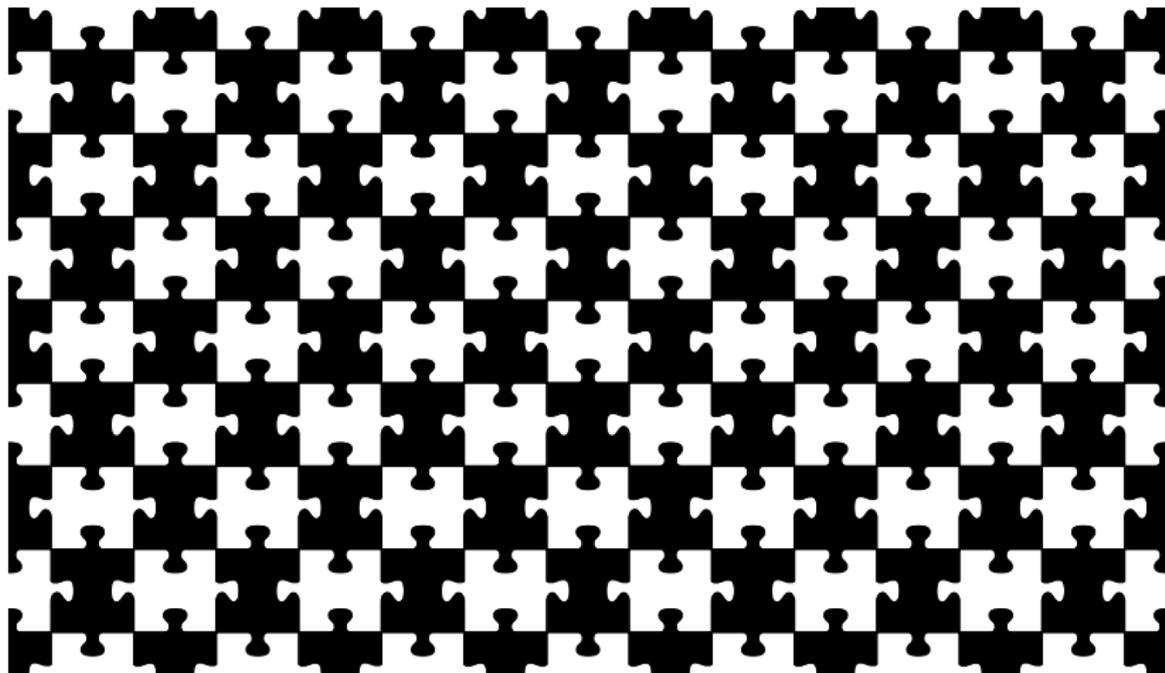
Solution “locale” : caractérisation par des motifs [interdits](#).

Règles du damier



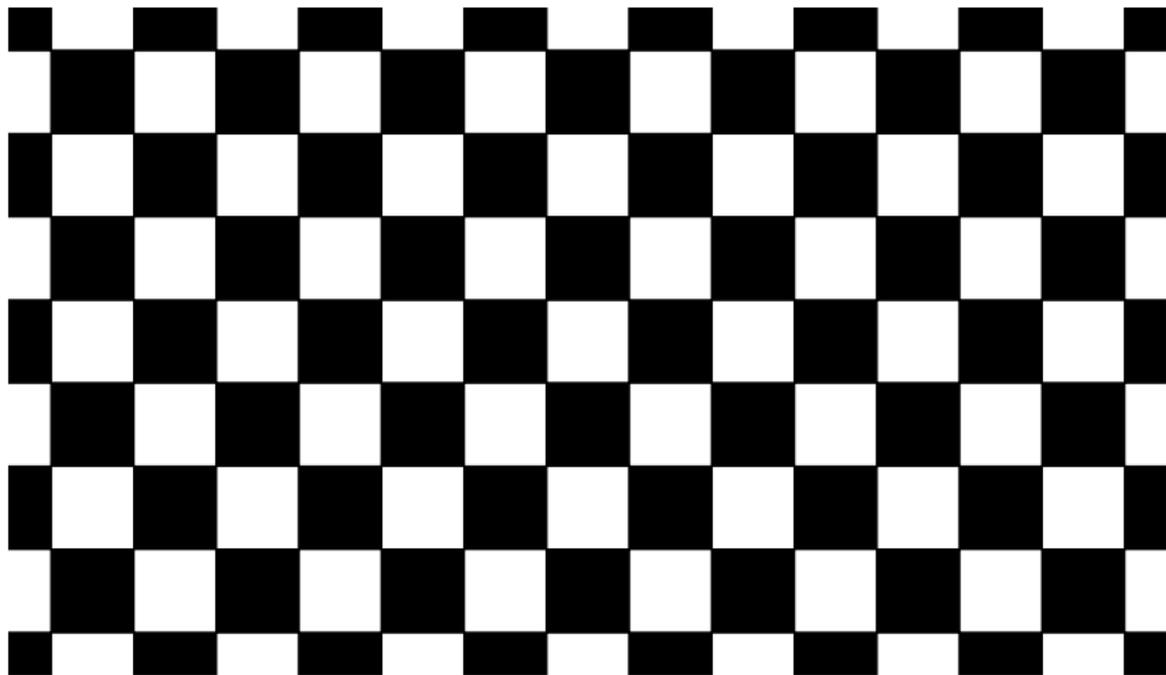
Solution “locale” alternative : un puzzle !

Règles du damier



Solution “locale” alternative : un puzzle !

Règles du damier



Il faut alors un **recodage local** pour retrouver le damier.

Espaces de pavages

Espace : ensemble de pavages défini par des motifs interdits.

Espace de type fini : définissable par un nb. fini de motifs interdits.

Espace de type sofique : recodage local d'un espace de type fini.

Espaces de pavages

Espace : ensemble de pavages défini par des motifs interdits.

Espace de type fini : définissable par un nb. fini de motifs interdits.

Espace de type sofique : recodage local d'un espace de type fini.

Question (\sim Wang, 1961)

Peut-on trouver plus intéressant qu'un damier périodique ?

Espaces apériodiques

Théorème (Birkhoff, ~1930)

Tout espace non vide contient un pavage (quasi)périodique.

Espaces apériodiques

Théorème (Birkhoff, ~1930)

Tout espace non vide contient un pavage (quasi)périodique.

Théorème (Berger, 1964)

Il existe un espace non vide de type fini sans pavage périodique.

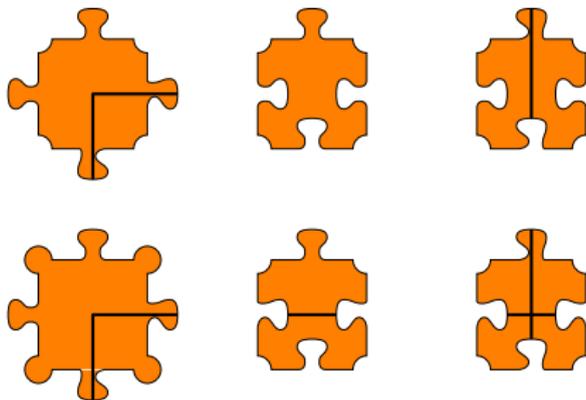
Espaces a périodiques

Théorème (Birkhoff, ~1930)

Tout espace non vide contient un pavage (quasi)périodique.

Théorème (Berger, 1964)

Il existe un espace non vide de type fini sans pavage périodique.



① Puzzles

- Pavages
- Coupe et Projection
- Règles Locales
- **Substitutions**
- Résultats

② Flips

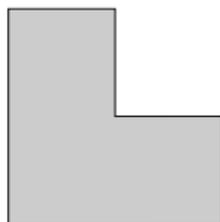
③ Quelques techniques

Substitution classique



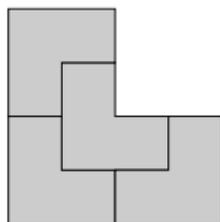
Les tuiles sont dilatées et découpées en copies des tuiles originales.

Substitution classique



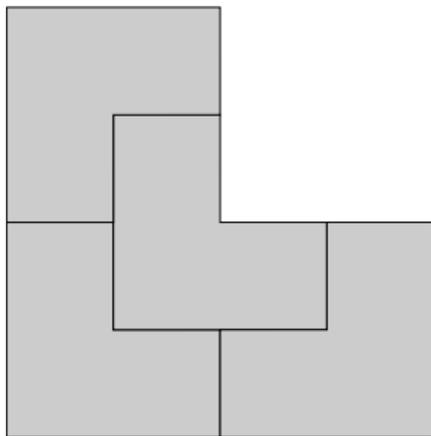
Les tuiles sont dilatées et découpées en copies des tuiles originales.

Substitution classique



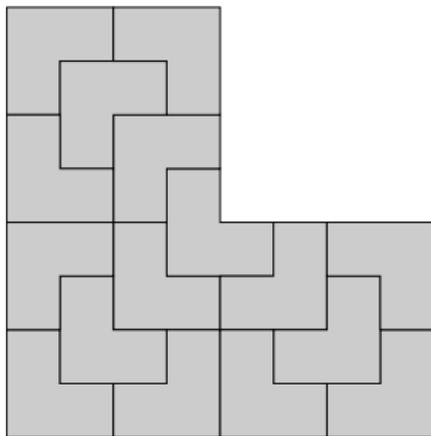
Les tuiles sont dilatées et découpées en copies des tuiles originales.

Substitution classique



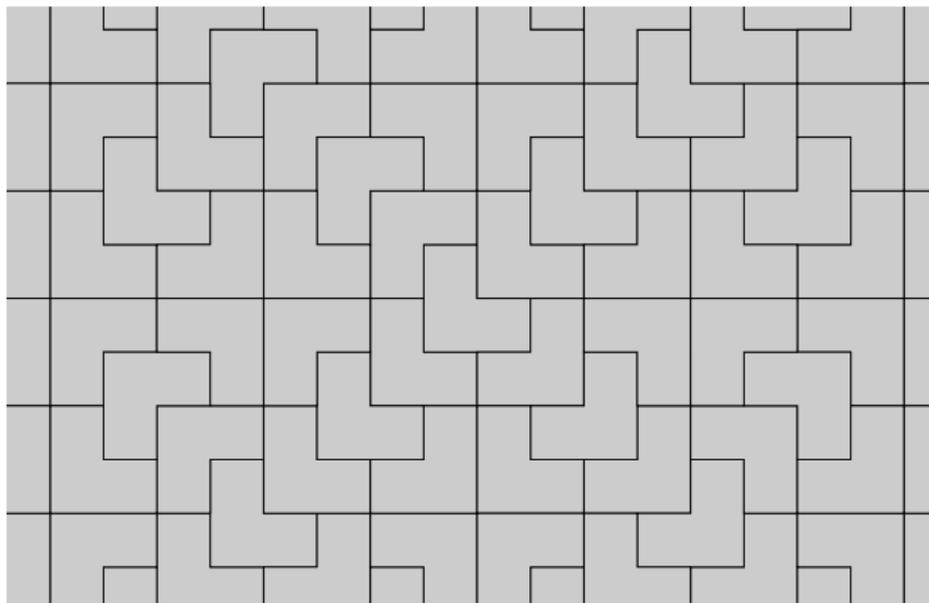
Les tuiles sont dilatées et découpées en copies des tuiles originales.

Substitution classique



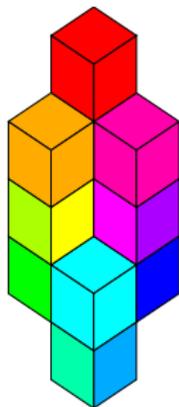
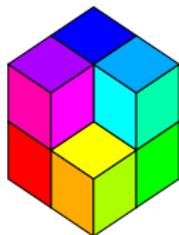
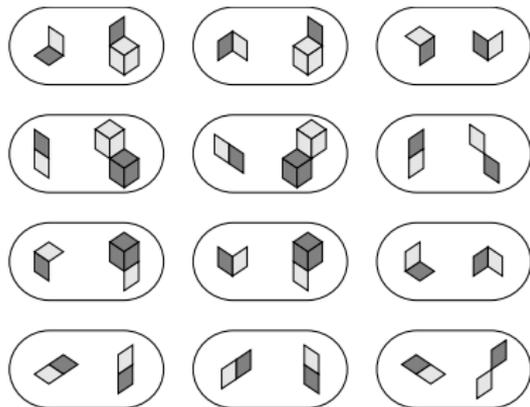
Les tuiles sont dilatées et découpées en copies des tuiles originales.

Substitution classique



Ensemble limite : pavages admettant une suite infinie de préimages.

Substitution combinatoire



Plus général. Définition locale. Il faut garantir la cohérence globale.

① Puzzles

- Pavages
- Coupe et Projection
- Règles Locales
- Substitutions
- Résultats

② Flips

③ Quelques techniques

En théorèmes...

Théorème (Mozes 1990, Goodmann 1998, F.-Ollinger 2010)

L'ensemble limite d'une substitution combinatoire est sofique.

En théorèmes...

Théorème (Mozes 1990, Goodman 1998, F.-Ollinger 2010)

L'ensemble limite d'une substitution combinatoire est sofique.

Théorème (Le 1995, Bédaride-F. 2013-)

La pente de tout pavage planaire de type fini est algébrique.

En théorèmes...

Théorème (Mozes 1990, Goodman 1998, F.-Ollinger 2010)

L'ensemble limite d'une substitution combinatoire est sofique.

Théorème (Le 1995, Bédaride-F. 2013-)

La pente de tout pavage planaire de type fini est algébrique.

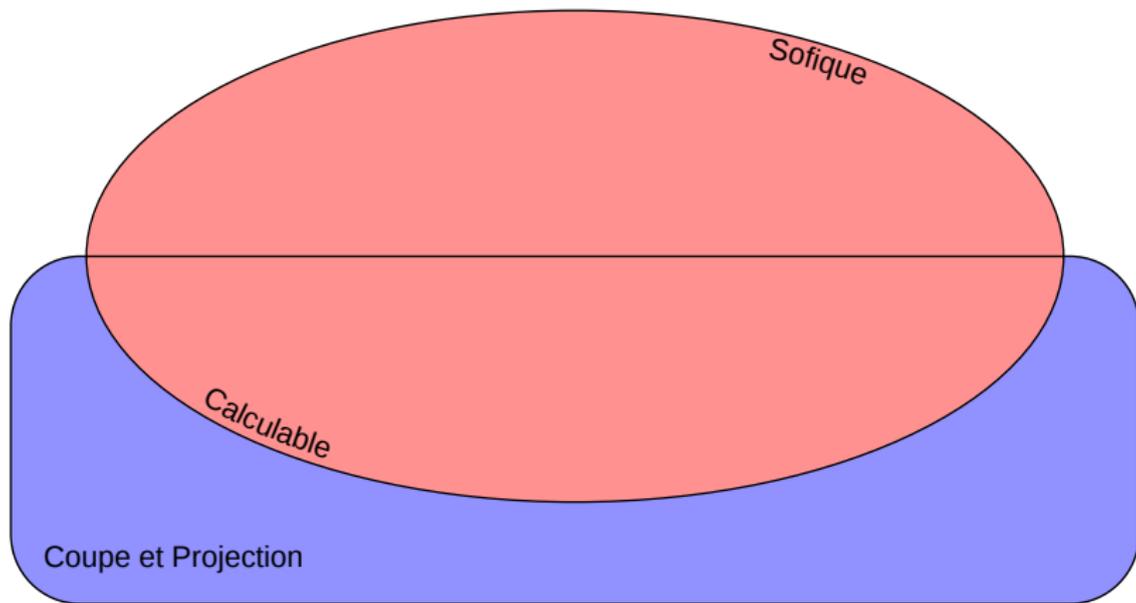
Théorème (F.-Sablik 2012-)

Un pavage planaire est de type sofique ssi sa pente est calculable.

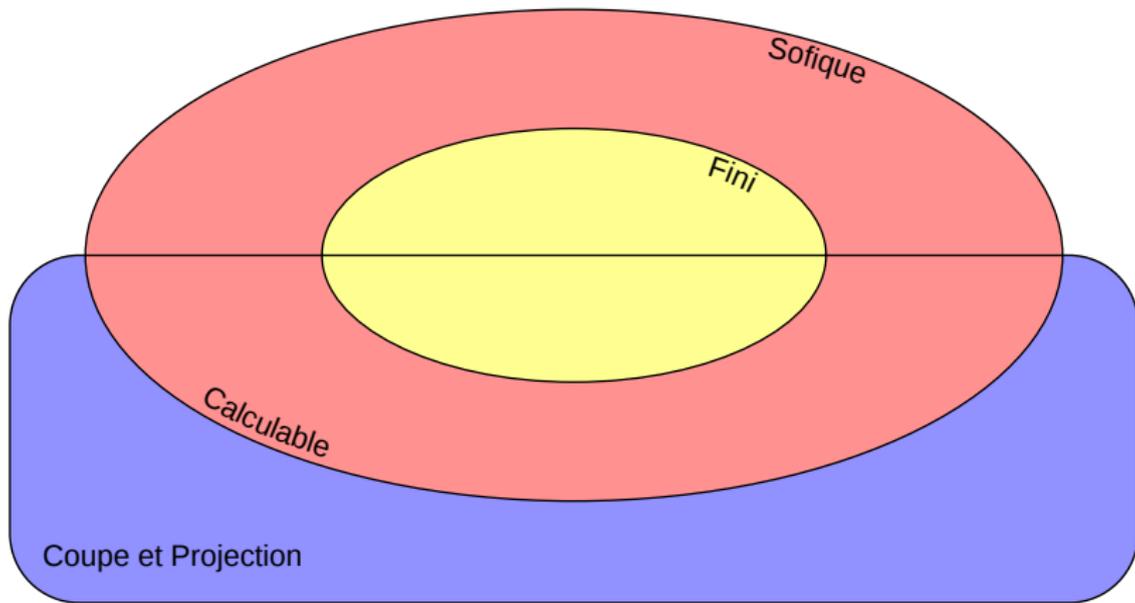
... et en patates

Coupe et Projection

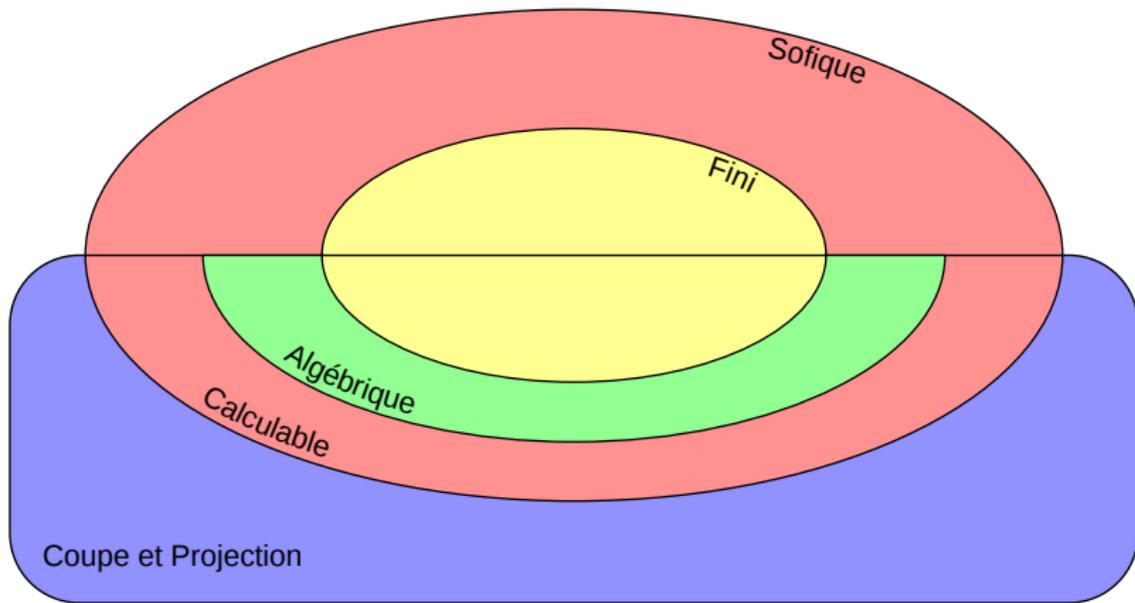
... et en patates



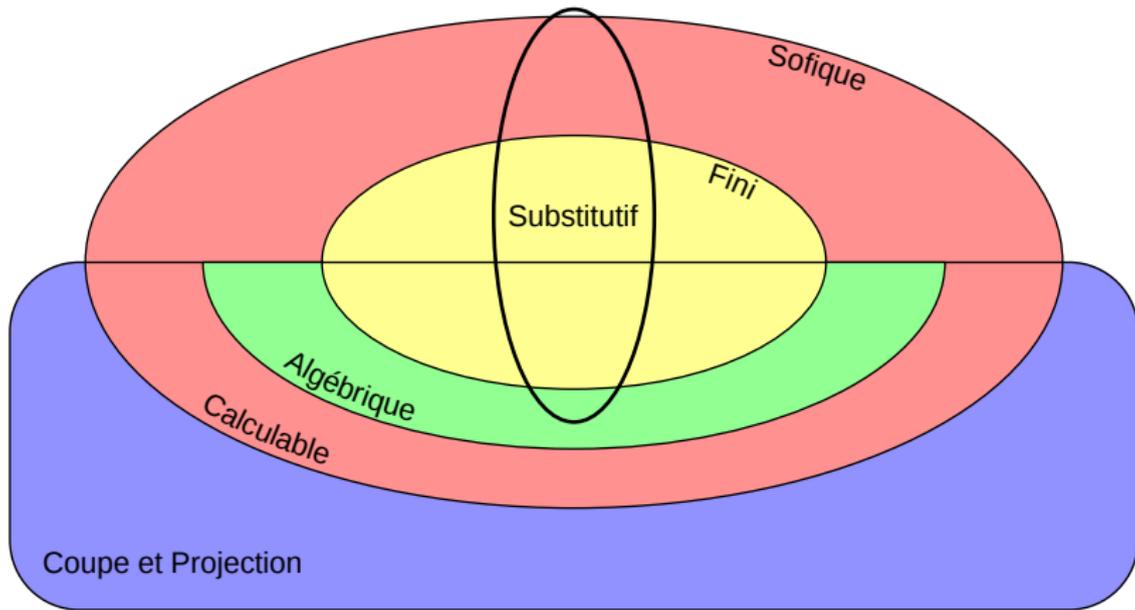
...et en patates



... et en patates



... et en patates



① Puzzles

② Flips

- Déception
- Trempe
- Recuit
- Convergence
- Résultats

③ Quelques techniques

① Puzzles

② Flips

- Déception
- Trempe
- Recuit
- Convergence
- Résultats

③ Quelques techniques

Déception



YOUNG ROGER PENROSE

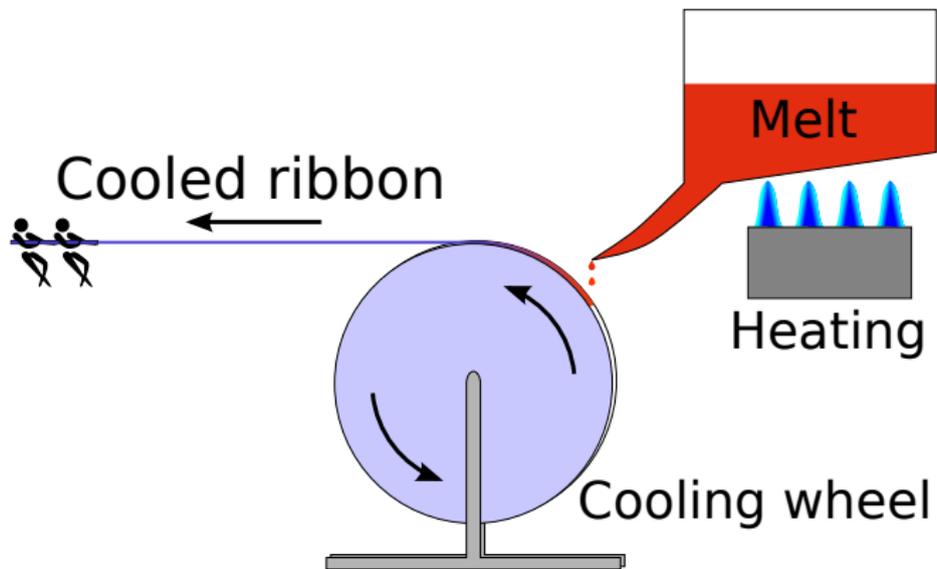
① Puzzles

② Flips

- Déception
- **Trempe**
- Recuit
- Convergence
- Résultats

③ Quelques techniques

Premiers quasicristaux



Refroidissement rapide. Minimisation $E - TS \rightarrow$ Maximisation S .

Modélisation

Entropie d'un pavage $n \rightarrow d$ d'une région finie $R \subset \mathbb{R}^d$:

$$S := \frac{\log(\text{nb. réarrangements possibles des tuiles})}{\text{nb. tuiles}}.$$

Modélisation

Entropie d'un pavage $n \rightarrow d$ d'une région finie $R \subset \mathbb{R}^d$:

$$S := \frac{\log(\text{nb. réarrangements possibles des tuiles})}{\text{nb. tuiles}}.$$

Exemple pour des pavages $3 \rightarrow 2$ (dimères) :

$$S(\text{cylindre}) < S(\text{zigzag}) < S(\text{cavité})$$

Modélisation

Entropie d'un pavage $n \rightarrow d$ d'une région finie $R \subset \mathbb{R}^d$:

$$S := \frac{\log(\text{nb. réarrangements possibles des tuiles})}{\text{nb. tuiles}}.$$

Exemple pour des pavages $3 \rightarrow 2$ (dimères) :

$$S(\text{cylindre}) < S(\text{cette configuration}) < S(\text{cette configuration})$$

Pavages d'entropie maximale quand la taille des tuiles tend vers 0 ?
Connu en $3 \rightarrow 2$ (Kenyon, Propp, Okounkov. . .) mais guère plus.

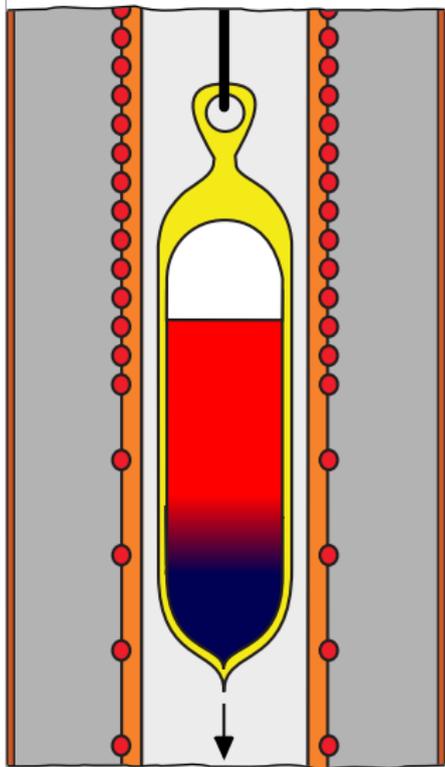
① Puzzles

② Flips

- Déception
- Trempe
- **Recuit**
- Convergence
- Résultats

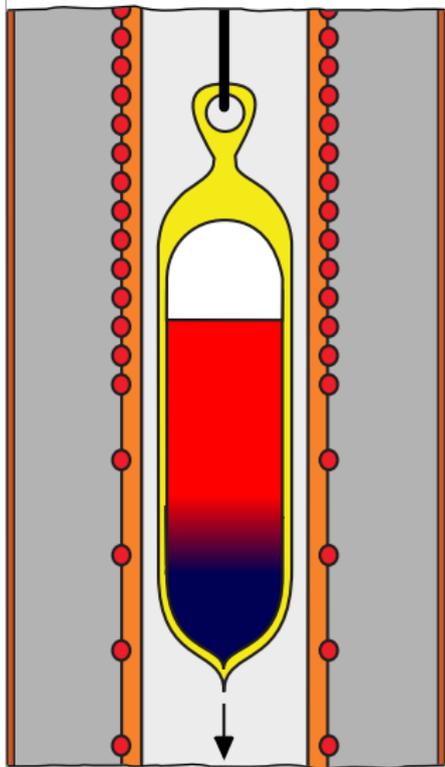
③ Quelques techniques

Quasicristaux actuels



Refroidissement progressif.

Quasicristaux actuels

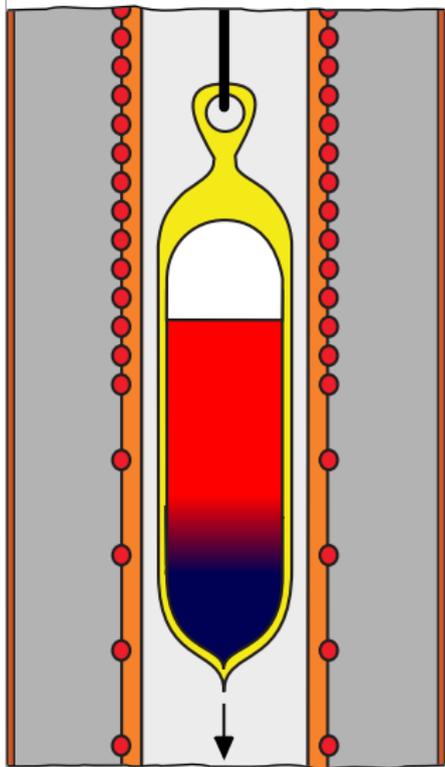


Refroidissement progressif.

Minimisation $E - TS$:

Maximisation $S \xrightarrow{T \rightarrow 0}$ Minimisation E .

Quasicristaux actuels



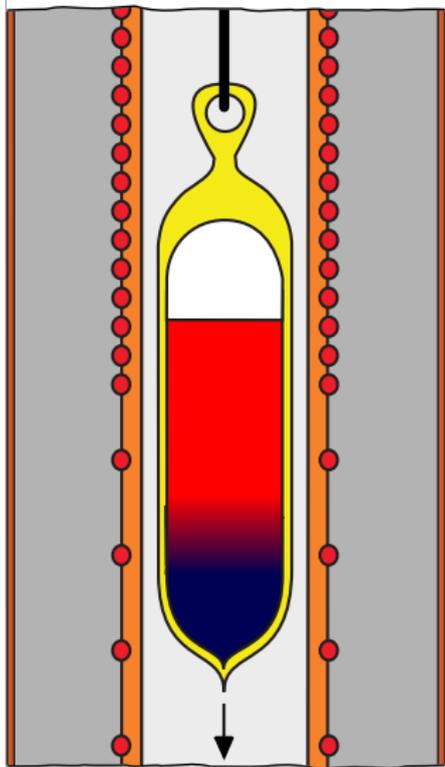
Refroidissement progressif.

Minimisation $E - TS$:

Maximisation $S \xrightarrow{T \rightarrow 0}$ Minimisation E .

Observé : transformations élémentaires
qui "corrige" petit à petit le matériau.

Quasicristaux actuels



Refroidissement progressif.

Minimisation $E - TS$:

Maximisation $S \xrightarrow{T \rightarrow 0}$ Minimisation E .

Observé : transformations élémentaires
qui "corrige" petit à petit le matériau.

Profil de refroidissement optimal ?

Modélisation

Énergie E d'un pavage : nombre de motifs interdits.

Modélisation

Énergie E d'un pavage : nombre de motifs interdits.

Chaîne de Markov \mathcal{M}_T sur un pavage $n \rightarrow d$ d'une région R finie :
Choisir un flip uniformément au hasard et le faire avec probabilité

$$\min(1, \exp(-\Delta E/T)).$$

Modélisation

Énergie E d'un pavage : nombre de motifs interdits.

Chaîne de Markov \mathcal{M}_T sur un pavage $n \rightarrow d$ d'une région R finie : Choisir un flip uniformément au hasard et le faire avec probabilité

$$\min(1, \exp(-\Delta E/T)).$$

Théorème (Kenyon 1993, Bodini-F.-Rémila 2006)

La chaîne \mathcal{M}_T est *ergodique* pour $T > 0$.

L'unique *distribution stationnaire* est la *distribution de Gibbs* :

$$\pi(x) \propto \exp(-E(x)/T).$$

① Puzzles

② Flips

- Déception
- Trempe
- Recuit
- **Convergence**
- Résultats

③ Quelques techniques

Convergence exponentielle

Convergence d'une chaîne ergodique de distribution stationnaire π :

$$d(t) := \max_{x \in \Omega} \frac{1}{2} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)|.$$

Convergence exponentielle

Convergence d'une chaîne ergodique de distribution stationnaire π :

$$d(t) := \max_{x \in \Omega} \frac{1}{2} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)|.$$

Théorème (Perron-Frobenius 1907-1912)

Pour toute chaîne ergodique, il existe $\alpha < 1$ t.q. $d(t) \leq C\alpha^t$.

Convergence exponentielle

Convergence d'une chaîne ergodique de distribution stationnaire π :

$$d(t) := \max_{x \in \Omega} \frac{1}{2} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)|.$$

Théorème (Perron-Frobenius 1907-1912)

Pour toute chaîne ergodique, il existe $\alpha < 1$ t.q. $d(t) \leq C\alpha^t$.

Mais l'exposant de convergence dépend de la taille de Ω !

Mélange rapide

On étudie le comportement asymptotique du **temps de mélange** :

$$\tau_{\text{mix}} := \min\{t \mid d(t) \leq 1/4\}.$$

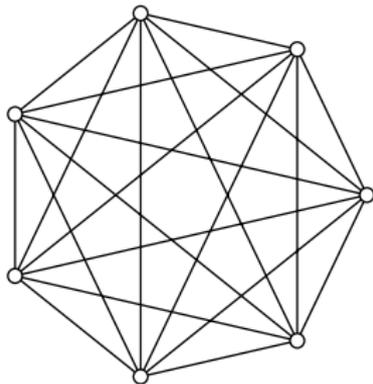
C'est un **temps de demi-vie** : $d(t)$ est divisée par 2 chaque τ_{mix} pas.
On parle de **mélange rapide** si τ_{mix} est logarithmique en $|\Omega|$.

Mélange rapide

On étudie le comportement asymptotique du **temps de mélange** :

$$\tau_{\text{mix}} := \min\{t \mid d(t) \leq 1/4\}.$$

C'est un **temps de demi-vie** : $d(t)$ est divisée par 2 chaque τ_{mix} pas.
On parle de **mélange rapide** si τ_{mix} est logarithmique en $|\Omega|$.

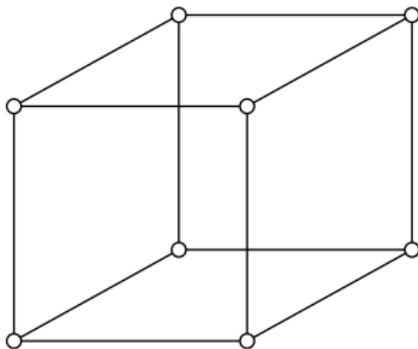


Mélange rapide

On étudie le comportement asymptotique du **temps de mélange** :

$$\tau_{\text{mix}} := \min\{t \mid d(t) \leq 1/4\}.$$

C'est un **temps de demi-vie** : $d(t)$ est divisée par 2 chaque τ_{mix} pas.
On parle de **mélange rapide** si τ_{mix} est logarithmique en $|\Omega|$.



Mélange rapide

On étudie le comportement asymptotique du **temps de mélange** :

$$\tau_{\text{mix}} := \min\{t \mid d(t) \leq 1/4\}.$$

C'est un **temps de demi-vie** : $d(t)$ est divisée par 2 chaque τ_{mix} pas.
On parle de **mélange rapide** si τ_{mix} est logarithmique en $|\Omega|$.

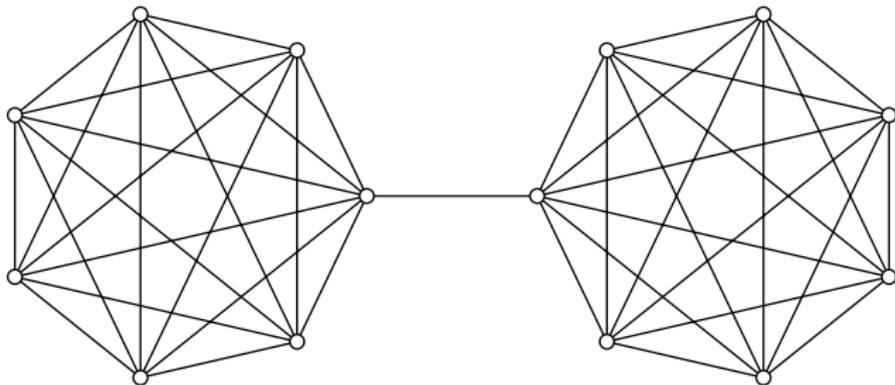


Mélange rapide

On étudie le comportement asymptotique du **temps de mélange** :

$$\tau_{\text{mix}} := \min\{t \mid d(t) \leq 1/4\}.$$

C'est un **temps de demi-vie** : $d(t)$ est divisée par 2 chaque τ_{mix} pas.
On parle de **mélange rapide** si τ_{mix} est logarithmique en $|\Omega|$.



① Puzzles

② Flips

- Déception
- Trempe
- Recuit
- Convergence
- **Résultats**

③ Quelques techniques

Température infinie

Pour les pavages $3 \rightarrow 2$ (dimères), mélange en

- $O(n^{3.5})$ tours de flips (Luby-Randall-Sinclair, 1995)
- $cn^2 \log(n)$ tours de flips (Wilson, 2004)
- $O(n^4 \log(n))$ flips (Randall-Tetali, 1999)

Si le pavage $3 \rightarrow 2$ a de plus un bord “plat”, mélange en

- $O(n^2 \log^c(n))$ flips (Caputo-Martinelli-Toninelli, 2011)
- $n^{2+o(1)}$ flips (Laslier-Toninelli, 2013)

Dans tous ces cas, le mélange est rapide.

Température infinie

Pour les pavages $3 \rightarrow 2$ (dimères), mélange en

- $O(n^{3.5})$ tours de flips (Luby-Randall-Sinclair, 1995)
- $cn^2 \log(n)$ tours de flips (Wilson, 2004)
- $O(n^4 \log(n))$ flips (Randall-Tetali, 1999)

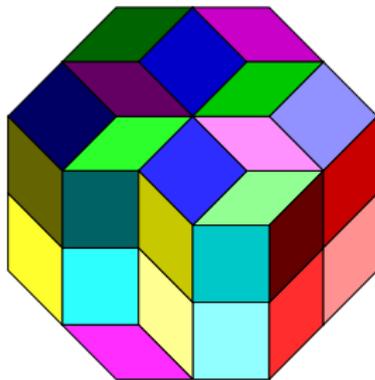
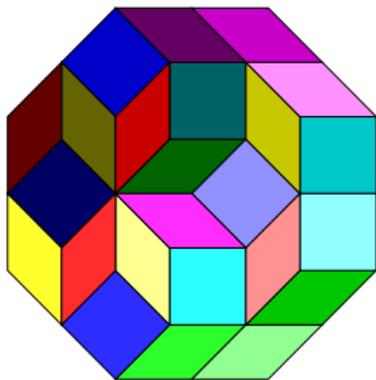
Si le pavage $3 \rightarrow 2$ a de plus un bord “plat”, mélange en

- $O(n^2 \log^c(n))$ flips (Caputo-Martinelli-Toninelli, 2011)
- $n^{2+o(1)}$ flips (Laslier-Toninelli, 2013)

Dans tous ces cas, le mélange est rapide.

Pour les $4 \rightarrow 2$ ou pire, il n’y a que des simulations équivoques. . .

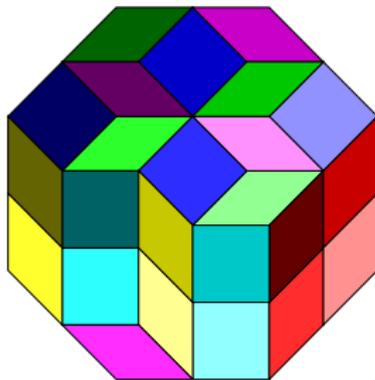
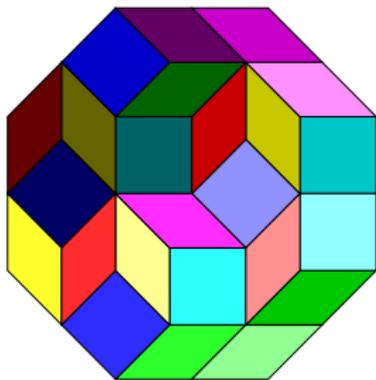
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

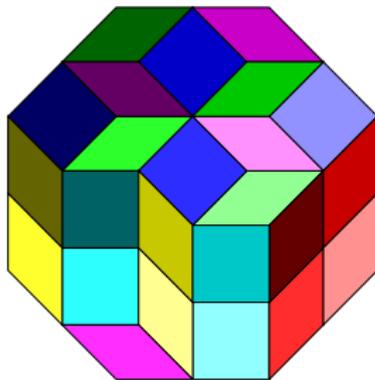
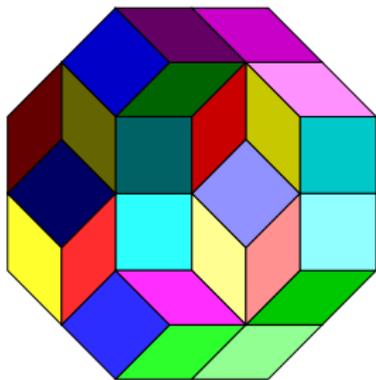
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

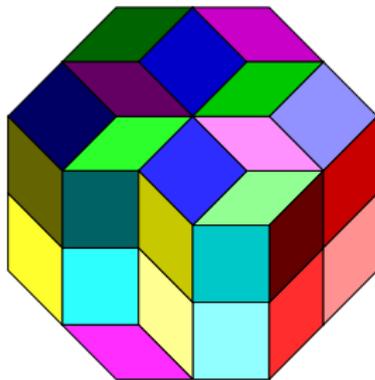
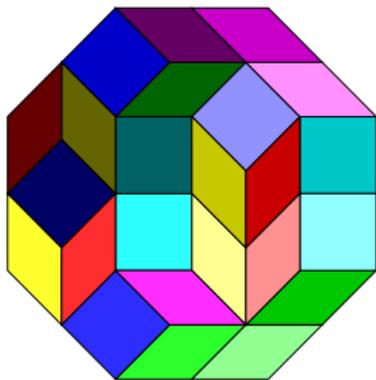
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

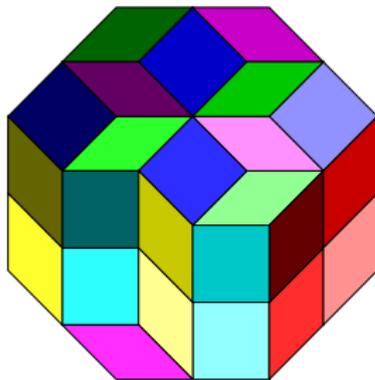
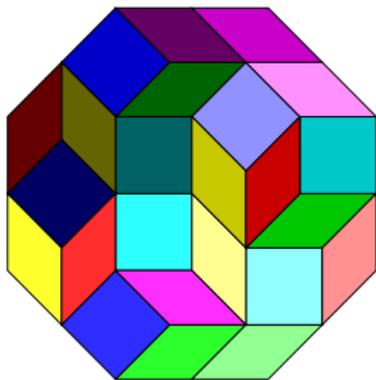
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

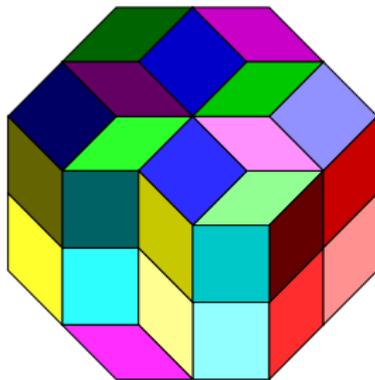
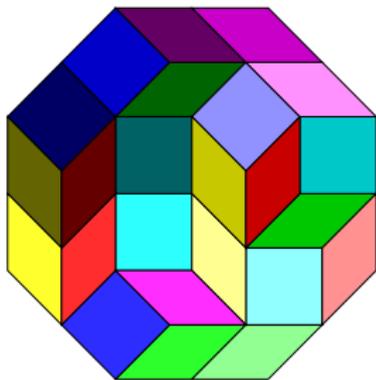
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

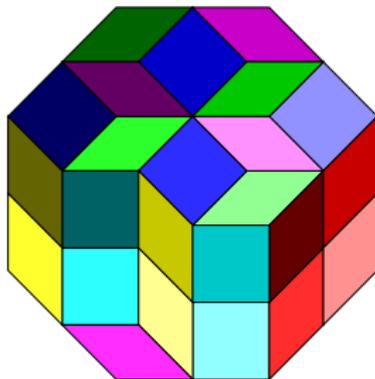
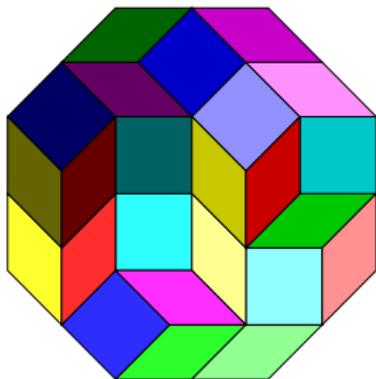
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

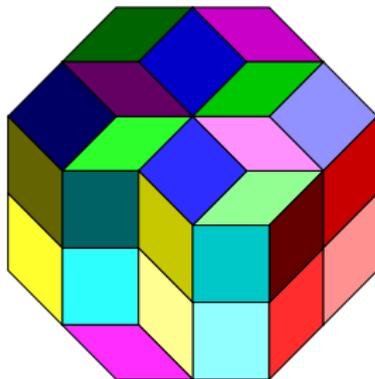
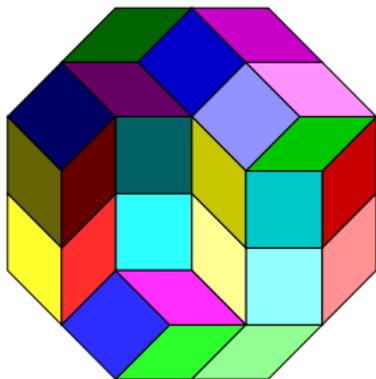
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

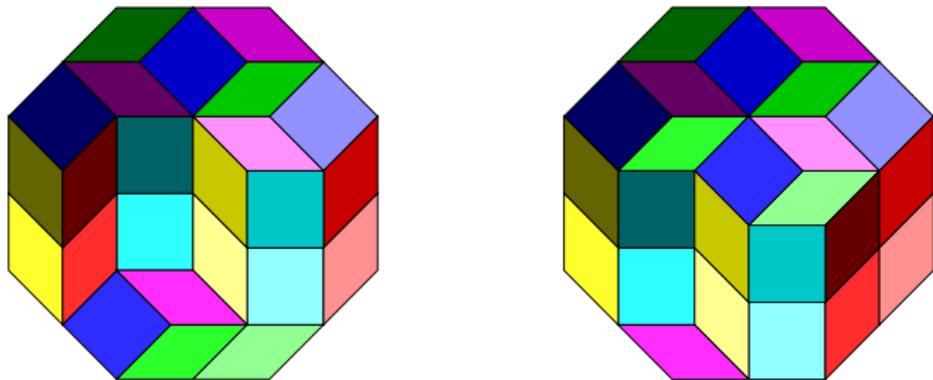
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

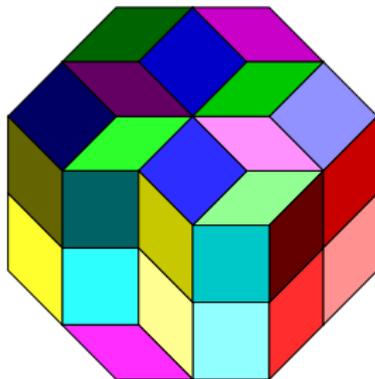
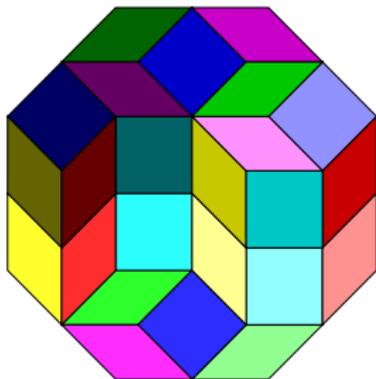
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

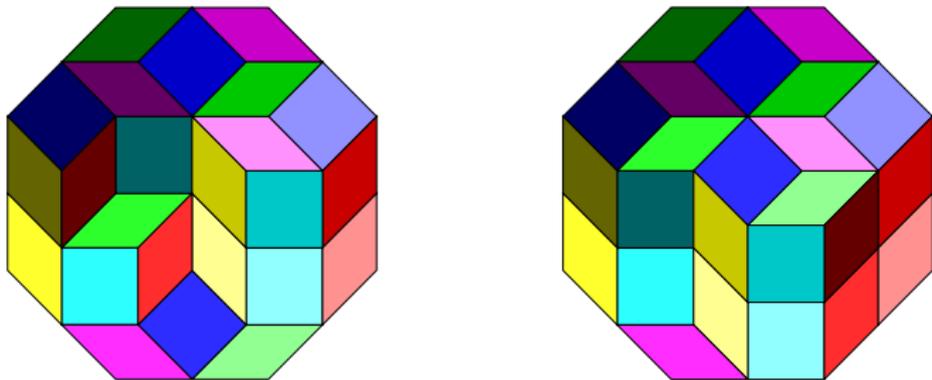
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

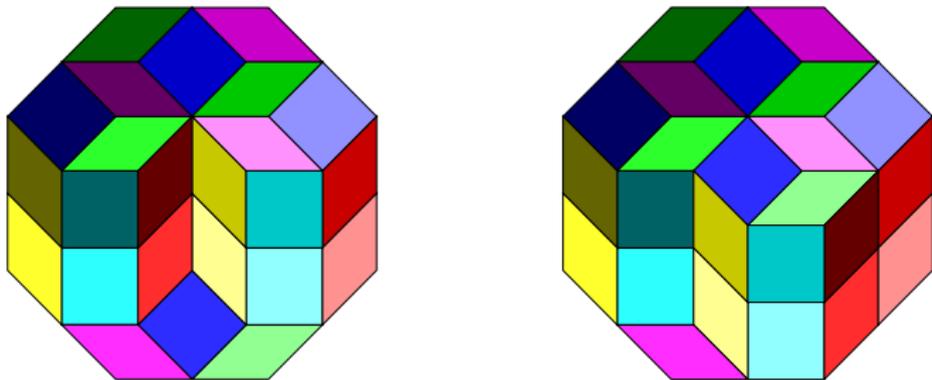
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

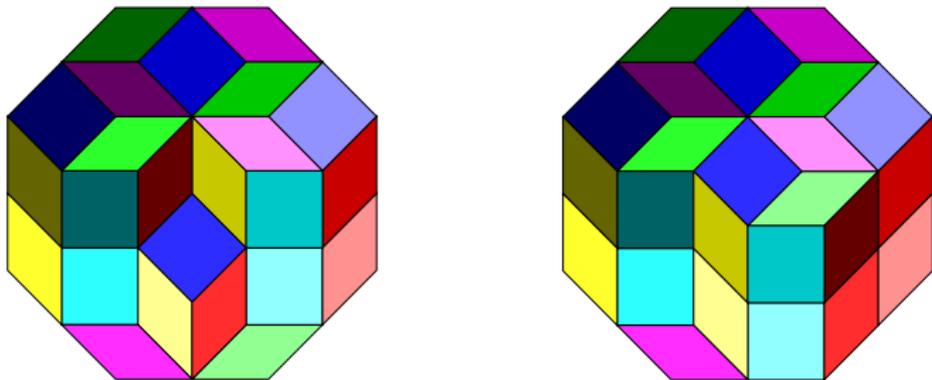
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

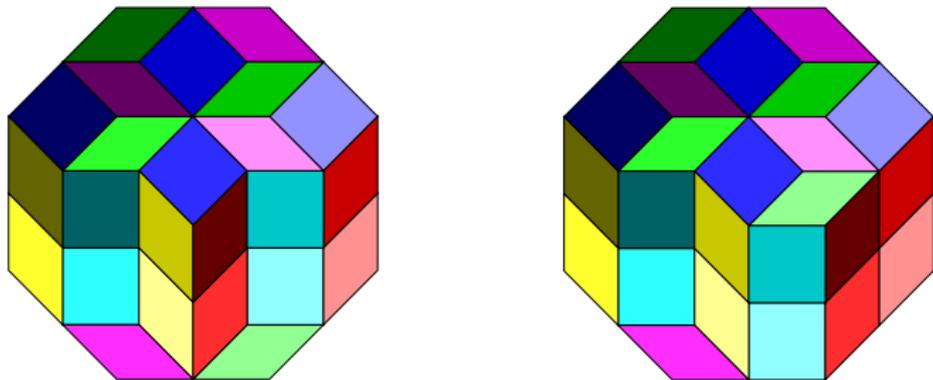
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

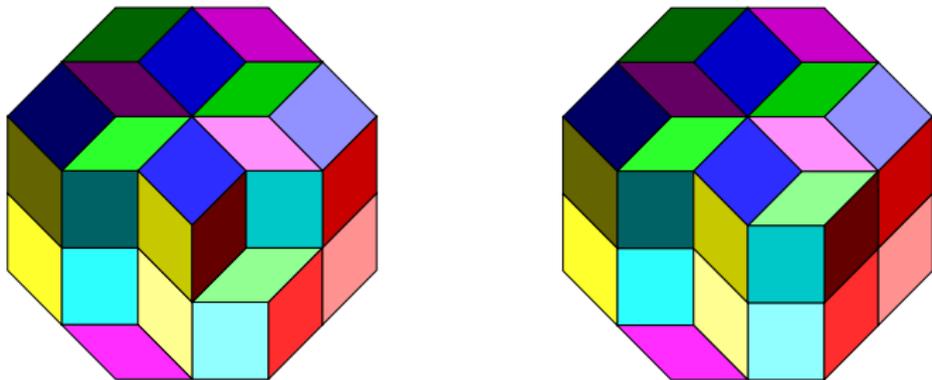
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

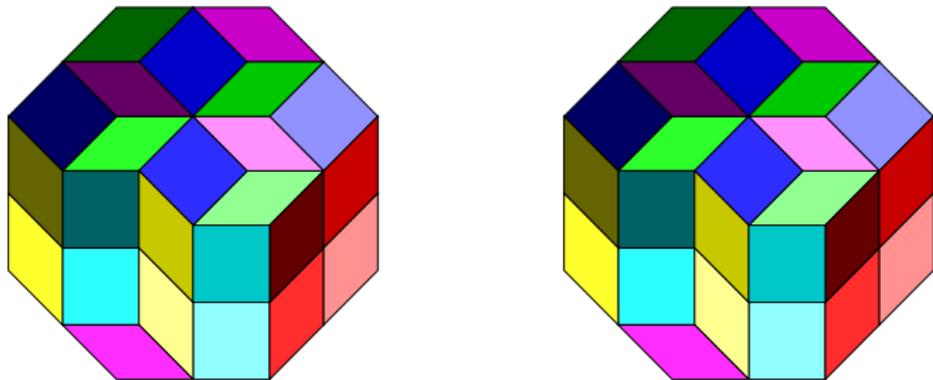
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

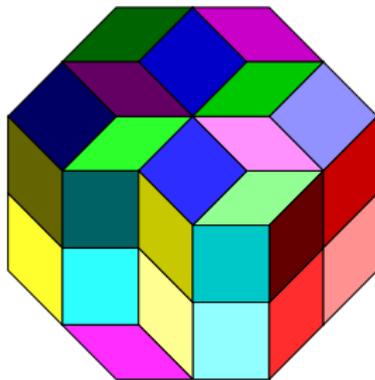
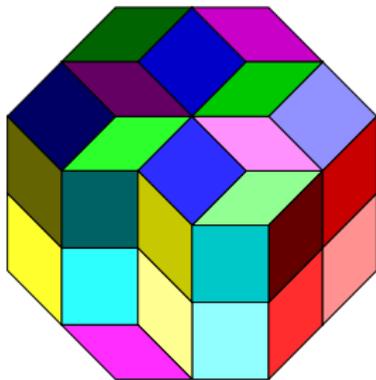
Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois.

Une propriété



Théorème (Bodini-F.-Rao-Rémila 2011)

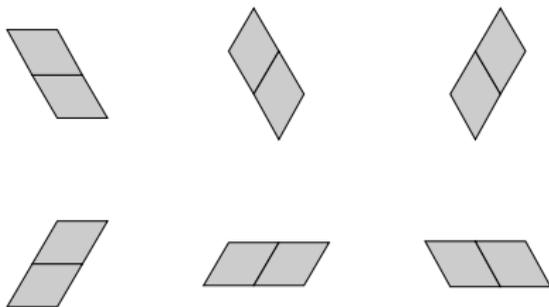
Deux pavages $4 \rightarrow 2$ d'une même région finie sont toujours reliés par une suite de flips dont chacun, repéré par les trois tuiles qu'il met en jeu, est fait au plus une fois. C'est faux pour deux $5 \rightarrow 2$.

Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?

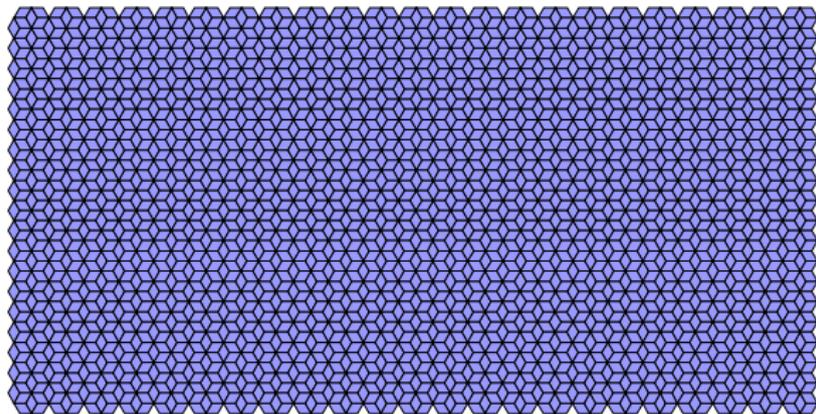
Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?



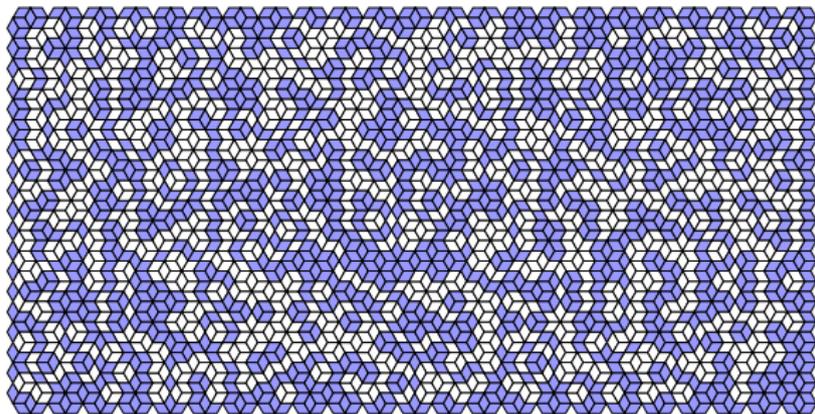
Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?



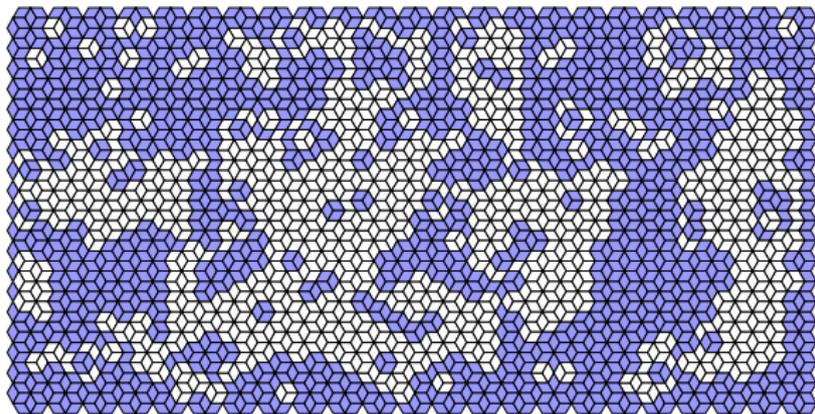
Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?



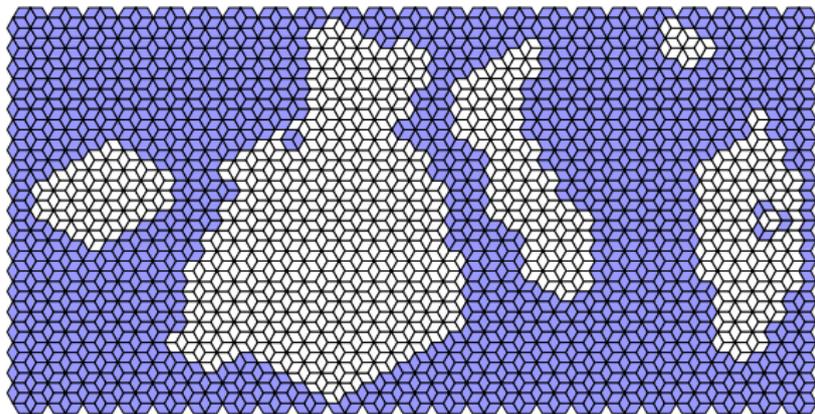
Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?



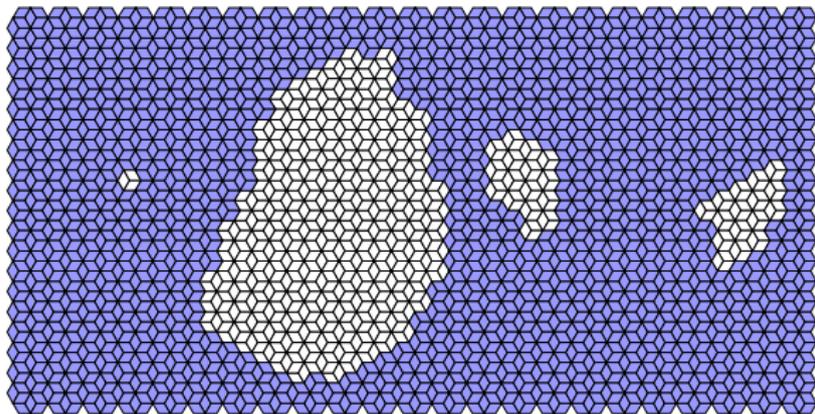
Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?



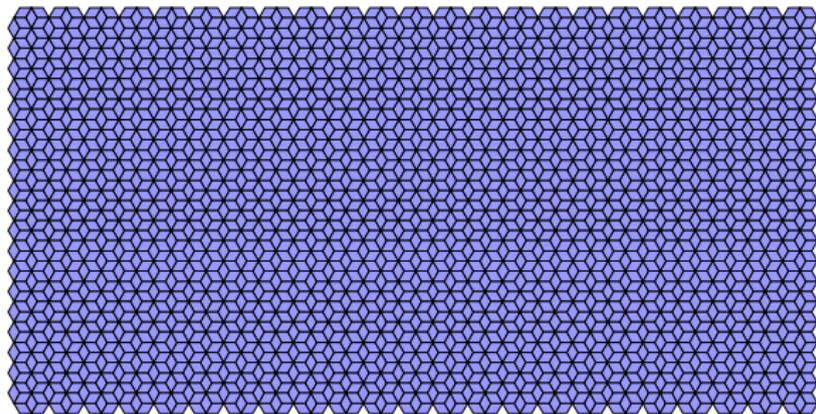
Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?



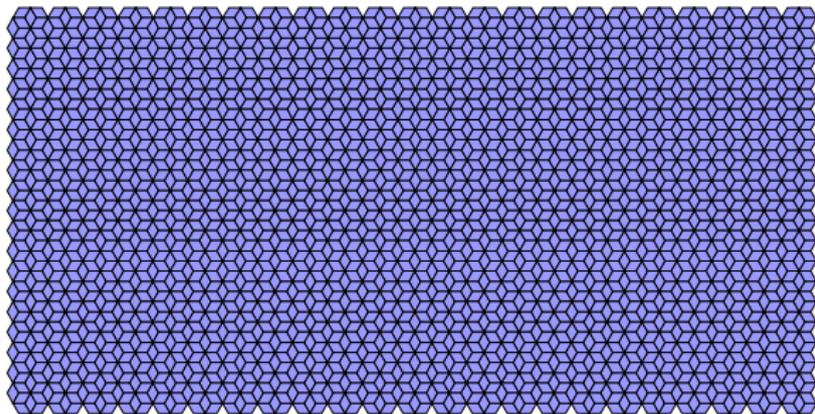
Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?



Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?

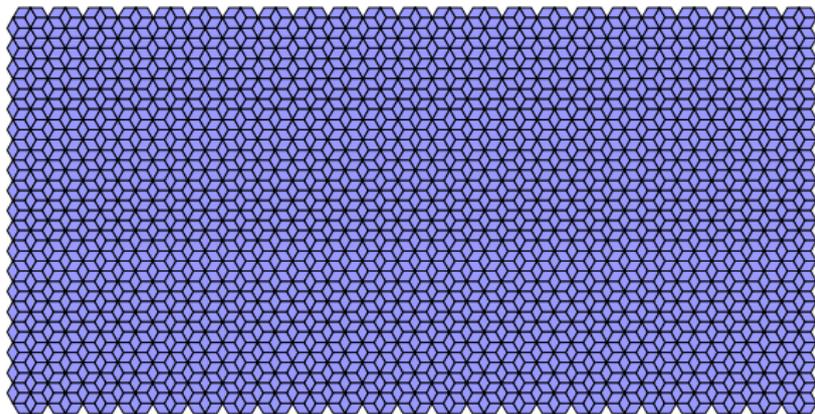


Théorème (F.-Regnault 2010)

Dans ce cas, \mathcal{M}_0 converge (si le bord le permet) en $O(n^3)$ flips.

Température zéro

\mathcal{M}_0 n'est plus ergodique. Convergence vers un pavage d'énergie 0 ?



Théorème (F.-Regnault 2010)

Dans ce cas, \mathcal{M}_0 converge (si le bord le permet) en $O(n^3)$ flips.

Conjecture

Convergence rapide sur un espace de pavages planaires de type fini.

① Puzzles

② Flips

③ Quelques techniques

- Auto-simulation
- Calcul embarqué
- Grassmanniennes
- Coïncidence
- Couplage

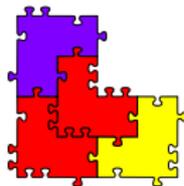
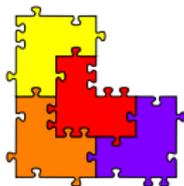
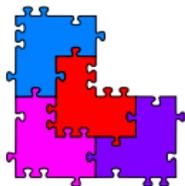
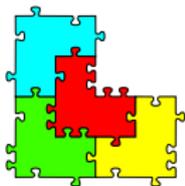
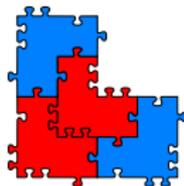
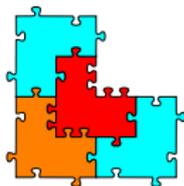
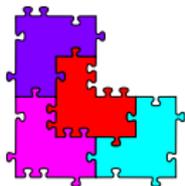
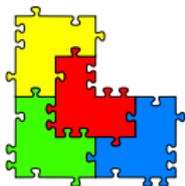
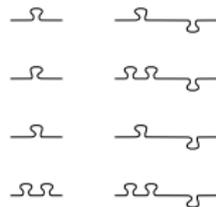
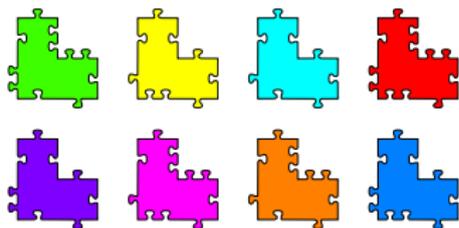
① Puzzles

② Flips

③ Quelques techniques

- Auto-simulation
- Calcul embarqué
- Grassmanniennes
- Coïncidence
- Couplage

Auto-simulation



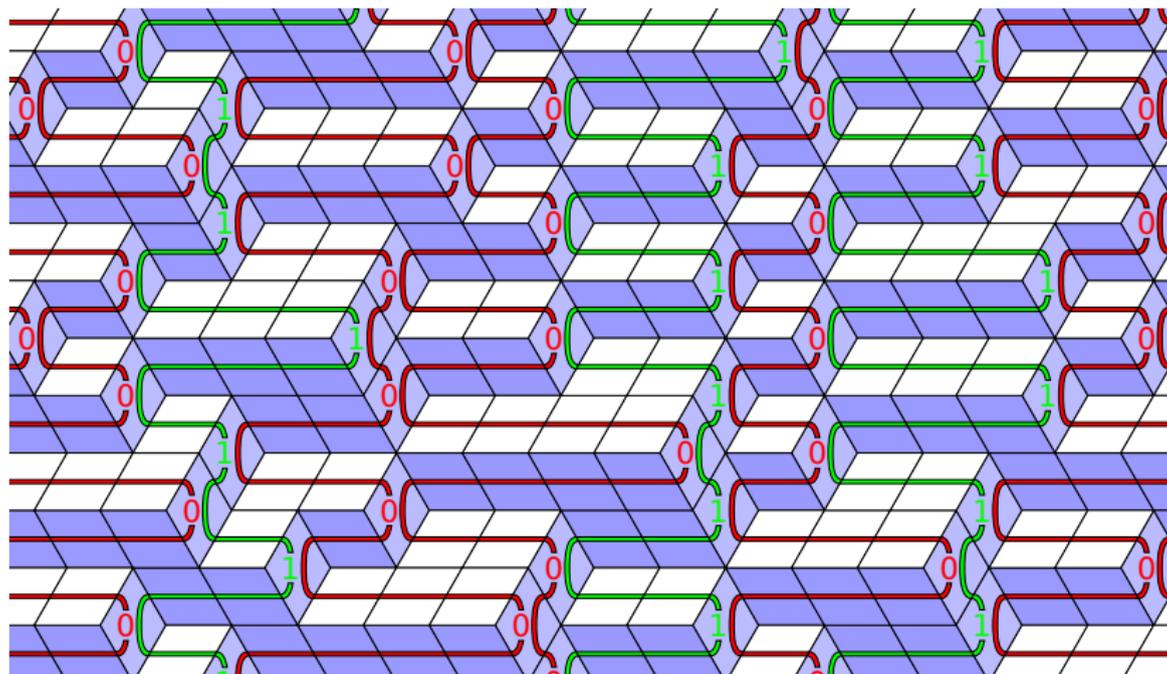
① Puzzles

② Flips

③ Quelques techniques

- Auto-simulation
- Calcul embarqué
- Grassmanniennes
- Coïncidence
- Couplage

Calcul embarqué



① Puzzles

② Flips

③ Quelques techniques

- Auto-simulation
- Calcul embarqué
- **Grassmanniennes**
- Coïncidence
- Couplage

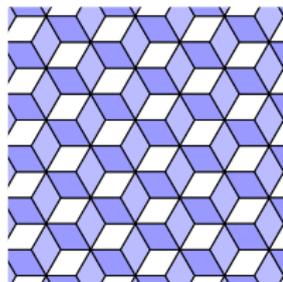
Grassmanniennes

Soit E un d -plan engendré par $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ et $M := (\vec{u}_1 | \dots | \vec{u}_d)$.
Ses **coordonnées grassmanniennes** sont les mineurs $d \times d$ de M .
À renormalisation près, elles caractérisent E . On les note $G_{i_1 i_2 \dots i_d}$.

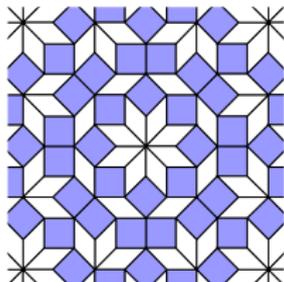
Grassmanniennes

Soit E un d -plan engendré par $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d$ et $M := (\vec{u}_1 | \dots | \vec{u}_d)$.
Ses **coordonnées grassmanniennes** sont les mineurs $d \times d$ de M .
À renormalisation près, elles caractérisent E . On les note $G_{i_1 i_2 \dots i_d}$.

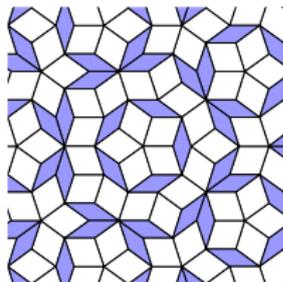
Elles donnent les proportions des tuiles des pavages de pente E :



$(1, 1, 1)$



$(1, \sqrt{2}, 1, 1, \sqrt{2}, 1)$



$(\varphi, 1, -1, -\varphi, \varphi, 1, -1, \varphi, 1, \varphi)$

\rightsquigarrow Lien entre les motifs d'un pavage et ses propriétés algébriques.

① Puzzles

② Flips

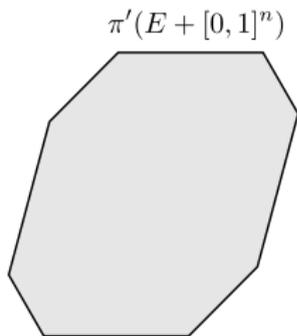
③ Quelques techniques

- Auto-simulation
- Calcul embarqué
- Grassmanniennes
- **Coïncidence**
- Couplage

Fenêtre

Fenêtre d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: projection de $[0, 1]^n$ sur E^\perp .

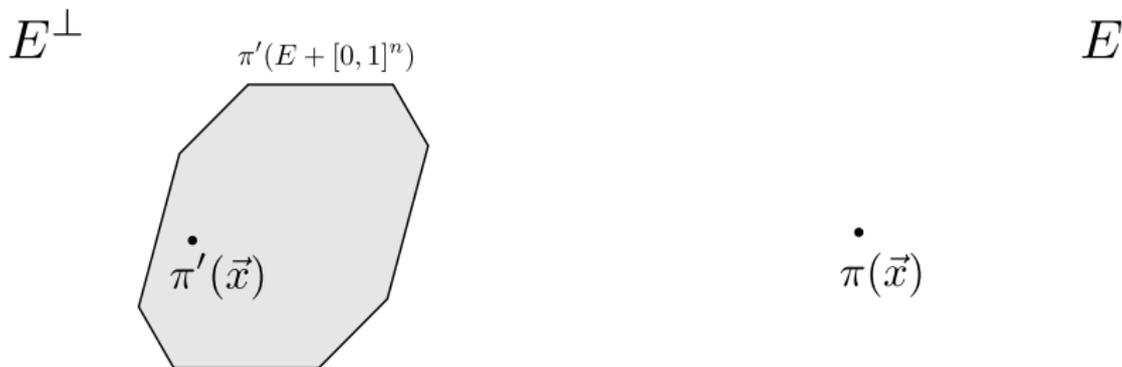
E^\perp



E

Fenêtre

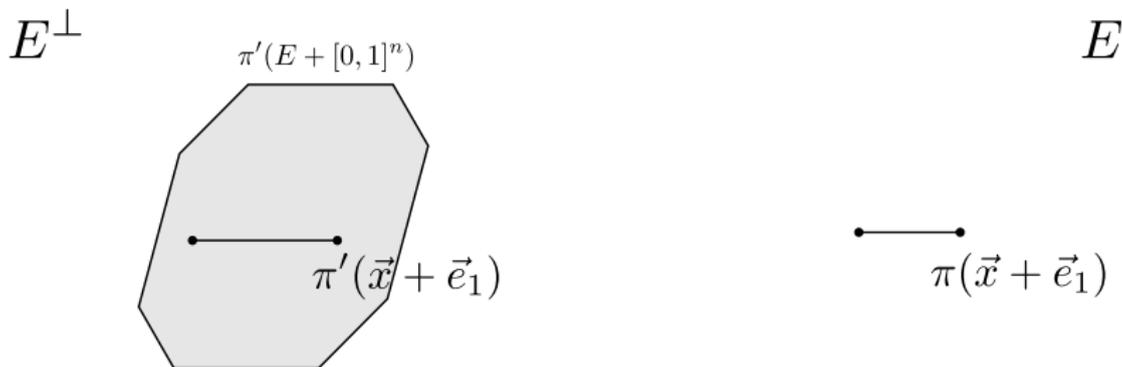
Fenêtre d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: projection de $[0, 1]^n$ sur E^\perp .



Soit $\vec{x} \in \mathbb{Z}^n \cap (E + [0, 1]^n)$, $\pi(\vec{x})$ sa projection sur E , $\pi'(\vec{x})$ sur E^\perp .

Fenêtre

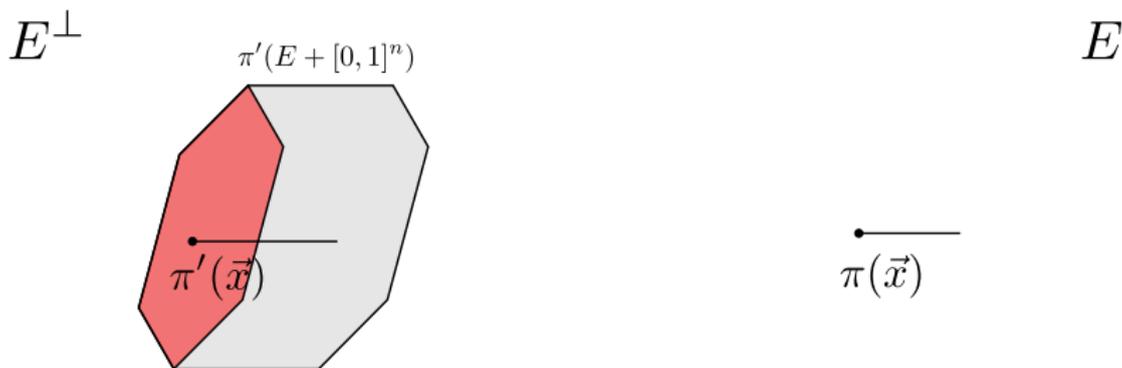
Fenêtre d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: projection de $[0, 1]^n$ sur E^\perp .



$\pi(\vec{x} + \vec{e}_1)$ sommet du pavage $\Leftrightarrow \pi'(\vec{x} + \vec{e}_1)$ est dans la fenêtre.

Fenêtre

Fenêtre d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: projection de $[0, 1]^n$ sur E^\perp .

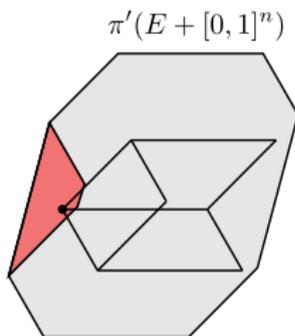


C'est le cas ssi $\pi'(\vec{x})$ est dans une région particulière de la fenêtre.

Fenêtre

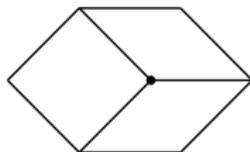
Fenêtre d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: projection de $[0, 1]^n$ sur E^\perp .

E^\perp



$\pi'(E + [0, 1]^n)$

E

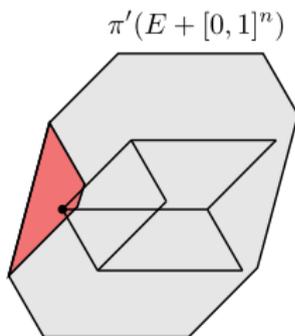


C'est général : à tout motif correspond une région de la fenêtre.

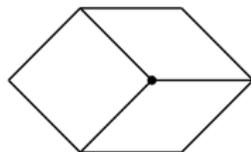
Fenêtre

Fenêtre d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: projection de $[0, 1]^n$ sur E^\perp .

E^\perp



E

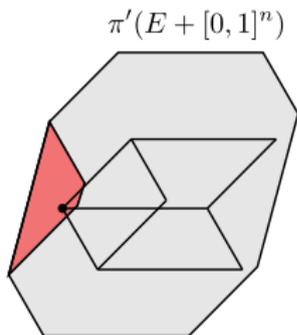


C'est général : à tout motif correspond une région de la fenêtre.
Ses bords sont des projections de faces $n - d - 1$ dim. de \mathbb{Z}^n .

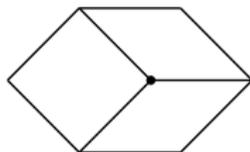
Fenêtre

Fenêtre d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: projection de $[0, 1]^n$ sur E^\perp .

E^\perp



E



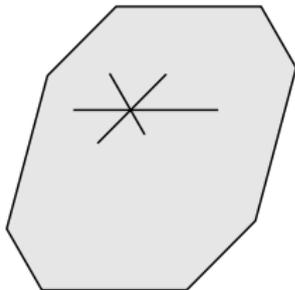
C'est général : à tout motif correspond une région de la fenêtre.
Ses bords sont des projections de faces $n - d - 1$ dim. de \mathbb{Z}^n .
Il faut au moins $n - d + 1$ telles faces pour définir une région.

Coïncidence

Coïncidence d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: $n - d + 1$ faces $n - d - 1$ dim. unités de \mathbb{Z}^n dont les projections dans la fenêtre sont concourantes.

E^\perp

$\pi'(E + [0, 1]^n)$

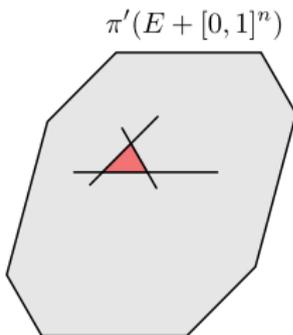


E

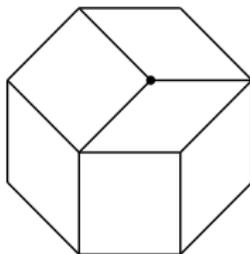
Coïncidence

Coïncidence d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: $n - d + 1$ faces $n - d - 1$ dim. unités de \mathbb{Z}^n dont les projections dans la fenêtre sont concourantes.

E^\perp



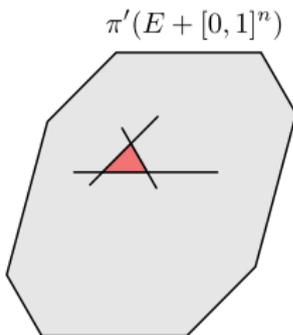
E



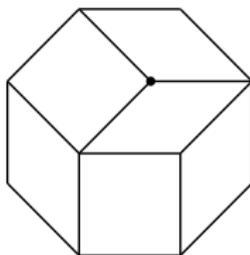
Coïncidence

Coïncidence d'un d -plan $E \subset \mathbb{R}^n$: $n - d + 1$ faces $n - d - 1$ dim. unités de \mathbb{Z}^n dont les projections dans la fenêtre sont concourantes.

E^\perp



E



Théorème (Bédaride-F. 2016)

Motifs interdits et coïncidences caractérisent les mêmes pentes.

Équation de coïncidence (1/2)

Considérons, par exemple, un plan E de \mathbb{R}^4 avec la coïncidence :

$$\vec{x}_0 = (1, r_1, 2, 5), \quad \vec{x}_1 = (2, 3, 1, r_2), \quad \vec{x}_2 = (4, 1, r_3, 2).$$

Équation de coïncidence (1/2)

Considérons, par exemple, un plan E de \mathbb{R}^4 avec la coïncidence :

$$\vec{x}_0 = (1, r_1, 2, 5), \quad \vec{x}_1 = (2, 3, 1, r_2), \quad \vec{x}_2 = (4, 1, r_3, 2).$$

Si \vec{u} et \vec{v} engendrent E , alors il existe $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ tels que

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{u} + \mu_1 \vec{v} = 0,$$

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_0 + \lambda_2 \vec{u} + \mu_2 \vec{v} = 0.$$

Équation de coïncidence (1/2)

Considérons, par exemple, un plan E de \mathbb{R}^4 avec la coïncidence :

$$\vec{x}_0 = (1, r_1, 2, 5), \quad \vec{x}_1 = (2, 3, 1, r_2), \quad \vec{x}_2 = (4, 1, r_3, 2).$$

Si \vec{u} et \vec{v} engendrent E , alors il existe $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ tels que

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_0 + \lambda_1 \vec{u} + \mu_1 \vec{v} = 0,$$

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_0 + \lambda_2 \vec{u} + \mu_2 \vec{v} = 0.$$

C'est un système linéaire surdéterminé (8 équations, 7 inconnues).
Les coordonnées de \vec{u} et \vec{v} doivent donc vérifier... une équation !

Équation de coïncidence (2/2)

Matriciellement :

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & v_3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & u_4 & v_4 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_3 & v_3 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_4 & v_4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Équation de coïncidence (2/2)

Matriciellement :

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & v_3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & u_4 & v_4 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_3 & v_3 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_4 & v_4 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Comme le noyau contient la coïncidence, le déterminant est nul :

$$3G_{12}G_{13} - G_{12}G_{14} - 2G_{13}G_{14} - 3G_{13}G_{24} + G_{14}G_{23} = 0.$$

Équation algébrique homogène de degré $n - d$ sur les grassmanniennes.

① Puzzles

② Flips

③ Quelques techniques

- Auto-simulation
- Calcul embarqué
- Grassmanniennes
- Coïncidence
- Couplage

Couplage

Couplage d'une chaîne de Markov P : X_t et Y_t suivant la loi P .

Coalescence :

$$T := \max_{x,y \in \Omega} \min\{t : X_t = Y_t \mid (X_0, Y_0) = (x, y)\}.$$

Theorème

$$\tau_{\text{mix}} \leq 4\mathbb{E}(T).$$

Couplage

Couplage d'une chaîne de Markov P : X_t et Y_t suivant la loi P .

Coalescence :

$$T := \max_{x,y \in \Omega} \min\{t : X_t = Y_t \mid (X_0, Y_0) = (x, y)\}.$$

Theorème

$$\tau_{\text{mix}} \leq 4\mathbb{E}(T).$$

Comment corréler X_t et Y_t pour coalescer "vite" (et le prouver) ?

Une parabole

Un homme prend le train de banlieue allant de Moscou à Petouchki. Il se met à boire plus que de raison. Sa deuxième bouteille de vodka arrive à sa fin qu'il n'est toujours pas arrivé et se demande où il est. Mais deux bouteilles n'ont pas dû lui laisser le temps de se perdre bien loin : il doit être plus ou moins entre Moscou et Petouchki.

Une parabole

Un homme prend le train de banlieue allant de Moscou à Petouchki. Il se met à boire plus que de raison. Sa deuxième bouteille de vodka arrive à sa fin qu'il n'est toujours pas arrivé et se demande où il est. Mais deux bouteilles n'ont pas dû lui laisser le temps de se perdre bien loin : il doit être plus ou moins entre Moscou et Petouchki.

Question : Quand se rend-t-il compte qu'il est vraiment perdu ?

Une parabole

Un homme prend le train de banlieue allant de Moscou à Petouchki. Il se met à boire plus que de raison. Sa deuxième bouteille de vodka arrive à sa fin qu'il n'est toujours pas arrivé et se demande où il est. Mais deux bouteilles n'ont pas dû lui laisser le temps de se perdre bien loin : il doit être plus ou moins entre Moscou et Petouchki.

Question : Quand se rend-t-il compte qu'il est vraiment perdu ?

Réponse : Quand il rencontre un professeur sorti d'un pot d'HDR bien arrosé et qui pense, lui, être entre Villetaneuse et Gare du Nord.

① Puzzles

② Flips

③ Quelques techniques

Quelques perspectives

- 1 Quels espaces de type fini sont formés de pavages planaires ?
- 2 Quid du paramètre d'épaisseur (type fini ou sofique) ?
- 3 Coupe et projection : au delà du cas canonique ?
- 4 Mélange à $T = \infty$ pour les coupes $n \rightarrow 2$?
- 5 Mélange à $T = 0$ pour les pavages planaires de type fini ?
- 6 Une graine pour éviter les déceptions (Ilya Galanov) ?
- 7 Pavages d'entropie maximale ?
- 8 Au delà de la coupe et projection (Alexandra Ugolnikova).
- 9 Mettre les mains dans le cambouis (quasicristaux).
- 10 Temps de mélange en analyse d'algorithmes probabilistes.