Pavages par Coupe et Projection de Type Fini

Thomas Fernique
Laboratoire d'Informatique de Paris Nord
CNRS & Univ. Paris 13

Pavages par coupe et projection

Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^d$ définissant des tuiles d'intérieur non vide

$$T_{i_1,\ldots,i_d} := \{\sum \lambda_{i_j} \vec{v}_{i_j} \mid 0 \leq \lambda_{i_j} \leq 1\}.$$

Définition (pavage $n \to d$)

Un pavage $n \to d$ est un pavage "face-à-face" de $\mathbb{R}^d$ par ces tuiles.

Il se relève naturellement en une surface d-dim. de $\mathbb{R}^n$ via $\vec{v}_i \mapsto \vec{e}_i$.

Définition (pavage planaire)

Un pavage $n \to d$ est dit planaire *s'il se relève dans $E + [0, t]^n$, où E est un d-plan affine de $\mathbb{R}^n$ appelé* pente *et $t \geq 1$ est l'*épaisseur.

Exemples

Un plan discret à l'abbaye Saint-Étienne de Marmoutier (Alsace).

Exemples

Chez Michael Baake & inconnu : des pavages d'Ammann-Beenker.

Exemples

Chez moi à Montparnasse : un pavage de Penrose.

Règles locales

Définition (règles locales)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. S'il existe $t \geq 1$ et un ensemble fini de motifs t.q.

- *il y a un pavage sans ces motifs qui se relève dans $E + [0,1]^n$;*
- *tout pavage sans ces motifs se relève dans $E + [0,t]^n$;*

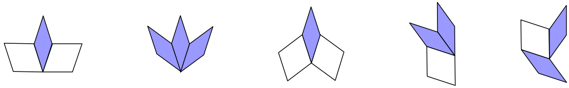
alors E est dit admettre des règles locales*.*

En dynamique symbolique : sous-shift de type fini.

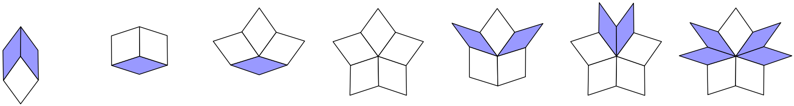
En physique de la matière condensée : quasicristaux.

Exemples

Les pavages de Penrose sont ceux sans les motifs (à isométrie près)



On les définit plus souvent par leur *vertex-atlas*



Les pavages d'Ammann-Beenker ne peuvent pas être définis ainsi !

Motifs et fenêtre

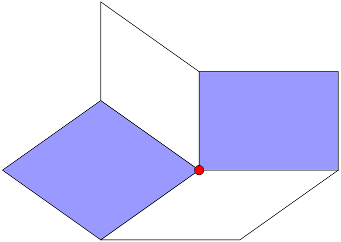
Définition (fenêtre)

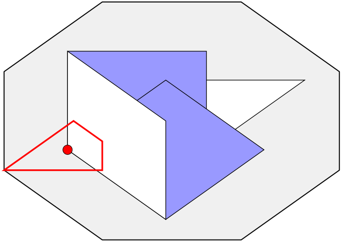
La fenêtre *d'un pavage planaire de pente $E \subset \mathbb{R}^n$ et d'épaisseur* 1 *est le polytope obtenu en projetant orthogonalement* $[0,1]^n$ *sur* $E^\perp$.

Proposition

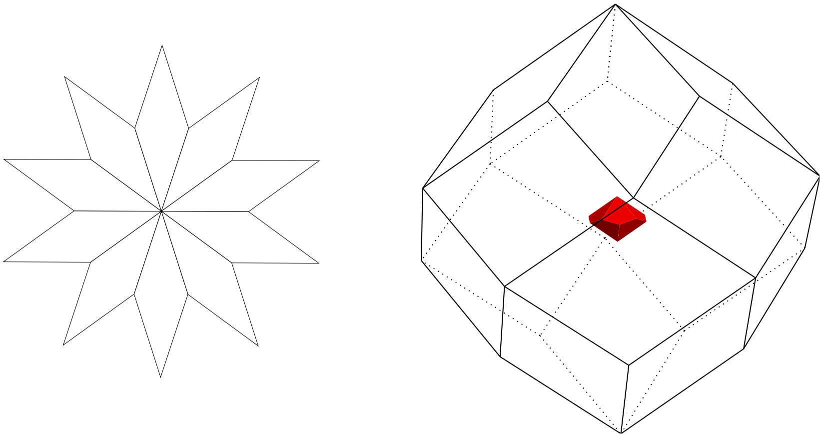
À tout motif pointé correspond une région de la fenêtre où se projettent les sommets qui, dans le pavage, pointent ce motif.

Exemples





Exemples



Des motifs aux coïncidences

Définition (coïncidence)

Une coïncidence *d'un pavage planaire $n \to d$, ce sont $n-d+1$ faces unité $n-d-1$-dim. de $\mathbb{Z}^n$ concourantes dans la fenêtre.*

C'est la plus petite région correspondant à un motif pointé...

Proposition (Bédaride-F.)

Toute pente caractérisée par motifs interdits l'est par coïncidences.

Une condition nécessaire

Proposition (Bédaride-F.)

Une coïncidence d'un pavage planaire correspond à une équation algébrique sur les coordonnées grassmanniennes de sa pente.

Pour un pavage $n \to d$, l'équation est homogène de degré $n - d$.

Théorème (Le 1995, Bédaride-F.)

Un pavage planaire avec des règles locales a une pente algébrique.

Exemples

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ r_3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3\,G_{12}\,G_{13} + G_{14}\,G_{23} = G_{12}\,G_{14} + 2\,G_{13}\,G_{14} + 3\,G_{13}\,G_{24}.$$

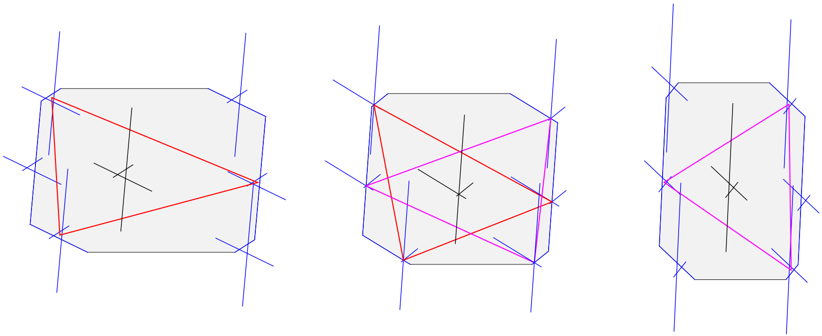
$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \\ r_2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} r_3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ r_4 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r_5 \\ r_6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ r_7 \\ r_8 \end{pmatrix}$$

$$3\,G_{15}\,G_{23}\,G_{24}+2\,G_{12}\,G_{23}\,G_{45}+G_{12}\,G_{24}\,G_{45} = 3\,G_{23}\,G_{24}\,G_{45}+2\,G_{12}\,G_{34}\,G_{45}.$$

Une condition suffisante ?

Proposition (Bédaride-F.)

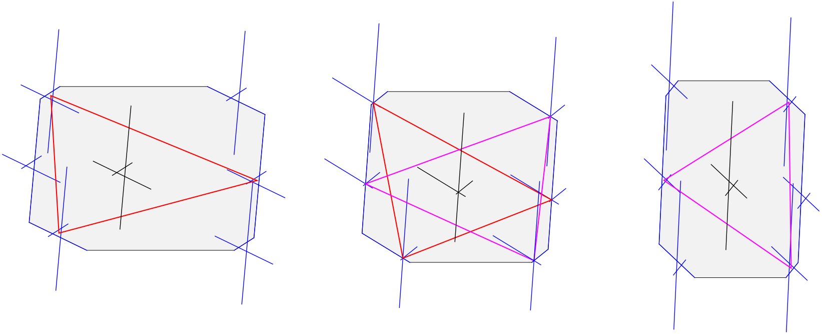
Toute pente caractérisée par coïncidences l'est par motifs interdits.



Une condition suffisante ?

Proposition (Bédaride-F.)

Toute pente caractérisée par coïncidences l'est par motifs interdits.



La planarité n'est cependant pas garantie (travail en cours).

Bibliographie

- L. S. Levitov, *Local rules for quasicrystals*, Comm. Math. Phys. **119** (1988)
- J. E. S. Socolar, *Weak matching rules for quasicrystals*, Comm. Math. Phys. **129** (1990)
- T. Q. T. Le, *Local rules for quasiperiodic tilings*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. **489** (1995)
- N. Bédaride, Th. Fernique, *When periodicities enforce aperiodicity*, Comm. Math. Phys. **335** (2015)
- N. Bédaride, Th. Fernique, *No weak local rules for the 4p-fold tilings*, Disc. Comput. Geom. **54** (2015)
- N. Bédaride, Th. Fernique, *Weak local rules for octagonal tilings*, to appear in Israel J. Math.