

# Reconnaissance d'hyperplan discret : une approche par désubstitution

Valérie Berthé et Thomas Fernique

LIRMM - Université Montpellier II

LAIC, 15 Mars 2007

Reconnaissance d'hyperplan discret :

Étant donné un ensemble de points de  $\mathbb{Z}^d$ , peut-on le décrire  
comme une discrétisation d'hyperplan réel ?

Reconnaissance d'hyperplan discret :

Étant donné un ensemble de points de  $\mathbb{Z}^d$ , peut-on le décrire comme une discrétisation d'hyperplan réel ?

Approche de cet exposé :

Utilisation de substitutions multi-dimensionnelles pour étendre aux hyperplans des algorithmes “à la Wu” (recodages itérés de mots).

Reconnaissance d'hyperplan discret :

Étant donné un ensemble de points de  $\mathbb{Z}^d$ , peut-on le décrire comme une discrétisation d'hyperplan réel ?

Approche de cet exposé :

Utilisation de substitutions multi-dimensionnelles pour étendre aux hyperplans des algorithmes “à la Wu” (recodages itérés de mots).

Par souci de clarté :

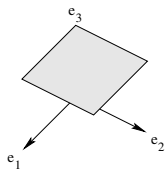
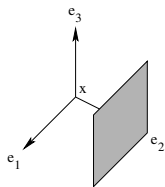
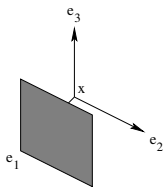
Dans ce qui suit, on suppose  $d = 3$  (i.e., *hyperplan*  $\rightsquigarrow$  *plan*).

Penser au cas  $d = 2$  peut aider (mais peut masquer la difficulté).

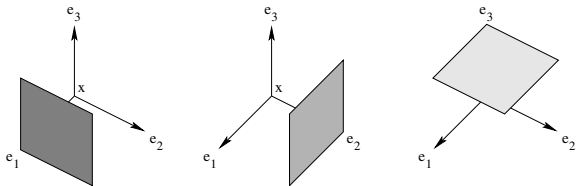
- 1 Plans et surfaces plissés
- 2 Substitutions généralisées
- 3 Reconnaissance de plan
- 4 Euclide généralisé

- 1 Plans et surfaces plissés
- 2 Substitutions généralisées
- 3 Reconnaissance de plan
- 4 Euclide généralisé

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  base de  $\mathbb{R}^3$ .  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^3$  et  $i \in \{1, 2, 3\} \rightsquigarrow \text{face}(\vec{x}, i^*) :$



$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  base de  $\mathbb{R}^3$ .  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^3$  et  $i \in \{1, 2, 3\} \rightsquigarrow$  face  $(\vec{x}, i^*)$  :

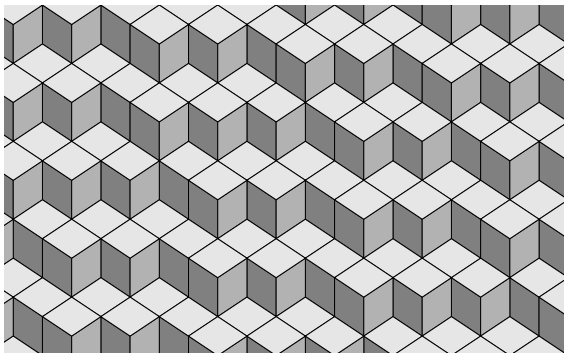


## Définition

Plan plissé de normale  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^3 \setminus \{0\}$  et d'intercept  $\rho \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho} = \{(\vec{x}, i^*) \mid 0 \leq \langle \vec{x}, \vec{\alpha} \rangle + \rho < \langle \vec{e}_i, \vec{\alpha} \rangle\}.$$





Sommets de  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$  : *plan discret standard* de param.  $(\vec{\alpha}, \rho)$ .

Soient  $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$  et  $\pi$  la projection orthogonale selon  $\vec{u}$ .

### Proposition

Un plan plissé est homéomorphe au plan réel  $\vec{u}^\perp$  par  $\pi$ .

Soient  $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$  et  $\pi$  la projection orthogonale selon  $\vec{u}$ .

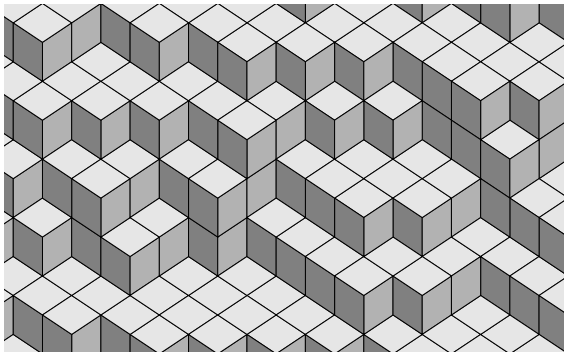
### Proposition

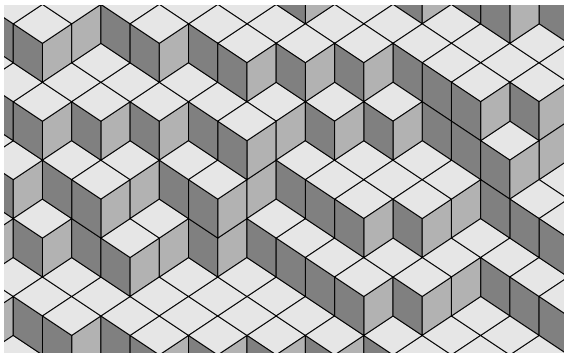
Un plan plissé est homéomorphe au plan réel  $\vec{u}^\perp$  par  $\pi$ .

Par extension :

### Définition [Jamet]

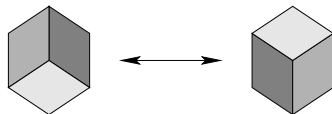
*Surface plissée* : ensemble de faces homéomorphe à  $\vec{u}^\perp$  par  $\pi$ .





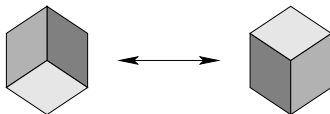
Remarque : projection des faces  $\simeq$  pavage du plan par losanges.

Pavage par losanges  $\rightsquigarrow$  physique statistique  $\rightsquigarrow$  *flip* :



Flip sur surface plissée  $\simeq$  ajout/retrait d'un cube unité.

Pavage par losanges  $\rightsquigarrow$  physique statistique  $\rightsquigarrow$  *flip* :



Flip sur surface plissée  $\simeq$  ajout/retrait d'un cube unité.

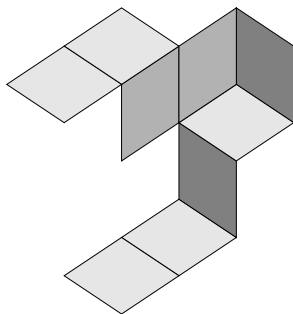
**Théorème [Arnoux-Berthé-F.-Jamet, 2007]**

Surface plissée = plan plissé (oblique) + séquence de flips.

$\rightsquigarrow$  deux définitions équivalentes.

## Définition

*Patch* : ensemble fini de faces, inclus dans une surface plissée.

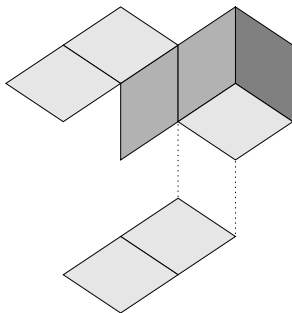


un patch



## Définition

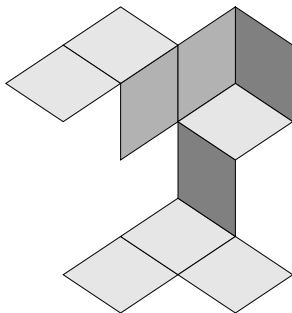
*Patch* : ensemble fini de faces, inclus dans une surface plissée.



pas nécessairement connexe

## Définition

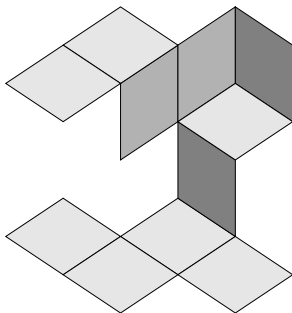
*Patch* : ensemble fini de faces, inclus dans une surface plissée.



pas nécessairement inclus dans un plan plissé

## Définition

*Patch* : ensemble fini de faces, inclus dans une surface plissée.



pas nécessairement un patch !

- 1 Plans et surfaces plissés
- 2 Substitutions généralisées**
- 3 Reconnaissance de plan
- 4 Euclide généralisé

Alphabet  $\mathcal{A} = \{1, \dots, 3\} \rightsquigarrow$  mots  $\mathcal{A}^*$  (concaténations de lettres).

*Substitution*  $\sigma$  : morphisme non effaçant de  $\mathcal{A}^*$  ( $\sigma \neq Id$ ).

$$\sigma : \begin{cases} 1 \rightarrow 12 \\ 2 \rightarrow 13 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases} \rightsquigarrow \sigma(1213) = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(1)\sigma(3) = 1213121.$$

Alphabet  $\mathcal{A} = \{1, \dots, 3\} \rightsquigarrow$  mots  $\mathcal{A}^*$  (concaténations de lettres).

*Substitution*  $\sigma$  : morphisme non effaçant de  $\mathcal{A}^*$  ( $\sigma \neq Id$ ).

$$\sigma : \begin{cases} 1 \rightarrow 12 \\ 2 \rightarrow 13 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases} \rightsquigarrow \sigma(1213) = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(1)\sigma(3) = 1213121.$$

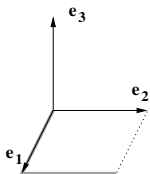
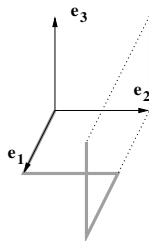
*Matrice d'incidence* de  $\sigma$  :  $M_\sigma = (m_{ij})$ , où  $m_{ij} = |\sigma(i)|_j$ .

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

“Relèvement” d'un mot  $u \in \{1, 2, 3\}^*$  en une ligne brisée  $\gamma(u)$  :

$$\gamma(u_1 \dots u_k) = \{(\vec{y}_1, u_1), \dots, (\vec{y}_k, u_k)\}, \quad \vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \vec{e}_{u_i},$$

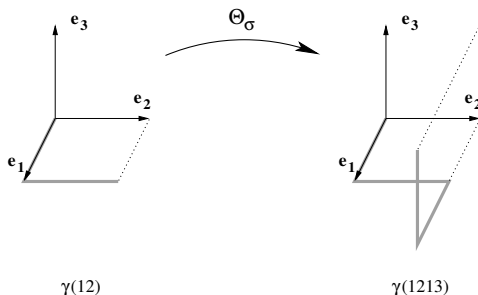
où  $(\vec{y}, j)$  est le segment  $[\vec{y}, \vec{y} + \vec{e}_j]$ ,  $\vec{y} \in \mathbb{Z}^3$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ .


 $\gamma(12)$ 

 $\gamma(1213)$

“Relèvement” de  $\sigma$  en une application  $\Theta_\sigma$  sur les segments :

$$\Theta_\sigma \circ \gamma = \gamma \circ \sigma.$$

Expression analytique calculable. On a  $\Theta_\sigma(\vec{y}, j) = M_\sigma \vec{y} + \Theta_\sigma(\vec{0}, j)$ .





Dualité segment-face :

$$[(\vec{y}, j), (\vec{x}, i^*)] = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} = \vec{y} \text{ et } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Application  $\Theta_\sigma$  sur les *segments*  $\rightsquigarrow$  application  $\Theta_\sigma^*$  sur les *faces* :

$$[\Theta_\sigma(\vec{y}, j), (\vec{x}, i^*)] = [(\vec{y}, j), \Theta_\sigma^*(\vec{x}, i^*)].$$

Si  $\det M_\sigma = \pm 1$ , expression analytique calculable. On a :

$$\Theta_\sigma^*(\vec{x}, i^*) = M_\sigma^{-1} \vec{x} + \Theta_\sigma^*(\vec{0}, i^*).$$

$$\sigma : \begin{cases} 1 \rightarrow 12 \\ 2 \rightarrow 13 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{relèv.}} \Theta_\sigma : \begin{cases} (\vec{0}, 1) \rightarrow \{(\vec{0}, 1), (\vec{e}_1, 2)\} \\ (\vec{0}, 2) \rightarrow \{(\vec{0}, 1), (\vec{e}_1, 3)\} \\ (\vec{0}, 3) \rightarrow \{(\vec{0}, 1)\} \end{cases}$$

$$\sigma : \begin{cases} 1 \rightarrow 12 \\ 2 \rightarrow 13 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{relèv.}} \Theta_\sigma : \begin{cases} (\vec{0}, 1) \rightarrow \{(\vec{0}, 1), (\vec{e}_1, 2)\} \\ (\vec{0}, 2) \rightarrow \{(\vec{0}, 1), (\vec{e}_1, 3)\} \\ (\vec{0}, 3) \rightarrow \{(\vec{0}, 1)\} \end{cases}$$

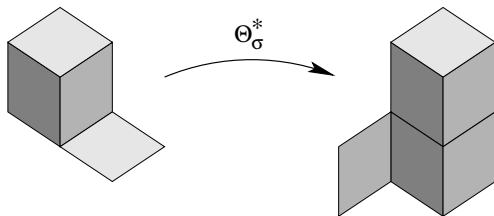
$$\xrightarrow{\text{dual.}} \Theta_\sigma^* : \begin{cases} (\vec{0}, 1^*) \rightarrow \{(\vec{0}, 1^*), (\vec{0}, 2^*), (\vec{0}, 3^*)\} \\ (\vec{0}, 2^*) \rightarrow \{(-\vec{e}_3, 1^*)\} \\ (\vec{0}, 3^*) \rightarrow \{(-\vec{e}_3, 2^*)\} \end{cases}$$

$$\sigma : \begin{cases} 1 \rightarrow 12 \\ 2 \rightarrow 13 \\ 3 \rightarrow 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{relèv.}} \Theta_\sigma : \begin{cases} (\vec{0}, 1) \rightarrow \{(\vec{0}, 1), (\vec{e}_1, 2)\} \\ (\vec{0}, 2) \rightarrow \{(\vec{0}, 1), (\vec{e}_1, 3)\} \\ (\vec{0}, 3) \rightarrow \{(\vec{0}, 1)\} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{dual.}} \Theta_\sigma^* : \begin{cases} (\vec{0}, 1^*) \rightarrow \{(\vec{0}, 1^*), (\vec{0}, 2^*), (\vec{0}, 3^*)\} \\ (\vec{0}, 2^*) \rightarrow \{(-\vec{e}_3, 1^*)\} \\ (\vec{0}, 3^*) \rightarrow \{(-\vec{e}_3, 2^*)\} \end{cases}$$

Possibles *recouvrements* des images de faces distinctes :

$$\Theta_\sigma^*(\vec{e}_1, 2^*) = \{(\vec{0}, 1^*)\} \subset \Theta_\sigma^*(\vec{0}, 1^*).$$



$\sigma$  sur mots  $\xrightarrow{\text{rel\`ev.}}$   $\Theta_\sigma$  sur segments  $\xrightarrow{\text{dual.}}$   $\Theta_\sigma^*$  sur faces.

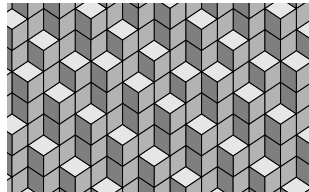
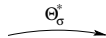
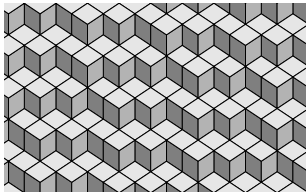
$\Theta_\sigma^*$  est la *substitution généralisée* associée à  $\sigma$  [Arnoux-Ito, 2001] :

- agit sur les ensembles de faces de l'espace ;
- expression analytique quand  $\det M_\sigma = \pm 1$ .

- 1 Plans et surfaces plissés
- 2 Substitutions généralisées
- 3 Reconnaissance de plan**
- 4 Euclide généralisé

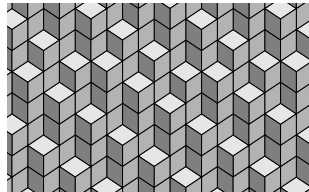
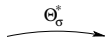
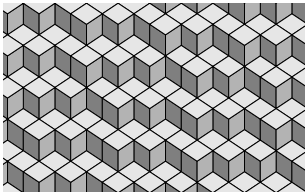
## Théorème [F. 2006]

$\Theta_\sigma^*$  envoie sans recouvrement le plan plissé  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$  sur  $\mathcal{P}_{t_{M_\sigma}\vec{\alpha},\rho}$ .



## Théorème [F. 2006]

$\Theta_\sigma^*$  envoie sans recouvrement le plan plissé  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha},\rho}$  sur  $\mathcal{P}_{t_{M_\sigma}\vec{\alpha},\rho}$ .



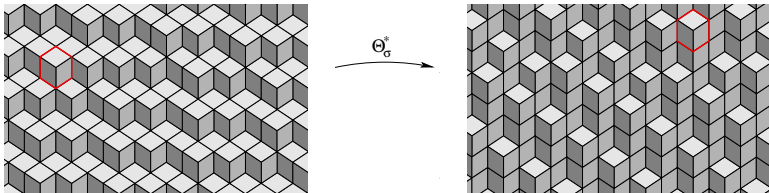
## Théorème [F. 2006, Arnoux-Berthé-F.-Jamet 2007]

$\Theta_\sigma^*$  agit sans recouvrement sur les surfaces plissées.



## Théorème [F. 2006]

$\Theta_\sigma^*$  envoie sans recouvrement le plan plissé  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$  sur  $\mathcal{P}_{t_{M_\sigma} \vec{\alpha}, \rho}$ .

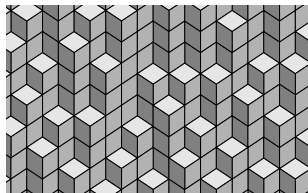
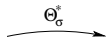
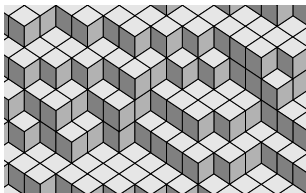


## Théorème [F. 2006, Arnoux-Berthé-F.-Jamet 2007]

$\Theta_\sigma^*$  agit sans recouvrement sur les surfaces plissées.

## Théorème [F. 2006]

$\Theta_\sigma^*$  envoie sans recouvrement le plan plissé  $\mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho}$  sur  $\mathcal{P}_{t_{M_\sigma} \vec{\alpha}, \rho}$ .

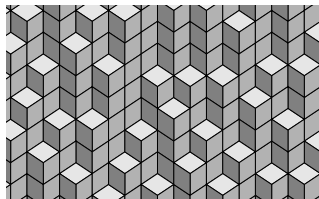
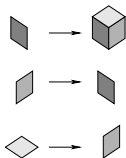


## Théorème [F. 2006, Arnoux-Berthé-F.-Jamet 2007]

$\Theta_\sigma^*$  agit sans recouvrement sur les surfaces plissées.

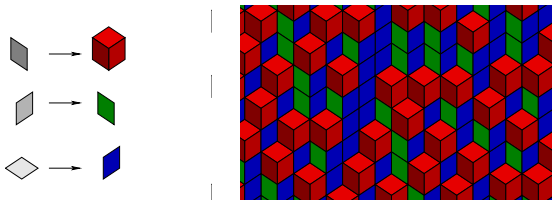
## Définition

Surface plissée  $\sigma$ -pavable : partition par translatsés de  $\Theta_{\sigma}^*(\vec{0}, i^*)$ .



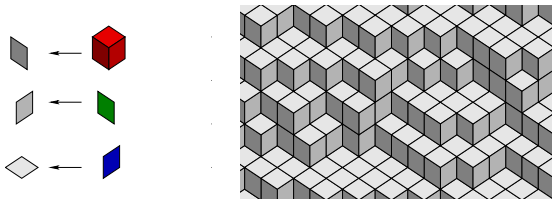
## Définition

Surface plissée  $\sigma$ -pavable : partition par translatsés de  $\Theta_{\sigma}^*(\vec{0}, i^*)$ .



## Définition

Surface plissée  $\sigma$ -pavable : partition par translatsés de  $\Theta_{\sigma}^*(\vec{0}, i^*)$ .



$\rightsquigarrow$  antécédent “propre” (pas de recouvrement).

### Théorème [Berthé-F., 2007]

Une surface plissée  $\sigma$ -pavable admet un unique antécédent par  $\Theta_\sigma^*$ .  
De plus, cet antécédent est aussi une surface plissée.

$\rightsquigarrow$  on parle de *désusubstituabilité* d'une surface plissée.

### Théorème [Berthé-F., 2007]

Une surface plissée  $\sigma$ -pavable admet un unique antécédent par  $\Theta_{\sigma}^*$ .  
De plus, cet antécédent est aussi une surface plissée.

$\rightsquigarrow$  on parle de *désubstituabilité* d'une surface plissée.

### Proposition

Seuls les plans plissés se désubstituent en plans plissés.

### Proposition

Un plan plissé *non plat* est toujours désubstituable ( $\sigma$  bien choisi).

Schéma pour décider si une surface plissée  $\mathcal{S}_0$  est un plan plissé :

Construire une suite  $(\mathcal{S}_n)_{n \geq 0}$ , où  $\mathcal{S}_{n+1}$  désubstituée de  $\mathcal{S}_n$ . Alors :

- $\exists N$  t.q.  $\mathcal{S}_N$  plan plissé plat  $\Rightarrow \mathcal{S}_0$  plan plissé ;
- $\exists N$  t.q.  $\mathcal{S}_N$  non désubstituable  $\Rightarrow \mathcal{S}_0$  pas plan plissé ;



Schéma pour décider si une surface plissée  $\mathcal{S}_0$  est un plan plissé :

Construire une suite  $(\mathcal{S}_n)_{n \geq 0}$ , où  $\mathcal{S}_{n+1}$  désubstituée de  $\mathcal{S}_n$ . Alors :

- $\exists N$  t.q.  $\mathcal{S}_N$  plan plissé plat  $\Rightarrow \mathcal{S}_0$  plan plissé ;
- $\exists N$  t.q.  $\mathcal{S}_N$  non désubstituable  $\Rightarrow \mathcal{S}_0$  pas plan plissé ;

Deux problèmes :

- cas d'une suite infinie ?
- choix des substitutions ?

Si  $\mathcal{S}_N$  plan plissé plat, alors  $\exists c \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  t.q. :

$$\mathcal{S}_N = \mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{e}_i \text{ et } \rho \in [c, c + 1[.$$

Si  $\mathcal{S}_N$  plan plissé plat, alors  $\exists c \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  t.q. :

$$\mathcal{S}_N = \mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{e}_i \text{ et } \rho \in [c, c + 1[.$$

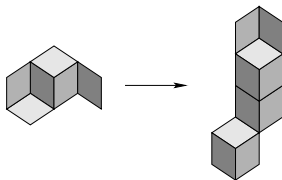
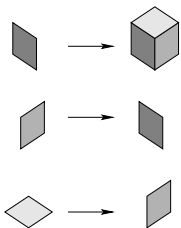
Si  $\sigma_j$  est la substitution t.q.  $\Theta_{\sigma_j}^*(\mathcal{S}_{j+1}) = \mathcal{S}_j$ , alors :

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{P}_{\vec{\alpha}, \rho} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = {}^t M \vec{e}_i \text{ et } \rho \in [c, c + 1[.$$

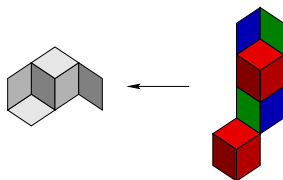
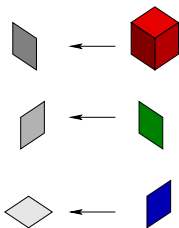
où  $M = M_{\sigma_{N-1}} \times \dots \times M_{\sigma_0}$ .

$\rightsquigarrow$  ensemble des paramètres acceptables d'un plan plissé reconnu.

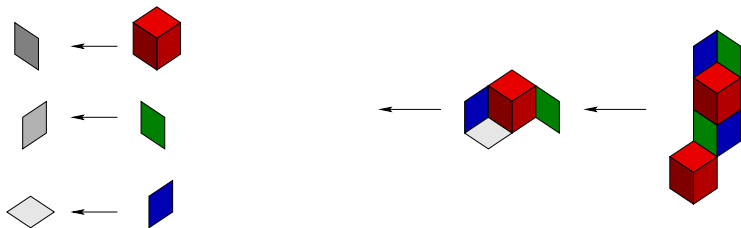
L'image d'un patch est un patch (plus grand).



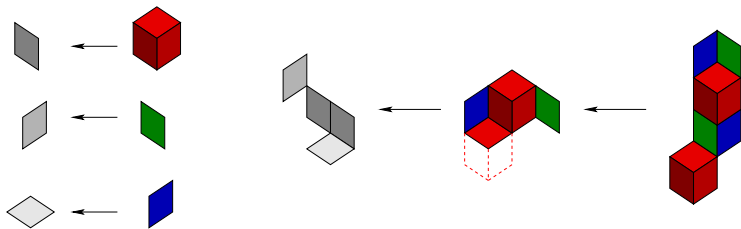
L'image d'un patch est un patch (plus grand).  
Désubstitution : problème des bords.



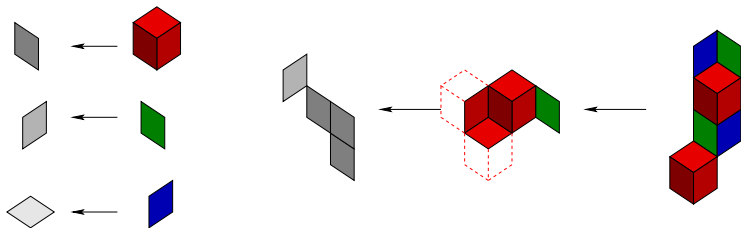
L'image d'un patch est un patch (plus grand).  
Désubstitution : problème des bords.



L'image d'un patch est un patch (plus grand).  
Désubstitution : problème des bords.

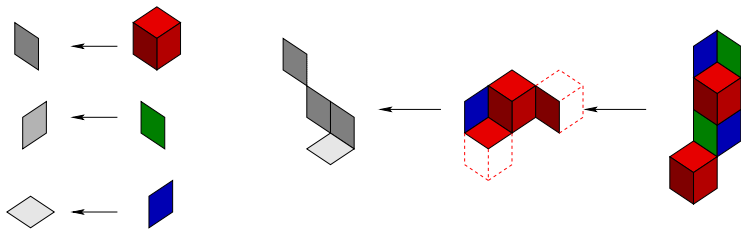


L'image d'un patch est un patch (plus grand).  
Dés substitution : problème des bords.

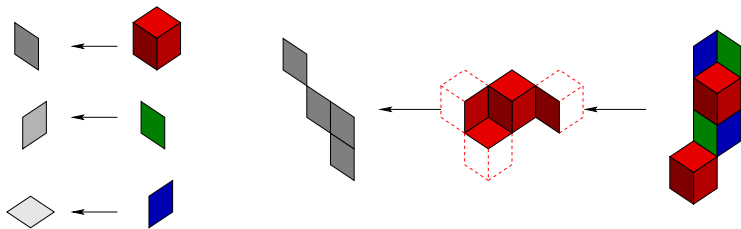




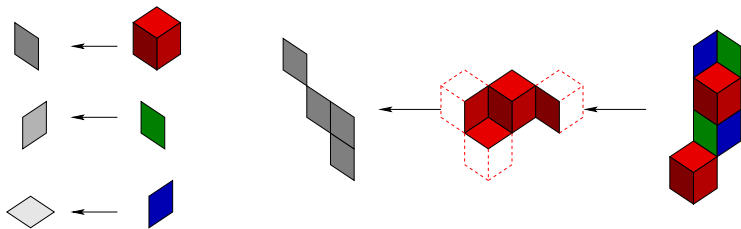
L'image d'un patch est un patch (plus grand).  
Dés substitution : problème des bords.



L'image d'un patch est un patch (plus grand).  
Dés substitution : problème des bords.



L'image d'un patch est un patch (plus grand).  
Désubstitution : problème des bords.



↪ traitement des paliers extrémaux de droite discrète à généraliser.

- 1 Plans et surfaces plissés
- 2 Substitutions généralisées
- 3 Reconnaissance de plan
- 4 Euclide généralisé**

But :

Approximation simultanée d'un  $d$ -uplet de réels par des rationnels :

$$\delta > 0, \vec{\alpha} \in [0, 1]^d \rightsquigarrow (q_n, \vec{p}_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d \text{ t.q. } \|q_n \vec{\alpha} - \vec{p}_n\| \leq q_n^{-\delta}.$$

But :

Approximation simultanée d'un  $d$ -uplet de réels par des rationnels :

$$\delta > 0, \vec{\alpha} \in [0, 1]^d \rightsquigarrow (q_n, \vec{p}_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d \text{ t.q. } \|q_n \vec{\alpha} - \vec{p}_n\| \leq q_n^{-\delta}.$$

Principe général :

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 \xrightarrow{M_0} \vec{\alpha}_1 \xrightarrow{M_1} \dots \xrightarrow{M_{n-1}} \vec{\alpha}_n \xrightarrow{M_n} \dots$$

où  $M_n \in GL(d+1, \mathbb{N})$  t.q.  $(1, \vec{\alpha}_n) \propto M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})$ .

But :

Approximation simultanée d'un  $d$ -uplet de réels par des rationnels :

$$\delta > 0, \vec{\alpha} \in [0, 1]^d \rightsquigarrow (q_n, \vec{p}_n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^d \text{ t.q. } \|q_n \vec{\alpha} - \vec{p}_n\| \leq q_n^{-\delta}.$$

Principe général :

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0 \xrightarrow{M_0} \vec{\alpha}_1 \xrightarrow{M_1} \dots \xrightarrow{M_{n-1}} \vec{\alpha}_n \xrightarrow{M_n} \dots$$

où  $M_n \in GL(d+1, \mathbb{N})$  t.q.  $(1, \vec{\alpha}_n) \propto M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})$ . Convergents :

$$\begin{aligned} (1, \vec{\alpha}) &\propto M_0 \times \dots \times M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1}) \\ (q_n, \vec{p}_n) &\propto M_0 \times \dots \times M_n(1, \vec{0}). \end{aligned}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha_n} \right\rfloor = T(\alpha_n).$$

On a :  $(1, \alpha_n) \propto E_{a_n}(1, \alpha_{n+1})$ , avec :

$$a_n = \lfloor \alpha_n^{-1} \rfloor \quad \text{et} \quad E_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha_n} \right\rfloor = T(\alpha_n).$$

On a :  $(1, \alpha_n) \propto E_{a_n}(1, \alpha_{n+1})$ , avec :

$$a_n = \lfloor \alpha_n^{-1} \rfloor \quad \text{et} \quad E_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Convergence en  $\delta = 1$  :

$$(q_n, p_n) \propto E_{a_0} \times \dots \times E_{a_n}(1, 0) \Leftrightarrow \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots}}$$

$$(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}) = \begin{cases} (T(\alpha_n), \frac{\beta_n}{\alpha_n}) & \text{si } \alpha_n \geq \beta_n \\ (\frac{\alpha_n}{\beta_n}, T(\beta_n)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a :  $(1, \alpha_n, \beta_n) \propto B_{a_n, \varepsilon_n}(1, \alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ , avec :

$$(a_n, \varepsilon_n) = \begin{cases} (\lfloor \alpha_n^{-1} \rfloor, 1) & \text{si } \alpha_n \geq \beta_n \\ (\lfloor \beta_n^{-1} \rfloor, 2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$B_{a,1} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{a,2} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Convergence en  $\delta > 0$  presque partout.

Euclide :

$$\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow (a_n)_n = (1, 3, 1, 1, 1, 15, \dots)$$

$$\frac{p_7}{q_7} = \frac{355}{452} = 0.7853982\dots$$

$$\frac{e}{3} \rightsquigarrow (a_n)_n = (1, 9, 1, 1, 1, 5, \dots)$$

$$\frac{p_9}{q_9} = \frac{550}{607} = 0.906095\dots$$

Euclide :

$$\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow (a_n)_n = (1, 3, 1, 1, 1, 15, \dots)$$

$$\frac{e}{3} \rightsquigarrow (a_n)_n = (1, 9, 1, 1, 1, 5, \dots)$$

$$\frac{p_7}{q_7} = \frac{355}{452} = 0.7853982\dots$$

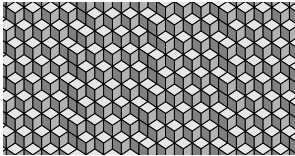
$$\frac{p_9}{q_9} = \frac{550}{607} = 0.906095\dots$$

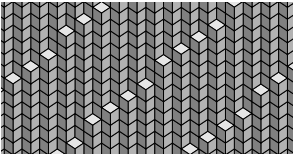
Brun :

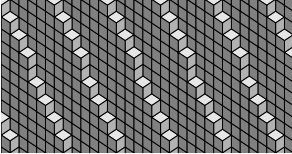
$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{e}{3}\right) \rightsquigarrow (a_n, \varepsilon_n)_n = ((1, 2), (1, 1), (6, 1), (1, 2), (1, 1), (1, 1), \dots)$$

$$\left(\frac{p_{17}^{(1)}}{q_{17}}, \frac{p_{17}^{(2)}}{q_{17}}\right) = \left(\frac{65990}{84021}, \frac{76131}{84021}\right) = (0.7853988\dots, 0.906094\dots)$$

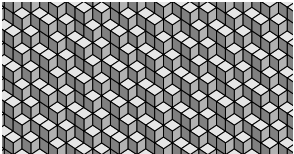
Numération	Géométrie
<p data-bbox="238 308 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="207 412 588 456"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="831 311 1119 356">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="738 415 1215 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>

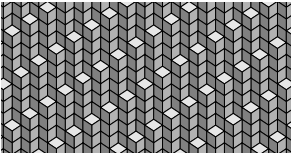
Numération	Géométrie
<p data-bbox="235 305 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="203 412 589 459"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="828 311 1119 359">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="735 412 1215 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>
<p data-bbox="203 746 600 798"><math>(1, \alpha_0, \beta_0) = (1, \frac{11}{14}, \frac{19}{21})</math></p>	

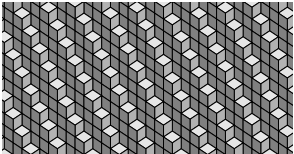
Numération	Géométrie
<p data-bbox="237 308 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="204 412 589 456"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="831 311 1119 356">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="738 415 1215 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>
<p data-bbox="168 746 636 801"><math>(1, \frac{11}{14}, \frac{19}{21}) \propto B_{1,2}(1, \frac{33}{38}, \frac{2}{19})</math></p>	

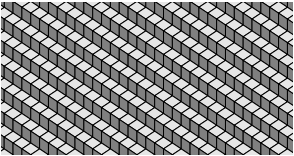
Numération	Géométrie
<p data-bbox="237 308 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="204 412 589 456"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="830 311 1119 356">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="738 415 1214 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>
<p data-bbox="168 746 636 801"><math>(1, \frac{33}{38}, \frac{2}{19}) \propto B_{1,1}(1, \frac{5}{33}, \frac{4}{33})</math></p>	<p data-bbox="742 619 1098 629">.....</p> 

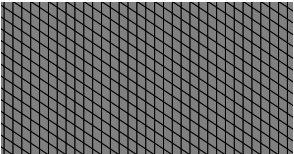


Numération	Géométrie
<p data-bbox="235 305 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="203 412 589 459"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="828 311 1119 359">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="735 412 1215 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>
<p data-bbox="183 746 621 800"><math>(1, \frac{5}{33}, \frac{4}{33}) \propto B_{6,1}(1, \frac{3}{4}, \frac{4}{5})</math></p>	<p data-bbox="769 650 1184 869">  </p>

Numération	Géométrie
<p data-bbox="237 308 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="207 412 587 456"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="831 311 1119 356">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="738 415 1215 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>
<p data-bbox="203 746 605 801"><math>(1, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}) \propto B_{1,2}(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})</math></p>	<p data-bbox="869 619 1153 629">.....</p> 

Numération	Géométrie
<p data-bbox="235 305 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="203 412 589 459"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="828 311 1119 359">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="735 412 1215 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>
<p data-bbox="200 746 605 800"><math>(1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \propto B_{1,1}(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})</math></p>	<p data-bbox="769 650 1184 868">  </p>

Numération	Géométrie
<p data-bbox="235 308 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="204 412 588 456"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="830 311 1119 356">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="738 415 1212 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>
<p data-bbox="204 746 600 801"><math>(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \propto B_{3,1}(1, 0, 1)</math></p>	

Numération	Géométrie
<p data-bbox="235 308 557 353"><math>d</math>-uplet <math>\vec{\alpha} \in [0, 1]^d</math></p> <p data-bbox="204 412 588 456"><math>(1, \vec{\alpha}_n) = M_n(1, \vec{\alpha}_{n+1})</math></p>	<p data-bbox="830 311 1119 356">plan plissé <math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha})}</math></p> <p data-bbox="738 415 1212 505"><math>\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_n)} = \Theta_{\sigma_n}^*(\mathcal{P}_{(1, \vec{\alpha}_{n+1})})</math> avec <math>{}^t M_n</math> matrice d'incidence de <math>\sigma_n</math></p>
<p data-bbox="211 754 595 798"><math>(1, 0, 1) \propto B_{1,2}(1, 0, 0)</math></p>	<p data-bbox="769 650 1184 868">  </p>

Déterminer si une surface est plane : “développer” cette surface.

- développement fini (plan plat)  $\Leftrightarrow$  plan rationnel ;
- développement infini  $\Leftrightarrow$  plan irrationnel ;
- erreur de désubstitution  $\Leftrightarrow$  surface non plane ( $\delta > 0$ ).

Déterminer si une surface est plane : “développer” cette surface.

- développement fini (plan plat)  $\Leftrightarrow$  plan rationnel ;
- développement infini  $\Leftrightarrow$  plan irrationnel ;
- erreur de désubstitution  $\Leftrightarrow$  surface non plane ( $\delta > 0$ ).

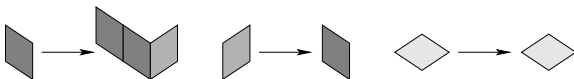
Choix des substitutions (ex. Brun) :



Déterminer si une surface est plane : “développer” cette surface.

- développement fini (plan plat)  $\Leftrightarrow$  plan rationnel ;
- développement infini  $\Leftrightarrow$  plan irrationnel ;
- erreur de désubstitution  $\Leftrightarrow$  surface non plane ( $\delta > 0$ ).

Choix des substitutions (ex. Brun) :

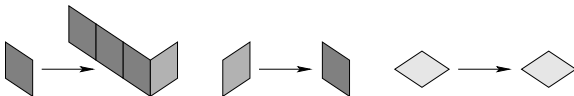




Déterminer si une surface est plane : “développer” cette surface.

- développement fini (plan plat)  $\Leftrightarrow$  plan rationnel ;
- développement infini  $\Leftrightarrow$  plan irrationnel ;
- erreur de désubstitution  $\Leftrightarrow$  surface non plane ( $\delta > 0$ ).

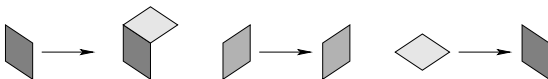
Choix des substitutions (ex. Brun) :



Déterminer si une surface est plane : “développer” cette surface.

- développement fini (plan plat)  $\Leftrightarrow$  plan rationnel ;
- développement infini  $\Leftrightarrow$  plan irrationnel ;
- erreur de désubstitution  $\Leftrightarrow$  surface non plane ( $\delta > 0$ ).

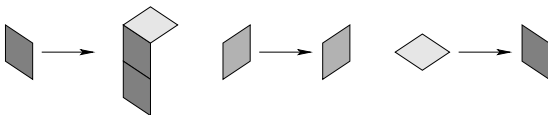
Choix des substitutions (ex. Brun) :



Déterminer si une surface est plane : “développer” cette surface.

- développement fini (plan plat)  $\Leftrightarrow$  plan rationnel ;
- développement infini  $\Leftrightarrow$  plan irrationnel ;
- erreur de désubstitution  $\Leftrightarrow$  surface non plane ( $\delta > 0$ ).

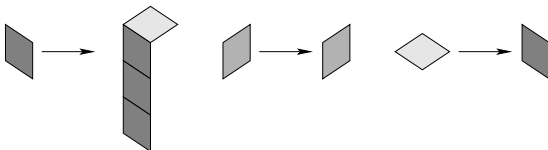
Choix des substitutions (ex. Brun) :



Déterminer si une surface est plane : “développer” cette surface.

- développement fini (plan plat)  $\Leftrightarrow$  plan rationnel ;
- développement infini  $\Leftrightarrow$  plan irrationnel ;
- erreur de désubstitution  $\Leftrightarrow$  surface non plane ( $\delta > 0$ ).

Choix des substitutions (ex. Brun) :



Dans cet exposé :

- Schéma de reconnaissance d'hyperplan discret (infini).
- Lien avec les fractions continues multidimensionnelles.

### Dans cet exposé :

- Schéma de reconnaissance d'hyperplan discret (infini).
- Lien avec les fractions continues multidimensionnelles.

### Pas dans cet exposé :

- Algorithme dans le cas fini (problème des bords).
- Polygonalisation, version incrémentale. . .

### Dans cet exposé :

- Schéma de reconnaissance d'hyperplan discret (infini).
- Lien avec les fractions continues multidimensionnelles.

### Pas dans cet exposé :

- Algorithme dans le cas fini (problème des bords).
- Polygonalisation, version incrémentale. . .

### Pas dans cet exposé non plus :

- Codimensions supérieures (pavage de Penrose. . .).
- Génération de *domaines fondamentaux* (motifs fractals).