Marches Aléatoires Biaisées dans des Espaces de Pavages

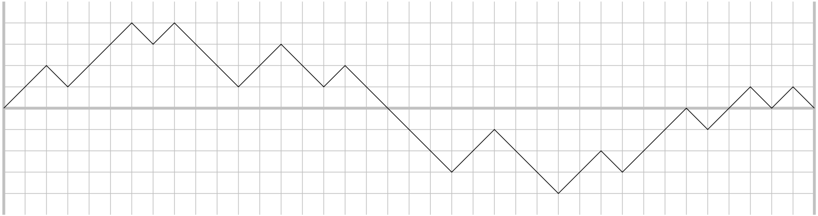
Thomas Fernique

Journée Math-STIC du 9 avril 2014

1. Cas particulier
2. Cas plus général
3. Motivations

Ponts

Pont : mot sur $\{a, b\}$ avec autant de a que de b. Visuellement :



Spécifiés donc bien analysés : aire moyenne, hauteur moyenne, *etc.*

Flips

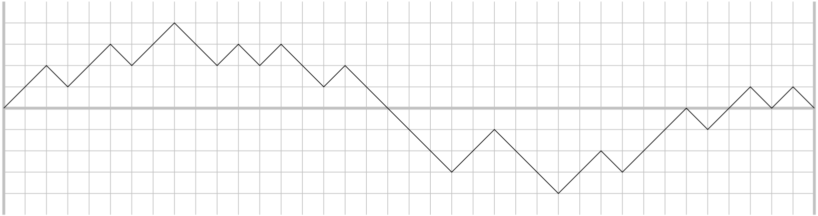
Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :

Flips

Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :

Flips

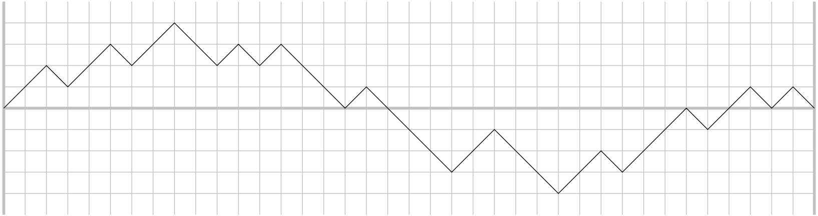
Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Choix aléatoire des positions et directions $\rightsquigarrow$ chaîne de Markov.

Flips

Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :



Choix aléatoire des positions et directions $\rightsquigarrow$ chaîne de Markov.

Flips

Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :

Choix aléatoire des positions et directions $\rightsquigarrow$ chaîne de Markov.

Flips

Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :

Choix aléatoire des positions et directions $\rightsquigarrow$ chaîne de Markov.

Flips

Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :

Choix aléatoire des positions et directions $\rightsquigarrow$ chaîne de Markov.

Flips

Flip : échange de lettres $ab \leftrightarrow ba$. Visuellement :

Choix aléatoire des positions et directions $\rightsquigarrow$ chaîne de Markov.

Convergence exponentielle vers la distribution uniforme : content ?

Convergence

Problème : la base de l'exponentielle dépend de la taille du pont !

Temps de mélange : $\max_{X_0 \in \Omega} \max_{A \subset \Omega} |\mathbb{P}(X_\tau \in A) - \pi(A)| \leq \frac{1}{4}$.

Convergence

Problème : la base de l'exponentielle dépend de la taille du pont !

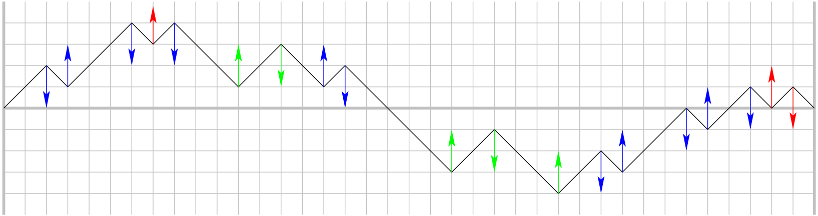
Temps de mélange : $\max_{X_0 \in \Omega} \max_{A \subset \Omega} |\mathbb{P}(X_\tau \in A) - \pi(A)| \leq \frac{1}{4}$.

Théorème [D. B. Wilson, 2004]

Pour les ponts de taille n: $\tau(n) = \Theta(n^3 \log(n))$.

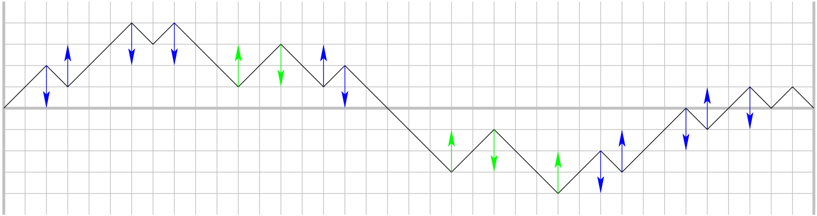
Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.



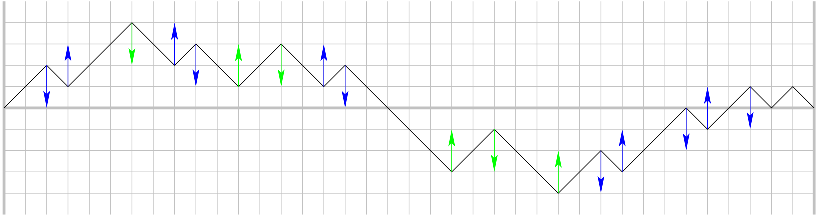
Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.



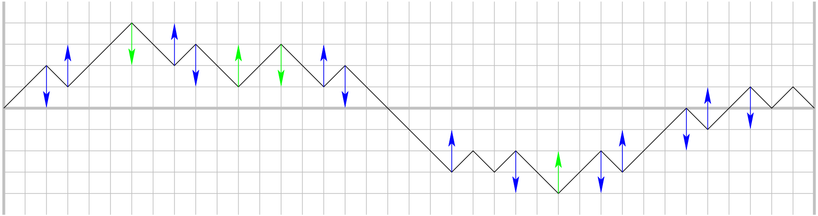
Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.



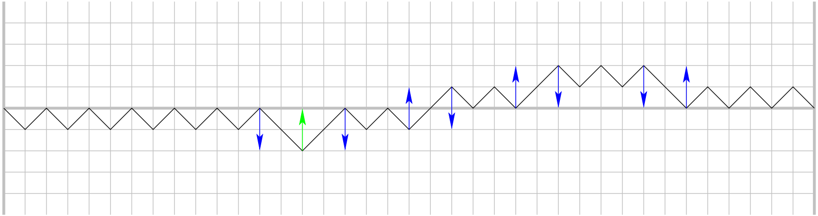
Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.



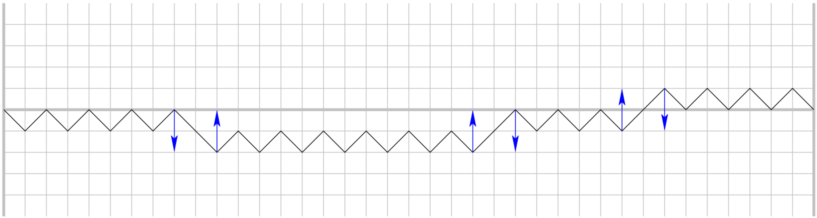
Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.



Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.

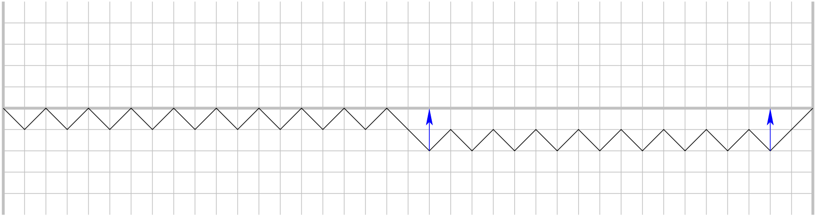


Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.

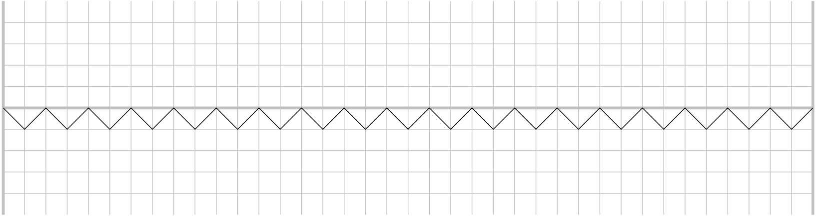
Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.



Flips biaisés

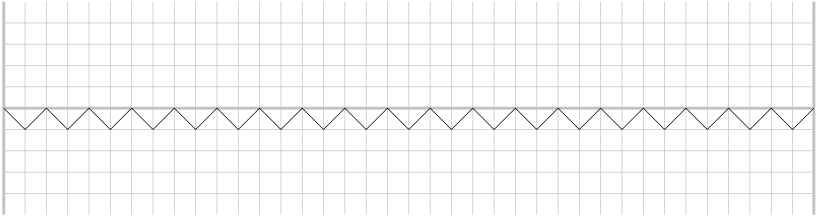
Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.



Convergence exponentielle vers une distribution Dirac (deux pics).

Flips biaisés

Pour varier les plaisirs : on interdit les flips $xxyy \to xyxy$.



Convergence exponentielle vers une distribution Dirac (deux pics).

Théorème [Bodini-F.-Regnault, 2010]

Pour les ponts de taille n: $\tau(n) = \Theta(n^3)$.

Motifs interdits

Flips interdits : ceux qui accroissent le nombre de motifs aa ou bb.

Les motifs interdits aa et bb caractérisent les configurations finales.

Motifs interdits

Flips interdits : ceux qui accroissent le nombre de motifs *aa* ou *bb*.

Les motifs interdits *aa* et *bb* caractérisent les configurations finales.

Quels types de configurations finales peut-on caractériser ?

Motifs interdits

Flips interdits : ceux qui accroissent le nombre de motifs *aa* ou *bb*.

Les motifs interdits *aa* et *bb* caractérisent les configurations finales.

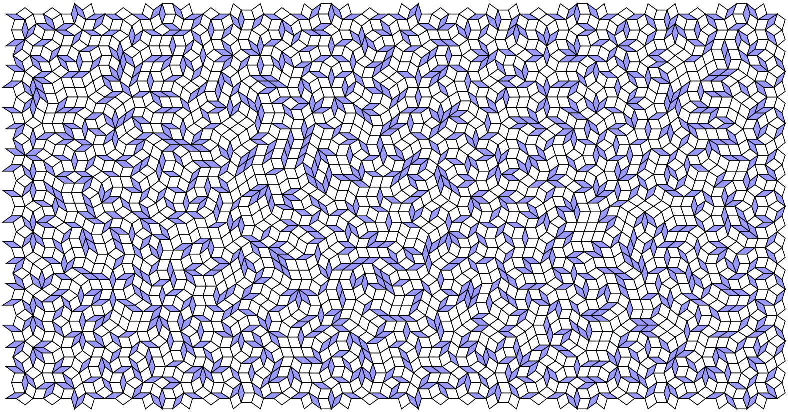
Quels types de configurations finales peut-on caractériser ?

Théorème [Lavrov, 2013]

Si c motifs interdits admettent une configuration valide infinie, alors ils en admettent une de période de longueur au plus φ_c.

Pavages par losanges

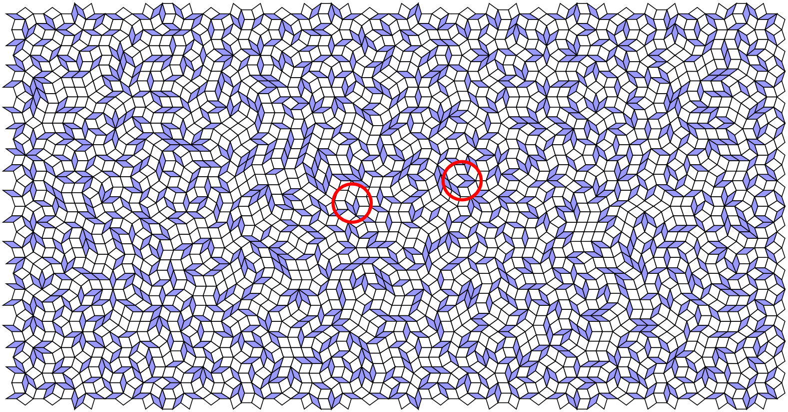
n vecteurs deux-à-deux non-colinéaires $\rightsquigarrow$ $\binom{n}{2}$ losanges $\rightsquigarrow$ pavage.



Non spécifiés, mal analysés sauf peut-être pour $n = 3$ (dimères).

Flips

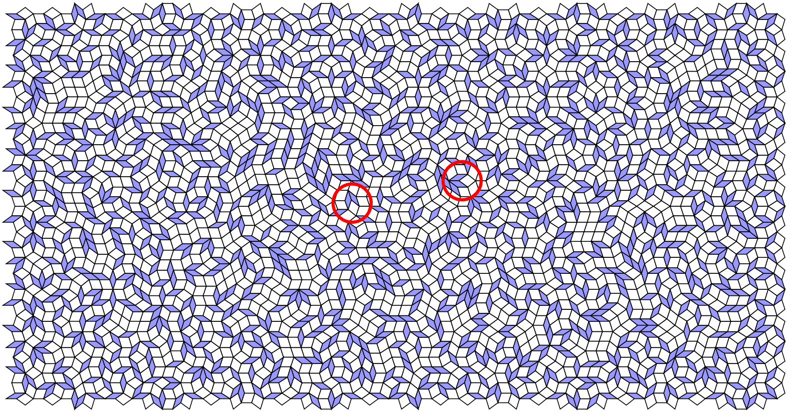
Flip : rotation d'un hexagone formé par trois losanges.



Convergence exponentielle vers la distribution uniforme. Mélange ?

Flips

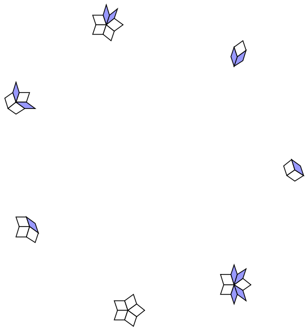
Flip : rotation d'un hexagone formé par trois losanges.



Convergence exponentielle vers la distribution uniforme. Mélange ?

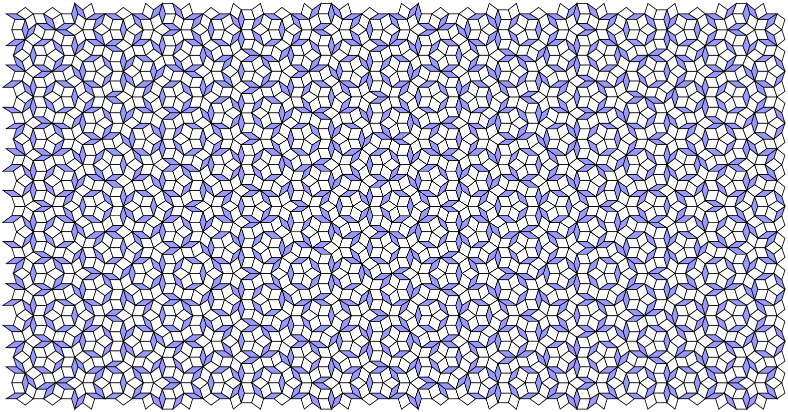
Motifs interdits (1)

Motifs interdits (ou permis) $\rightsquigarrow$ espace de pavages (*sous-shift*).



Motifs interdits (1)

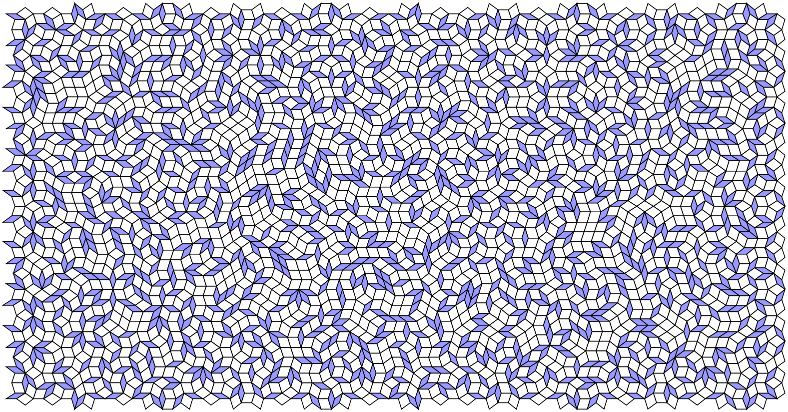
Motifs interdits (ou permis) $\rightsquigarrow$ espace de pavages (*sous-shift*).



L'apériodicité est forçable par un nombre fini de motifs interdits.

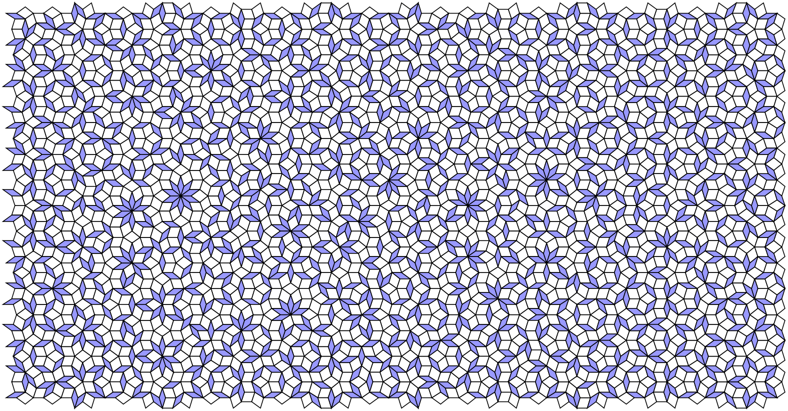
Flips biaisés

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



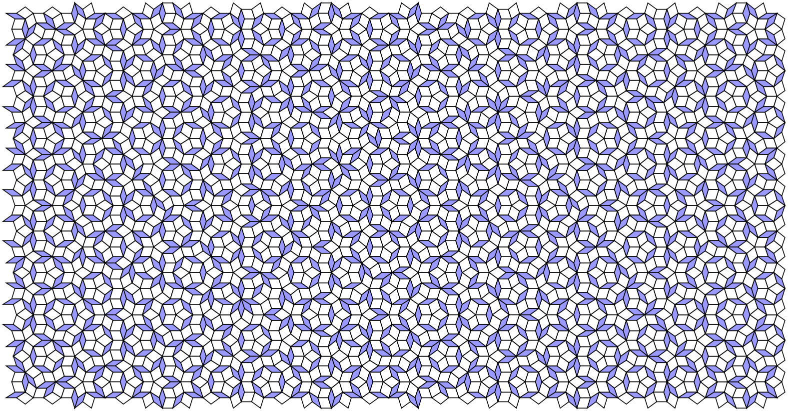
Flips biaisés

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



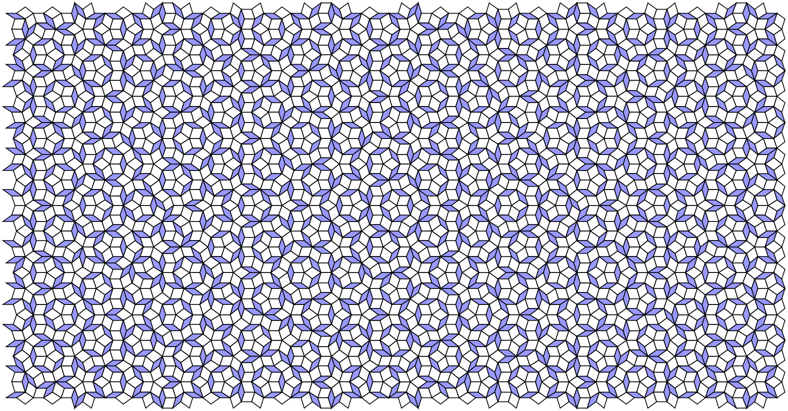
Flips biaisés

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



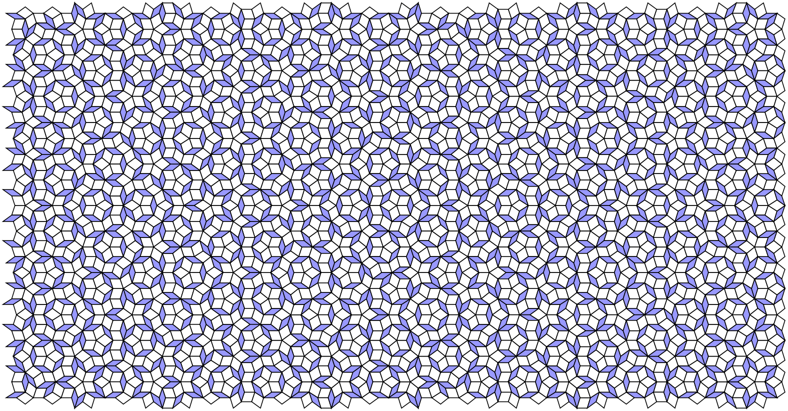
Flips biaisés

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



Flips biaisés

On interdit les flips qui accroissent le nombre de motifs interdits.



Convergence vers un pavage sans motif interdit ? Mélange ?

Motifs interdits (2)

Pavage plan : son relevé reste à distance bornée d'un plan de $\mathbb{R}^n$.
C'est un pavage avec "ordre à grande portée" (long range order).

Motifs interdits (2)

Pavage plan : son relevé reste à distance bornée d'un plan de $\mathbb{R}^n$.
C'est un pavage avec "ordre à grande portée" (long range order).

Théorème [F.-Sablik 2012–...]

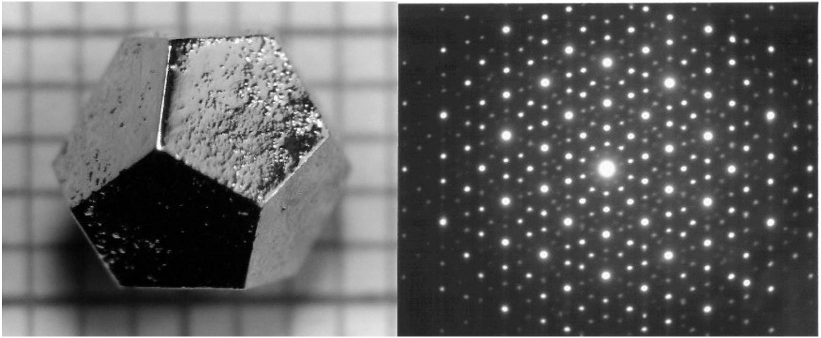
Caractérisation computationnelle des pavages plans de type sofique.

Théorème [Bédaride-F. 2011–...]

Caractérisation algébrique des pavages plans de type fini.

Quasicristaux

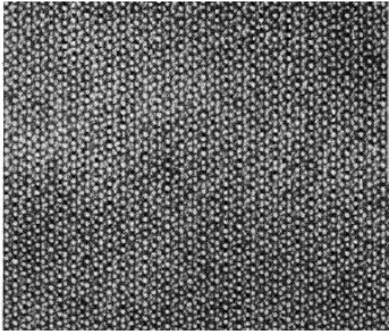
Quasicristal (1982/92) : matériau apériodique ordonné.



Modélisation par pavages pour expliquer structure et formation.

Energie minimale

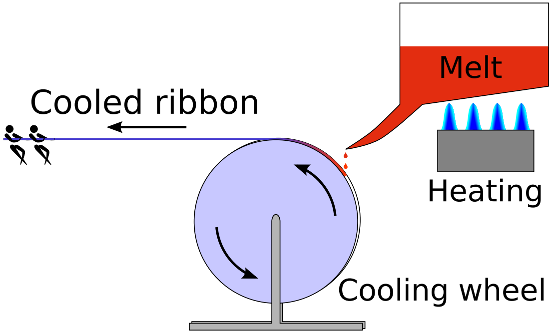
Minimiser $F = E - TS$ à $T = 0 \Leftrightarrow$ minimiser l'énergie E.



Explique structure, mais problème de formation (puzzle difficile).

Entropie maximale

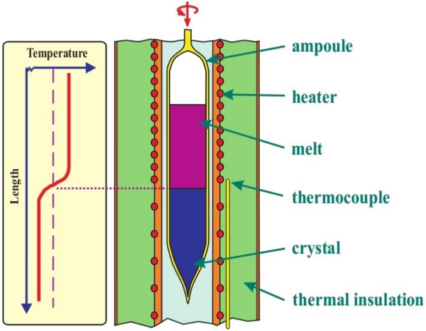
Minimiser $F = E - TS$ à T grande $\Leftrightarrow$ maximiser l'entropie S.



Explique formation et structure, mais problème de qualité.

Refroidissement

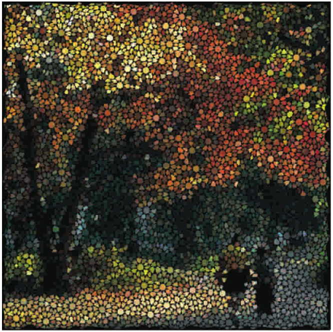
Procédé industriel actuel : refroidir lentement.



Problème : évaluer temps de mélange par flips biaisés.

Echantillonage quasipériodique

Projet avec Bessarab Mattei et Azzedine Beghdadi (Axe 1).



But : utiliser structure hiérarchique et régulière des quasicristaux.