

Flips contextuels

Thomas Fernique

Institut Élie Cartan de Nancy
13 octobre 2016

1 Exemple 1

2 Objectifs

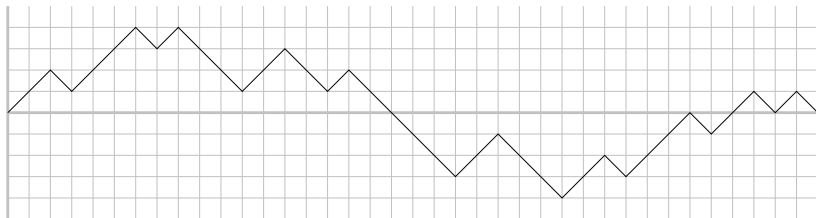
3 Motivation

4 Exemple 2

- ① Exemple 1
- ② Objectifs
- ③ Motivation
- ④ Exemple 2

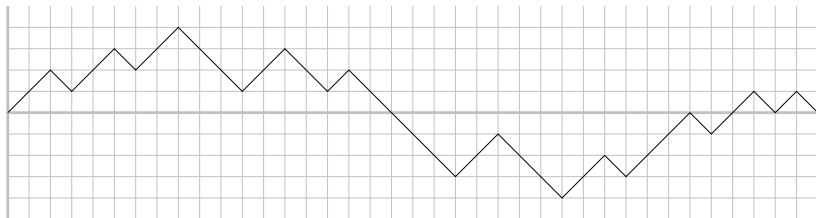
Flips sur des ponts

Pont : mot sur $\{a, b\}$ avec autant de a que de b . Visuellement :



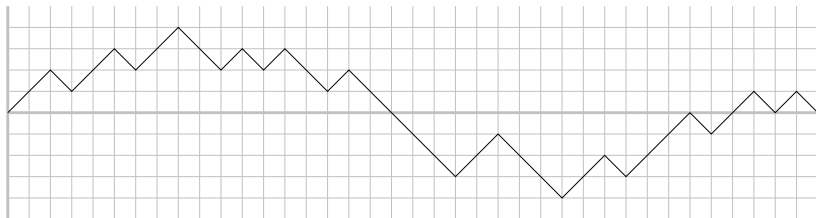
Flips sur des ponts

Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Flips sur des ponts

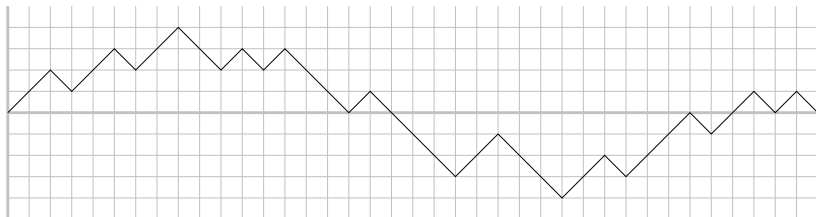
Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Choix aléatoire des positions et directions \rightsquigarrow chaîne de Markov.

Flips sur des ponts

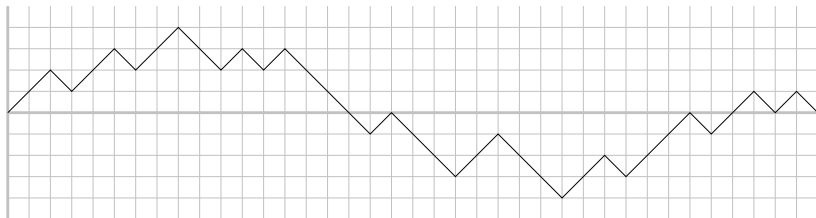
Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Choix aléatoire des positions et directions \rightsquigarrow chaîne de Markov.

Flips sur des ponts

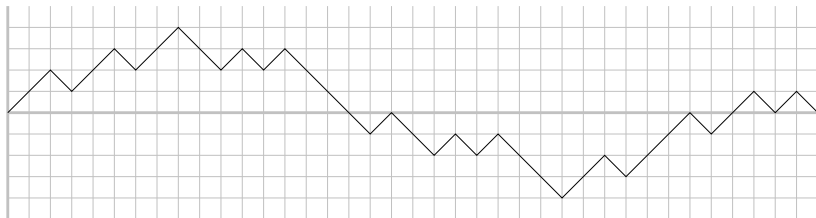
Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Choix aléatoire des positions et directions \rightsquigarrow chaîne de Markov.

Flips sur des ponts

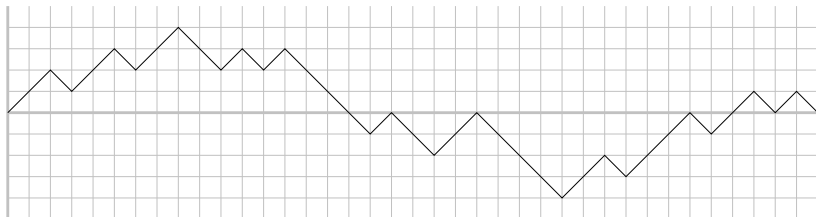
Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Choix aléatoire des positions et directions \rightsquigarrow chaîne de Markov.

Flips sur des ponts

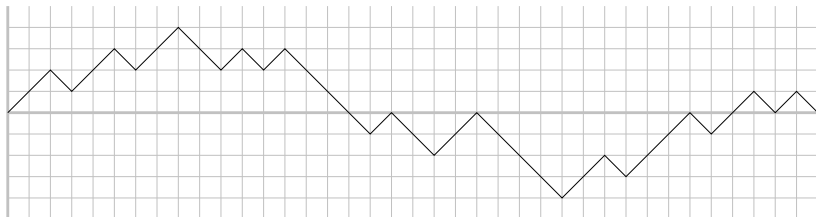
Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Choix aléatoire des positions et directions \rightsquigarrow chaîne de Markov.

Flips sur des ponts

Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Choix aléatoire des positions et directions \rightsquigarrow chaîne de Markov.

Convergence exponentielle vers la distribution uniforme : content ?

Convergence

Problème : la base de l'exponentielle dépend de la taille du pont !

$$\text{Temps de mélange } \tau : \min \left\{ t \mid \max_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Convergence

Problème : la base de l'exponentielle dépend de la taille du pont !

$$\text{Temps de mélange } \tau : \min \left\{ t \mid \max_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Théorème [D. B. Wilson, 2004]

Pour les ponts de taille n : $\tau = \Theta(n^3 \log(n))$.

Convergence

Problème : la base de l'exponentielle dépend de la taille du pont !

$$\text{Temps de mélange } \tau : \min \left\{ t \mid \max_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Théorème [D. B. Wilson, 2004]

Pour les ponts de taille n : $\tau = \Theta(n^3 \log(n))$.

Déterminer le trou spectral de la matrice P : bonne chance !

Convergence

Problème : la base de l'exponentielle dépend de la taille du pont !

$$\text{Temps de mélange } \tau : \min \left\{ t \mid \max_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Théorème [D. B. Wilson, 2004]

Pour les ponts de taille n : $\tau = \Theta(n^3 \log(n))$.

Alternative : borner le *temps de coalescence* d'un *couplage*.

Convergence

Problème : la base de l'exponentielle dépend de la taille du pont !

$$\text{Temps de mélange } \tau : \min \left\{ t \mid \max_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} |P^t(x, y) - \pi(y)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Théorème [D. B. Wilson, 2004]

Pour les ponts de taille n : $\tau = \Theta(n^3 \log(n))$.

Alternative : borner le *temps de coalescence* d'un *couplage*.

Pour cela : introduire une métrique φ adaptée, *i.e.*, contractante.

Preuve de Wilson

Métrique :

$$\varphi(w, w') := \sum_{k=0}^n |h(w_1 \cdots w_k) - h(w'_1 \cdots w'_k)| \cos \left[\pi \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2} \right) \right],$$

où $h(v) := |v|_a - |v|_b$.

Preuve de Wilson

Métrique :

$$\varphi(w, w') := \sum_{k=0}^n |h(w_1 \cdots w_k) - h(w'_1 \cdots w'_k)| \cos \left[\pi \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2} \right) \right],$$

où $h(v) := |v|_a - |v|_b$.

Contraction :

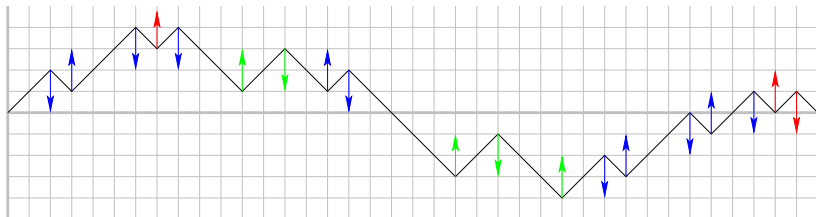
$$\mathbb{E}(\varphi(X_{t+1}, Y_{t+1}) | (X_t, Y_t) = (x, y)) = (1 - \beta)\varphi(x, y),$$

pour x et y t.q. $h(x_1 \cdots x_k) \leq h(y_1 \cdots y_k)$ pour tout k , avec

$$\beta = \frac{1 - \cos(\pi/n)}{n-1} \geq \frac{\pi^2}{2n^3}.$$

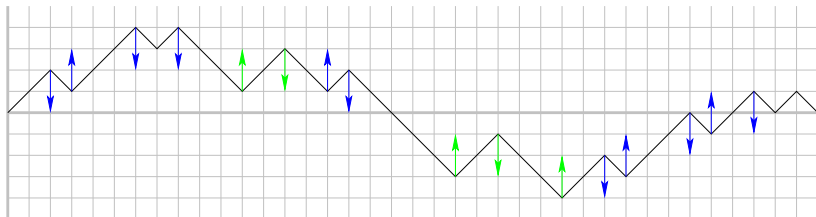
Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



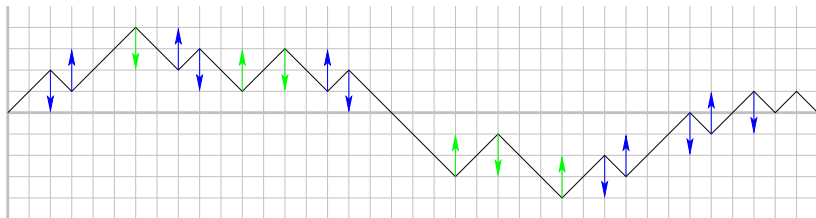
Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



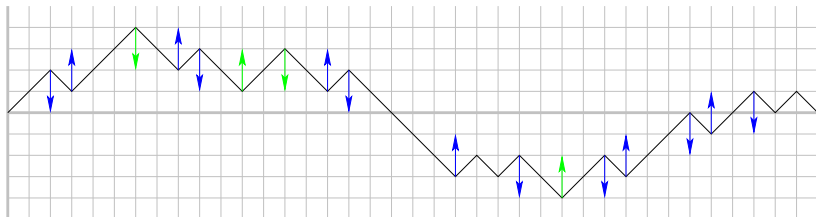
Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



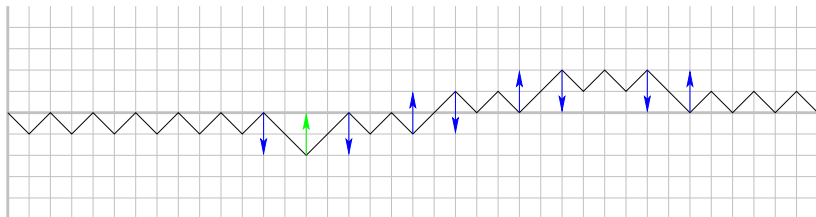
Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



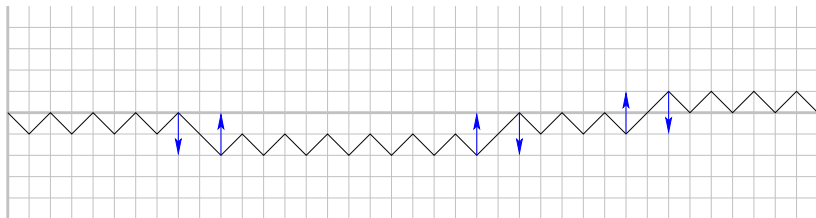
Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



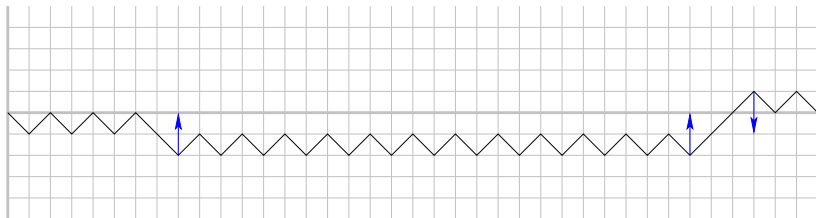
Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



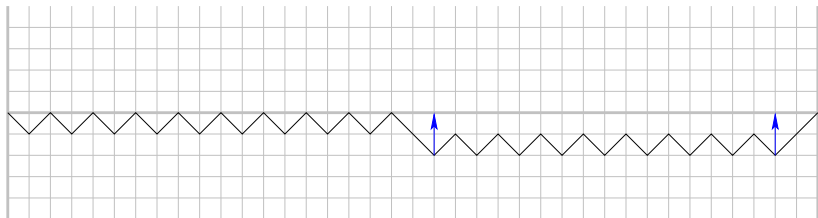
Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



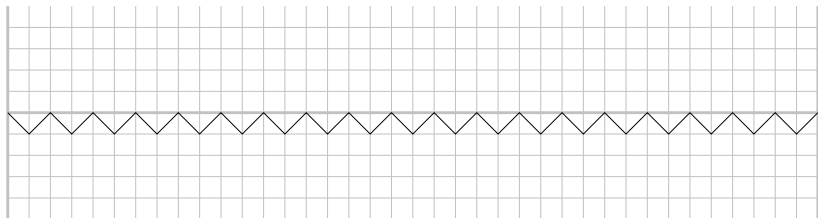
Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



Flips contextuels

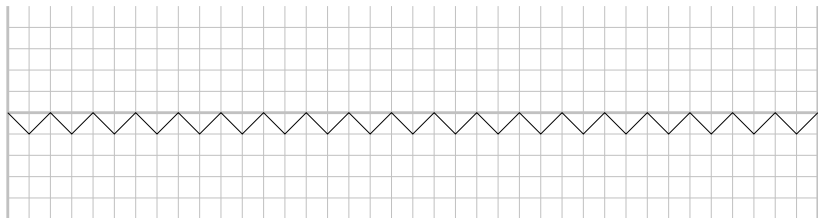
On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.



Convergence exponentielle vers la configuration $\cdots xyxyxy \cdots$.

Flips contextuels

On interdit $xyxy \rightarrow xyxy$: $E(w) := \#\{xx \triangleleft w\}$ n'augmente pas.

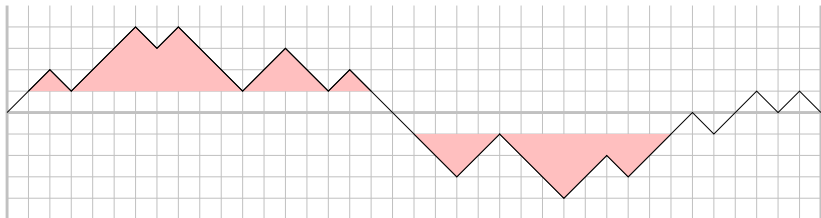


Convergence exponentielle vers la configuration $\cdots xyxyxy \cdots$.

Théorème [Bodini-F.-Regnault, 2010]

Pour les ponts de taille n : $\tau = O(n^4)$.

Preuve



Métrieque :

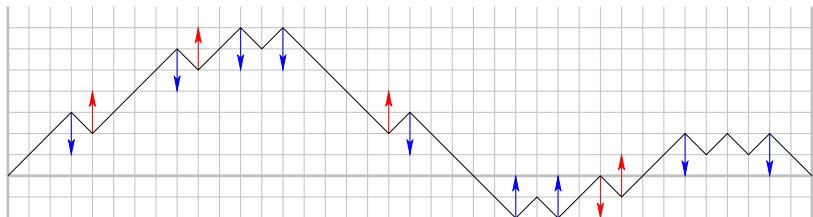
$$\varphi_\alpha(w) := \sum_{v \in S(w)} (1 + |v|_a)^\alpha,$$

où $S(w)$ sont les “tranches” de w et $\alpha \in]0, 1[$.

Contraction :

$$\mathbb{E}(\varphi_\alpha(X_{t+1}) - \varphi_\alpha(X_t) | X_t) \leq -\alpha(1 - \alpha)n^{\alpha-2}.$$

Preuve



Métrieque :

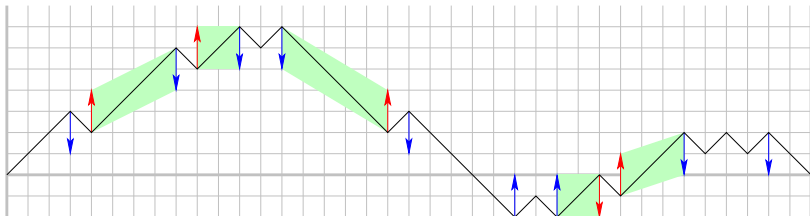
$$\varphi_\alpha(w) := \sum_{v \in S(w)} (1 + |v|_a)^\alpha,$$

où $S(w)$ sont les “tranches” de w et $\alpha \in]0, 1[$.

Contraction :

$$\mathbb{E}(\varphi_\alpha(X_{t+1}) - \varphi_\alpha(X_t) | X_t) \leq -\alpha(1 - \alpha)n^{\alpha-2}.$$

Preuve



Métrie :

$$\varphi_\alpha(w) := \sum_{v \in S(w)} (1 + |v|_a)^\alpha,$$

où $S(w)$ sont les “tranches” de w et $\alpha \in]0, 1[$.

Contraction :

$$\mathbb{E}(\varphi_\alpha(X_{t+1}) - \varphi_\alpha(X_t) | X_t) \leq -\alpha(1 - \alpha)n^{\alpha-2}.$$

Preuve



Métrieque :

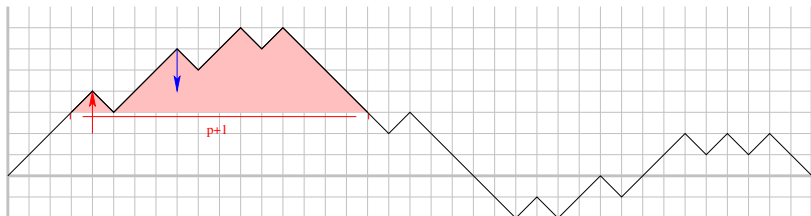
$$\varphi_\alpha(w) := \sum_{v \in S(w)} (1 + |v|_a)^\alpha,$$

où $S(w)$ sont les “tranches” de w et $\alpha \in]0, 1[$.

Contraction :

$$\mathbb{E}(\varphi_\alpha(X_{t+1}) - \varphi_\alpha(X_t) | X_t) \leq -\alpha(1 - \alpha)n^{\alpha-2}.$$

Preuve



Métrie :

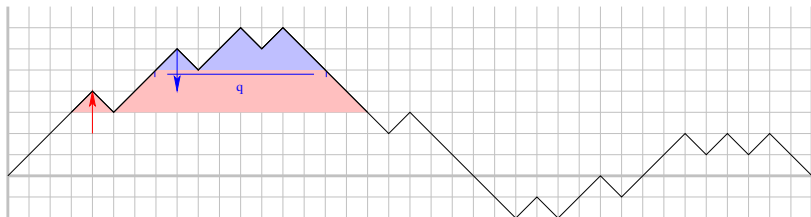
$$\varphi_\alpha(w) := \sum_{v \in S(w)} (1 + |v|_a)^\alpha,$$

où $S(w)$ sont les “tranches” de w et $\alpha \in]0, 1[$.

Contraction :

$$\mathbb{E}(\varphi_\alpha(X_{t+1}) - \varphi_\alpha(X_t) | X_t) \leq -\alpha(1 - \alpha)n^{\alpha-2}.$$

Preuve



Métrieque :

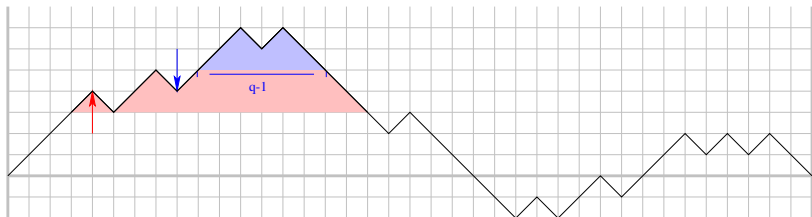
$$\varphi_\alpha(w) := \sum_{v \in S(w)} (1 + |v|_a)^\alpha,$$

où $S(w)$ sont les “tranches” de w et $\alpha \in]0, 1[$.

Contraction :

$$\mathbb{E}(\varphi_\alpha(X_{t+1}) - \varphi_\alpha(X_t) | X_t) \leq -\alpha(1 - \alpha)n^{\alpha-2}.$$

Preuve



Métrique :

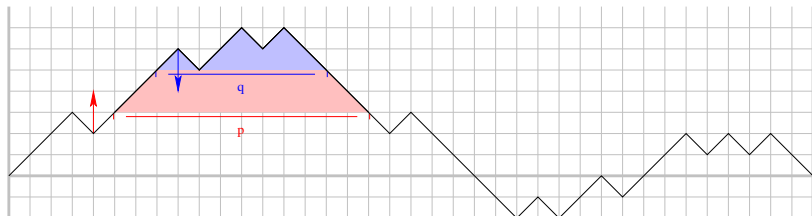
$$\varphi_\alpha(w) := \sum_{v \in S(w)} (1 + |v|_a)^\alpha,$$

où $S(w)$ sont les “tranches” de w et $\alpha \in]0, 1[$.

Contraction :

$$\mathbb{E}(\varphi_\alpha(X_{t+1}) - \varphi_\alpha(X_t) | X_t) \leq -\alpha(1 - \alpha)n^{\alpha-2}.$$

Preuve



Métrique :

$$\varphi_\alpha(w) := \sum_{v \in S(w)} (1 + |v|_a)^\alpha,$$

où $S(w)$ sont les “tranches” de w et $\alpha \in]0, 1[$.

Contraction :

$$\mathbb{E}(\varphi_\alpha(X_{t+1}) - \varphi_\alpha(X_t) | X_t) \leq -\alpha(1 - \alpha)n^{\alpha-2}.$$

1 Exemple 1

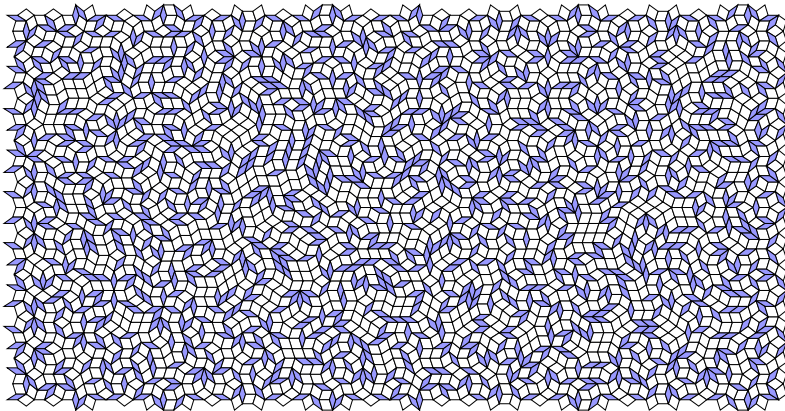
2 Objectifs

3 Motivation

4 Exemple 2

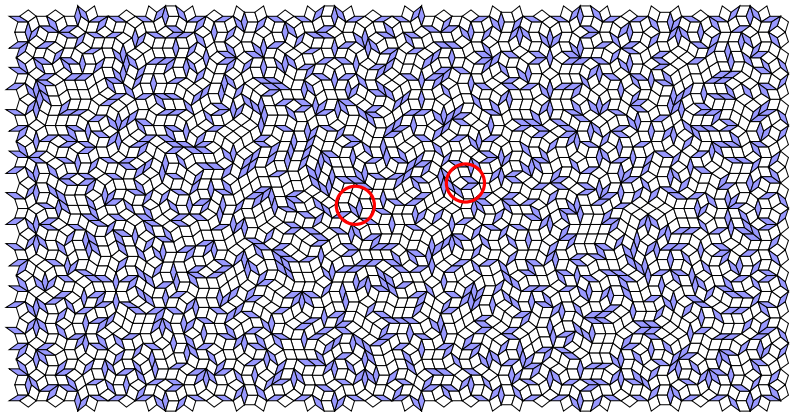
Pavages par losanges

n vecteurs deux-à-deux non-colinéaires $\rightsquigarrow \binom{n}{2}$ losanges \rightsquigarrow pavage.



Flips

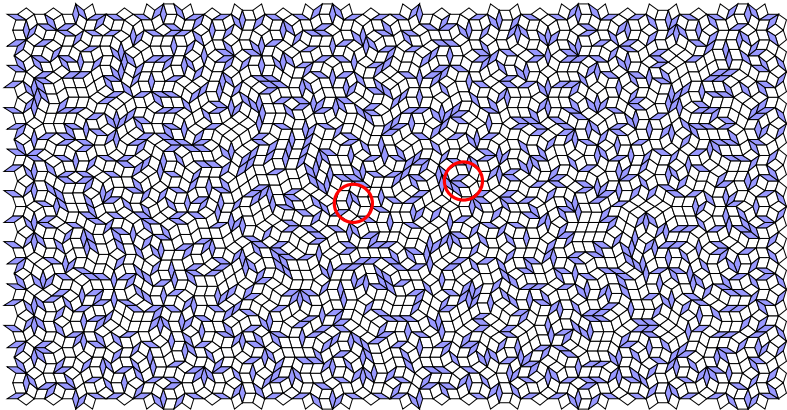
Flip : rotation d'un hexagone formé par trois losanges.



Convergence exponentielle vers la distribution uniforme. Mélange ?

Flips

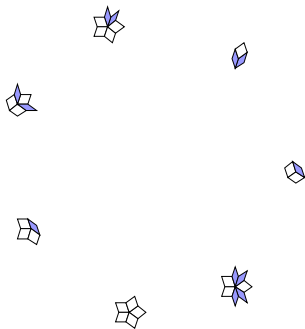
Flip : rotation d'un hexagone formé par trois losanges.



Convergence exponentielle vers la distribution uniforme. Mélange ?

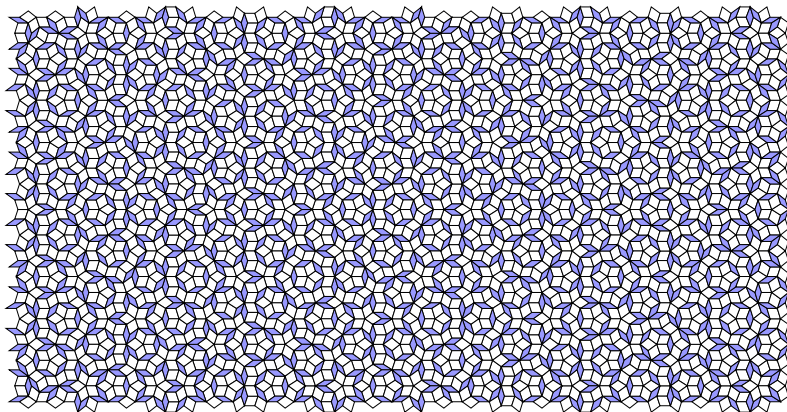
Motifs interdits (1)

Motifs interdits (ou permis) \rightsquigarrow espace de pavages (*sous-shift*).



Motifs interdits (1)

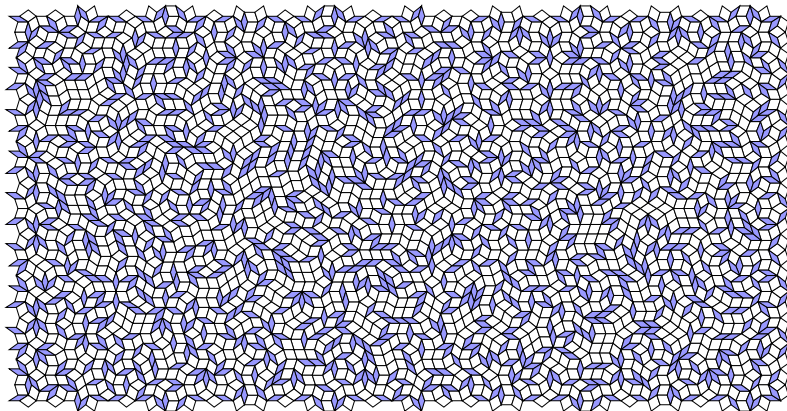
Motifs interdits (ou permis) \rightsquigarrow espace de pavages (*sous-shift*).



Un nombre fini de motifs peut (parfois) forcer l'apériodicité !

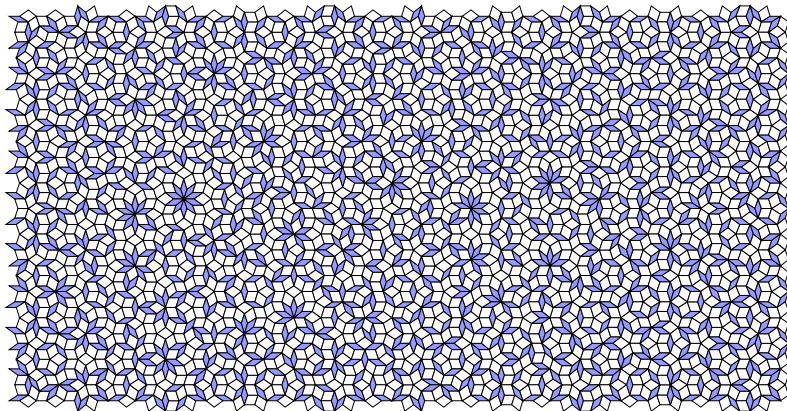
Flips contextuels

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



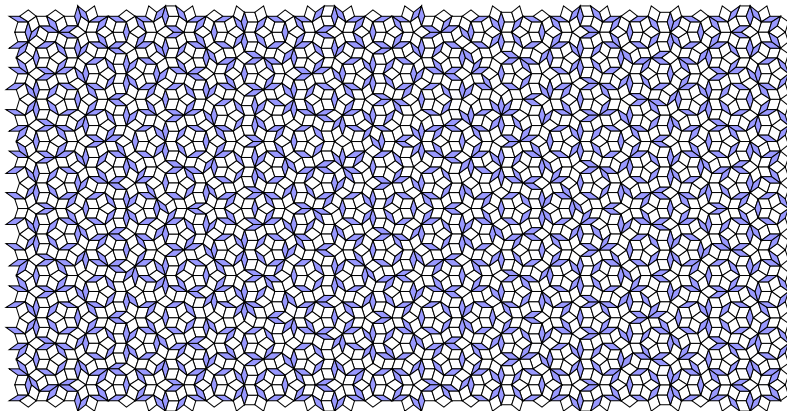
Flips contextuels

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



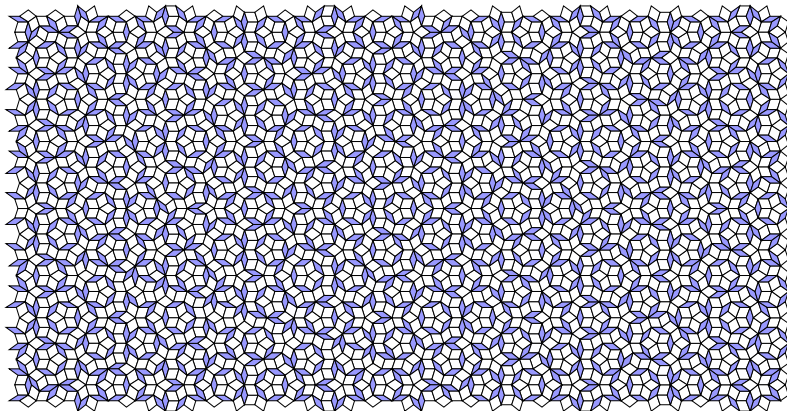
Flips contextuels

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



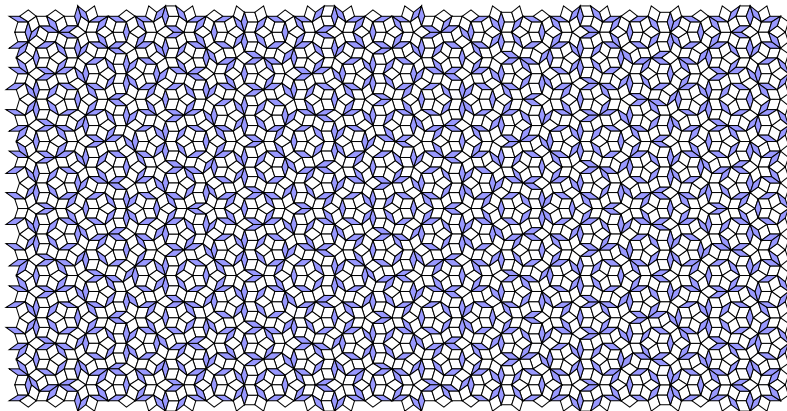
Flips contextuels

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



Flips contextuels

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



Convergence vers un pavage sans motif interdit ? Mélange ?

Motifs interdits (2)

Pavage plan : son **relevé** reste à distance bornée d'un plan de \mathbb{R}^n .
C'est un pavage avec "ordre à grande portée" (long range order).

Motifs interdits (2)

Pavage plan : son **relevé** reste à distance bornée d'un plan de \mathbb{R}^n .
C'est un pavage avec "ordre à grande portée" (long range order).

Théorème [F.-Sablik 2012–...]

Caractérisation computationnelle des pavages plans de type sofique.

Théorème [Bédaride-F. 2011–...]

Caractérisation algébrique des pavages plans de type fini.

Motifs interdits (2)

Pavage plan : son **relevé** reste à distance bornée d'un plan de \mathbb{R}^n .
C'est un pavage avec "ordre à grande portée" (long range order).

Théorème [F.-Sablik 2012–...]

Caractérisation computationnelle des pavages plans de type sofique.

Théorème [Bédaride-F. 2011–...]

Caractérisation algébrique des pavages plans de type fini.

Question : temps de mélange pour les flips (contextuels ou pas) ?

1 Exemple 1

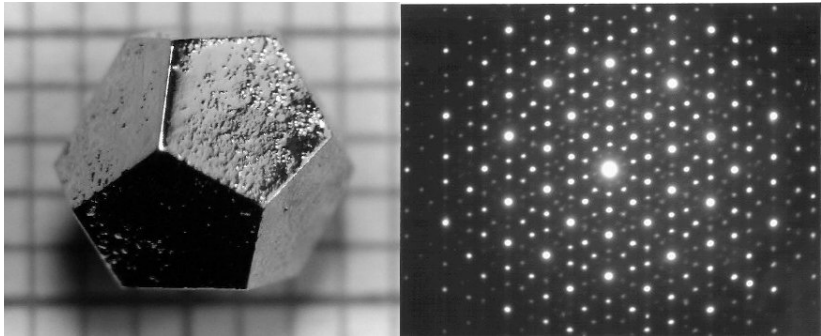
2 Objectifs

3 Motivation

4 Exemple 2

Quasicristaux

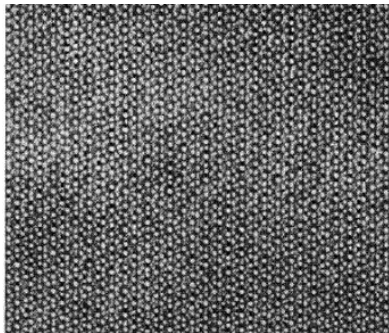
Quasicristal (1982/92) : matériau a périodique ordonné.



Modélisation par pavages pour expliquer structure et formation.

Energie minimale

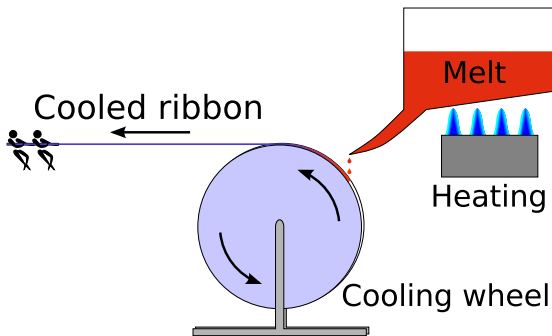
Minimiser $F = E - TS$ à $T = 0 \Leftrightarrow$ minimiser l'énergie E .



Explique structure, mais problème de formation (puzzle difficile).

Entropie maximale

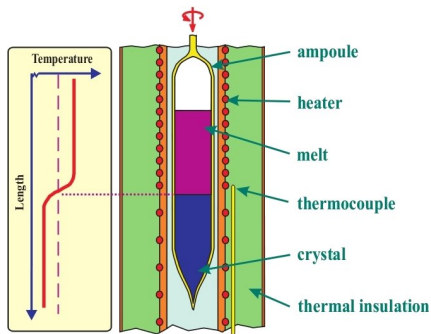
Minimiser $F = E - TS$ à T grande \Leftrightarrow maximiser l'entropie S .



Expliquerait formation et structure, mais problème de qualité.

Refroidissement

Procédé industriel actuel : refroidir lentement.



Dans le tube : transformations locales ressemblant à des flips.

Problèmes théoriques

- 1 Quels sont les pavages d'entropie maximale ?
- 2 Comment assembler un pavage d'entropie maximale ?
- 3 Quels sont les pavages d'énergie minimale ?
- 4 À quelles conditions sont-ils apériodiques ?
- 5 Comment "bien refroidir" un pavage ?
- 6 ...

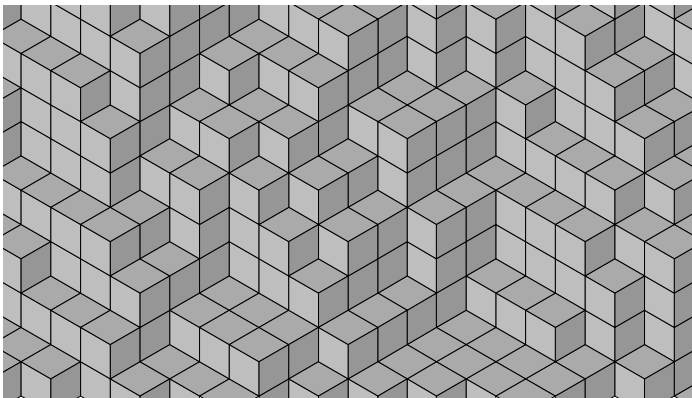
1 Exemple 1

2 Objectifs

3 Motivation

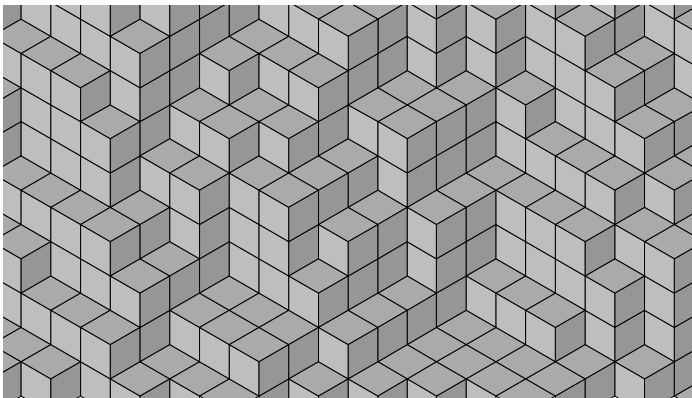
4 Exemple 2

Flips sur les dimères



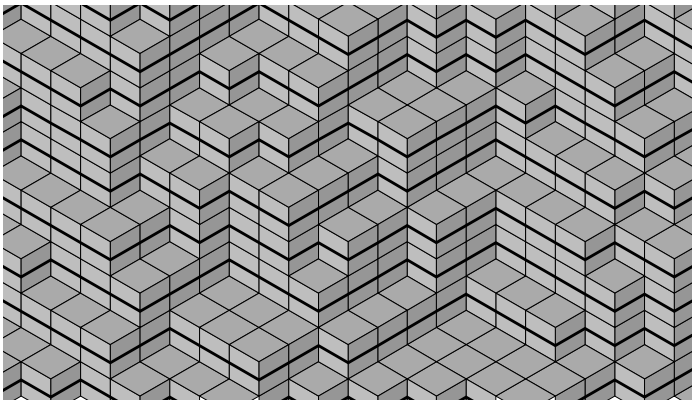
Pavages par losanges pour $n = 3$. Flip : ajout/retrait d'un cube.

Flips sur les dimères



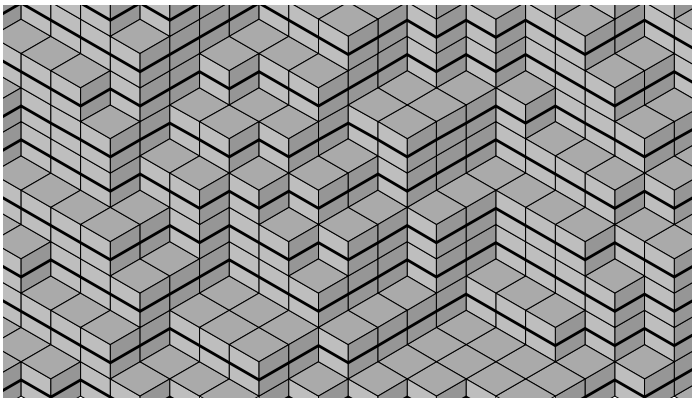
Pavages par losanges pour $n = 3$. Flip : ajout/retrait d'un cube.

Sans contexte (Luby-Randall-Sinclair, 2001)



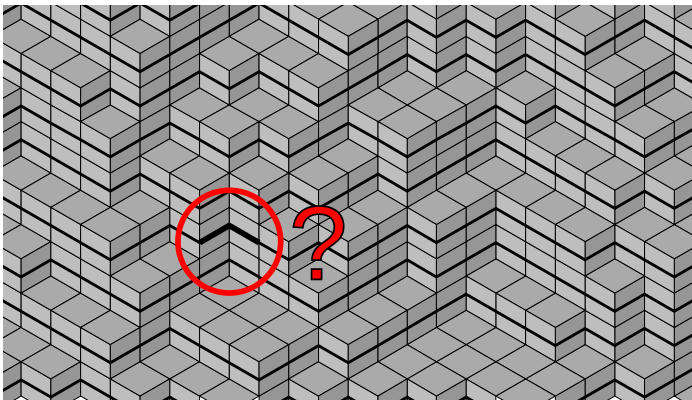
Idée 1 : découper en bandes, appliquer sur chacune ce qu'on a vu.

Sans contexte (Luby-Randall-Sinclair, 2001)



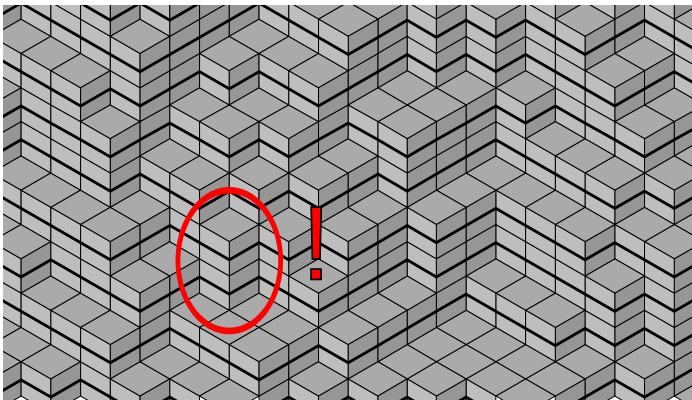
Idée 1 : découper en bandes, appliquer sur chacune ce qu'on a vu.

Sans contexte (Luby-Randall-Sinclair, 2001)



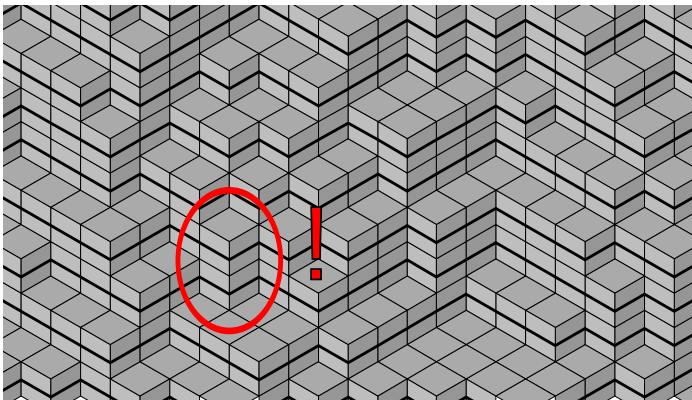
Problème : les bandes ne sont pas indépendantes !

Sans contexte (Luby-Randall-Sinclair, 2001)



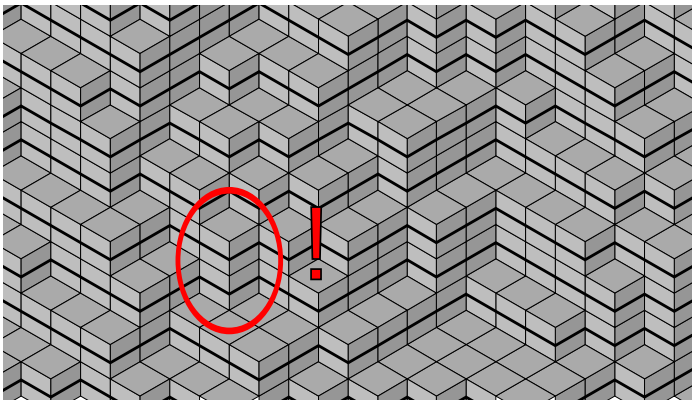
Idée 2 : flipper k bandes liées avec probabilité $1/k$ (tour de flips).

Sans contexte (Luby-Randall-Sinclair, 2001)



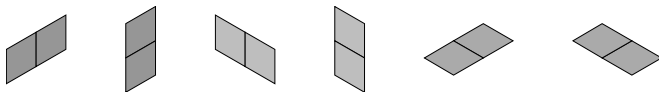
Propriété 1 : la contraction moyenne sur les bandes est préservée.

Sans contexte (Luby-Randall-Sinclair, 2001)



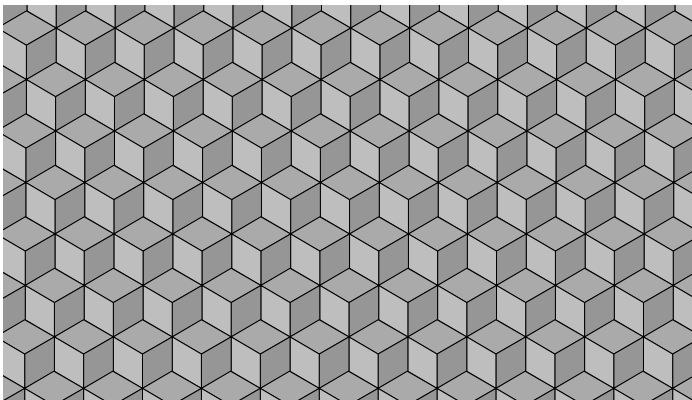
Propriété 2 : le temps de mélange est multiplié par au plus \sqrt{n} .

Avec contexte



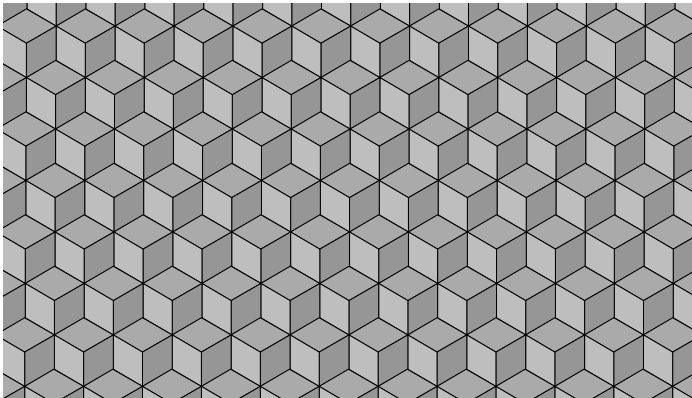
Interdisons par exemple deux faces identiques adjacentes.

Avec contexte



Problème : ces motifs interdits caractérisent un pavage périodique.

Avec contexte



Excuse : c'est difficile de faire mieux pour les dimères.

Convergence

Propriété : la convergence est possible.

Remarque : ça n'a rien d'évident en général (autres motifs, $n > 3$).

Convergence

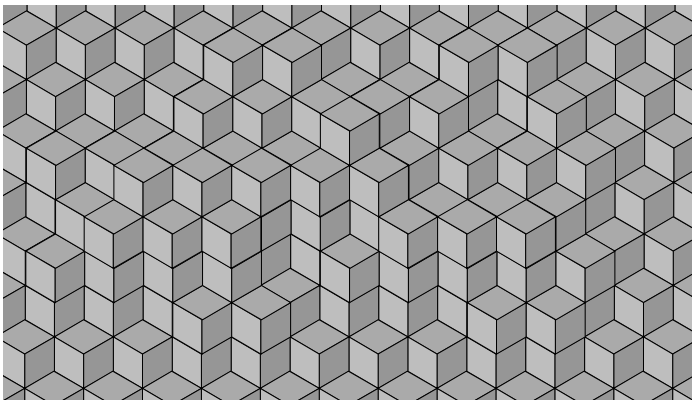
Propriété : la convergence est possible.

Remarque : ça n'a rien d'évident en général (autres motifs, $n > 3$).

Theorem (F.-Regnault, 2010)

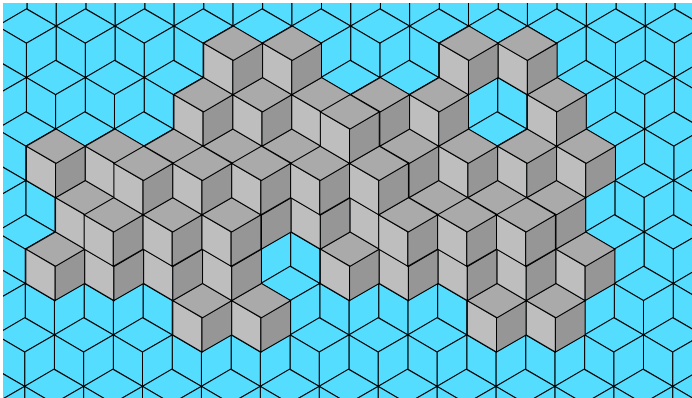
Pour un pavage avec n losanges : $\tau = O(n^2\sqrt{n})$.

Preuve



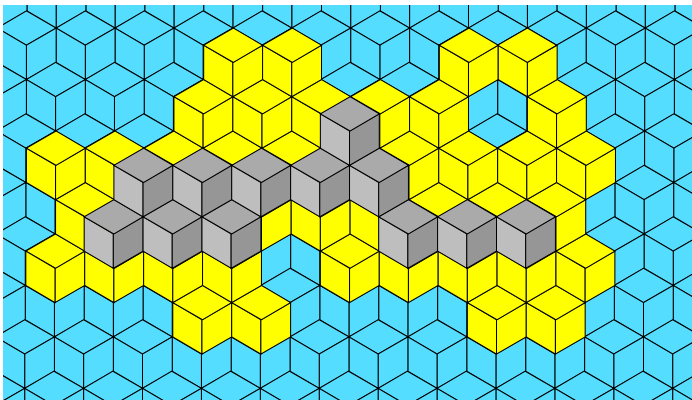
On colorie selon l'altitude : mer, plage, forêt. . .

Preuve



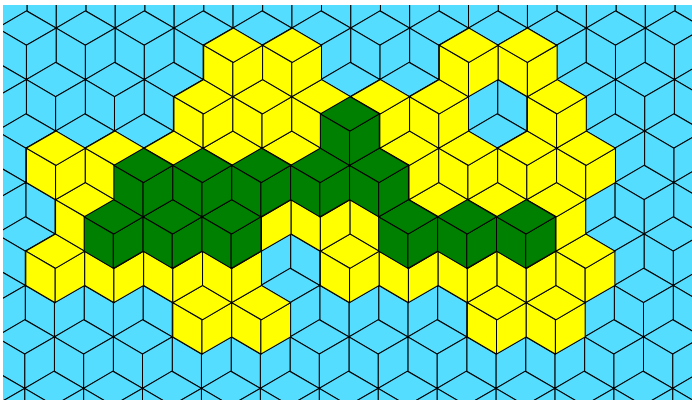
On colorie selon l'altitude : mer, plage, forêt. . .

Preuve



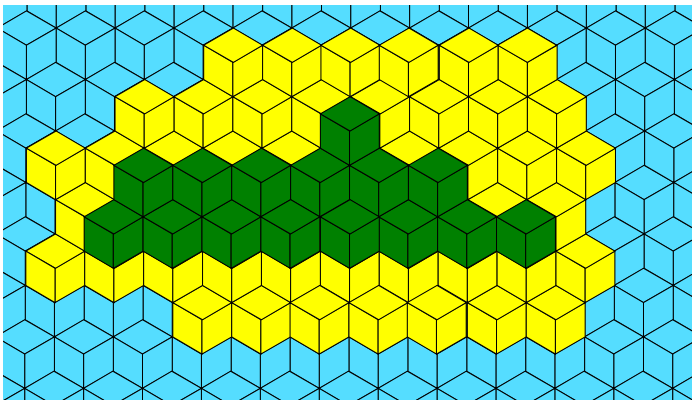
On colorie selon l'altitude : mer, plage, forêt...

Preuve



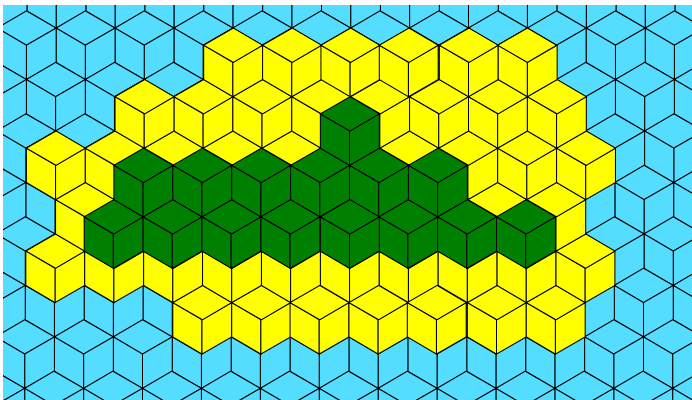
On colorie selon l'altitude : mer, plage, forêt. . .

Preuve



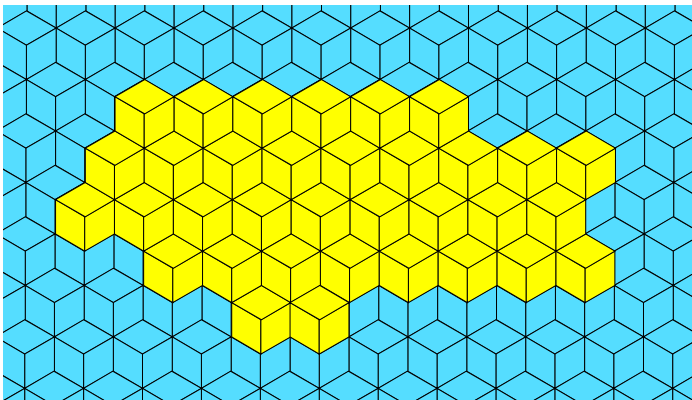
On majore le temps de mélange par celui de l'*enveloppe triconvexe*.

Preuve



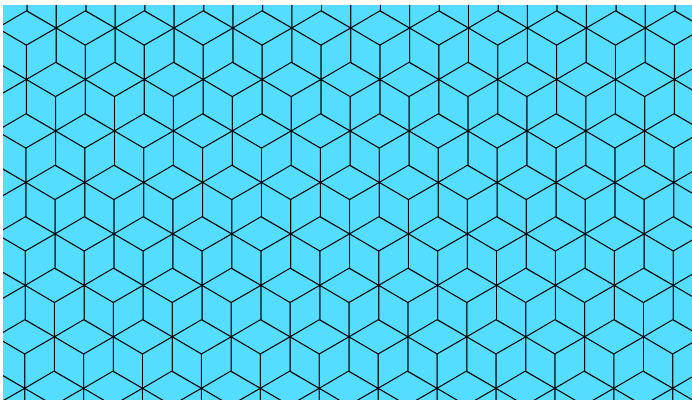
La métrique $\varphi := 4V + E$ contracte de $12/n$ l'étage supérieur.

Preuve



Comme $4V + E = O(n)$, cet étage disparaît en $O(n^2)$.

Preuve



Idem pour chacun des $O(\sqrt{n})$ étages (tour à tour “supérieur”).