

# Puzzles : du jeu à la matière

Thomas Fernique

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord

24ème congrès MATH.en.JEANS du grand Sud

# Menu

- 1 Quasipériodicité
- 2 Quasicristaux
- 3 Indécidabilité

# Menu

- 1 Quasipériodicité
- 2 Quasicristaux
- 3 Indécidabilité

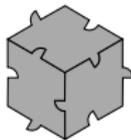
# Puzzle N°1



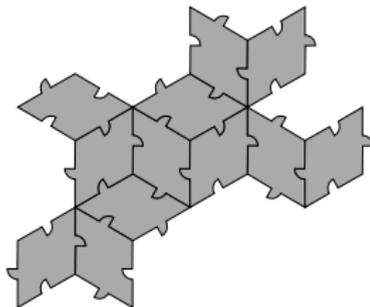
# Puzzle N°1



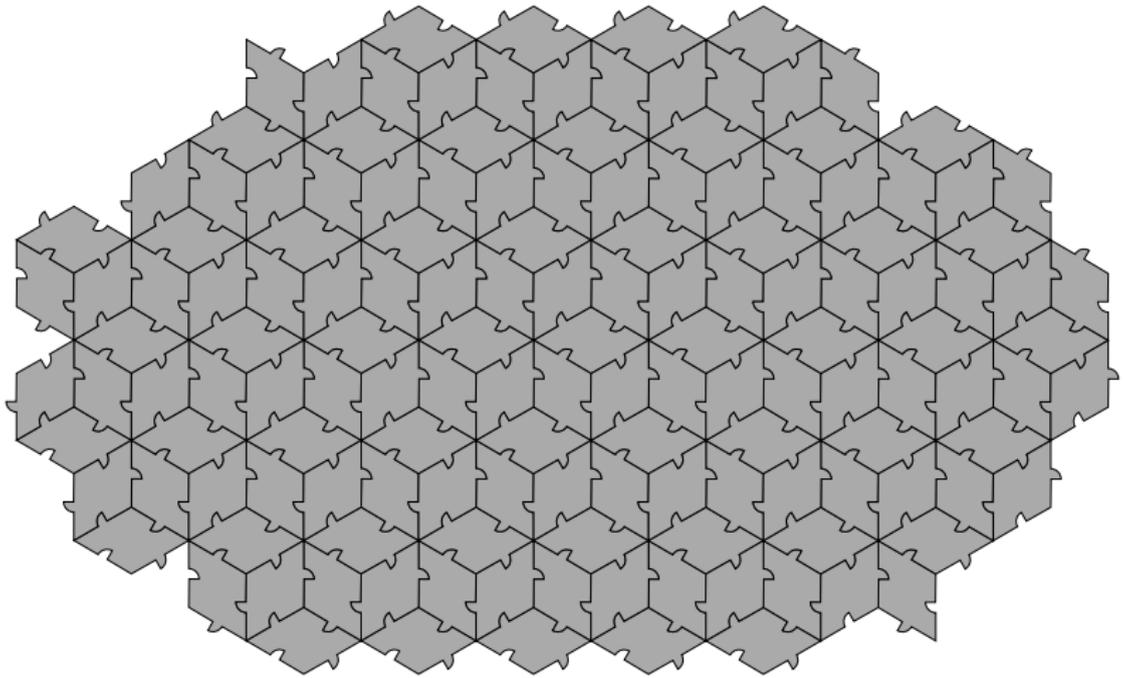
# Puzzle N°1



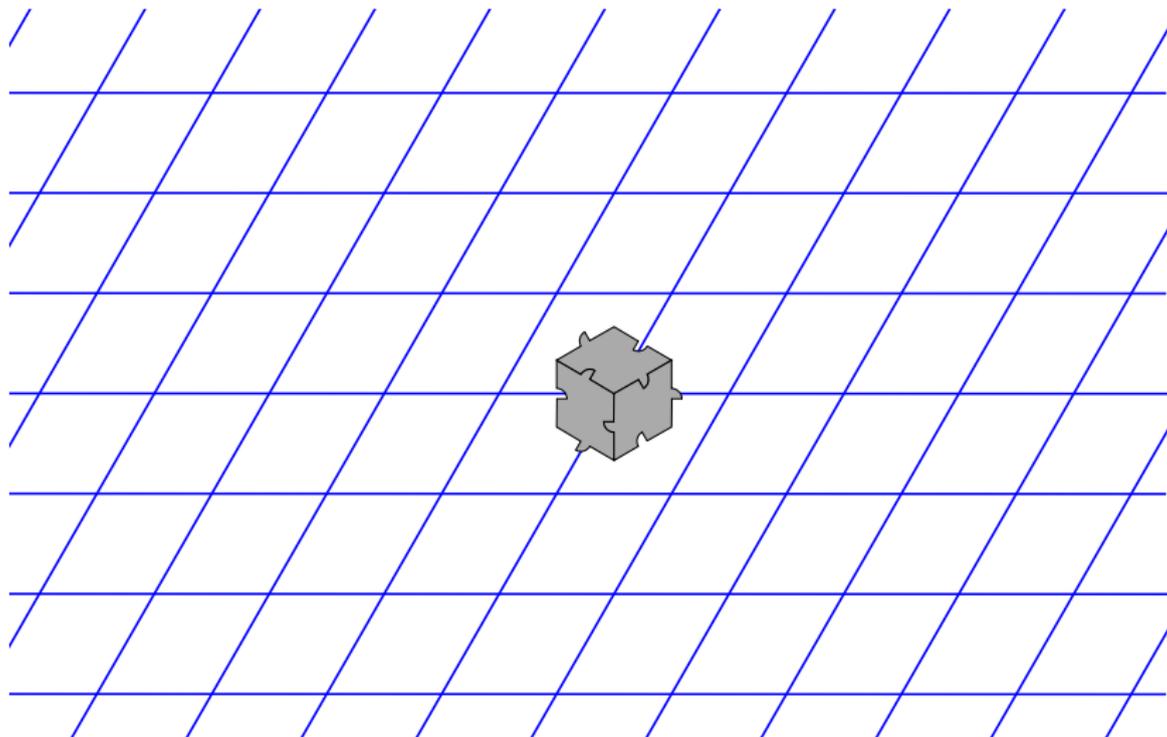
# Puzzle N°1



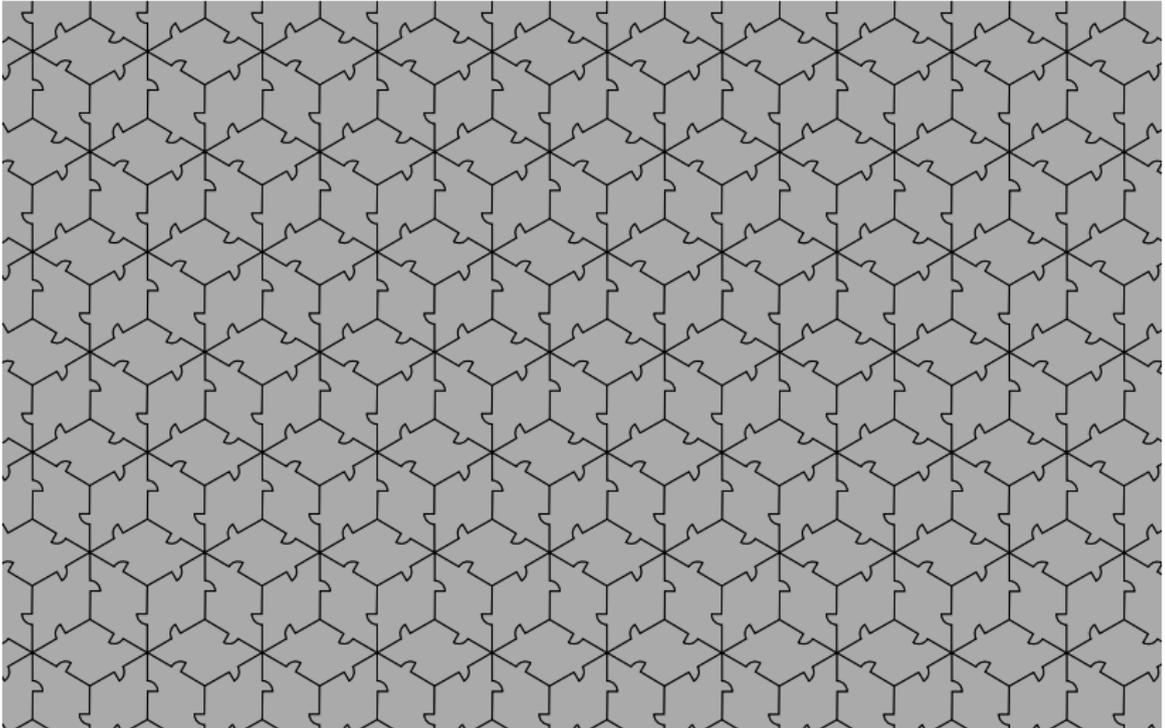
# Puzzle N°1



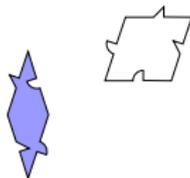
# Solution périodique



# Solution périodique



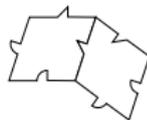
# Puzzle N°2



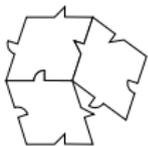
# Puzzle N°2



# Puzzle N°2



# Puzzle N°2



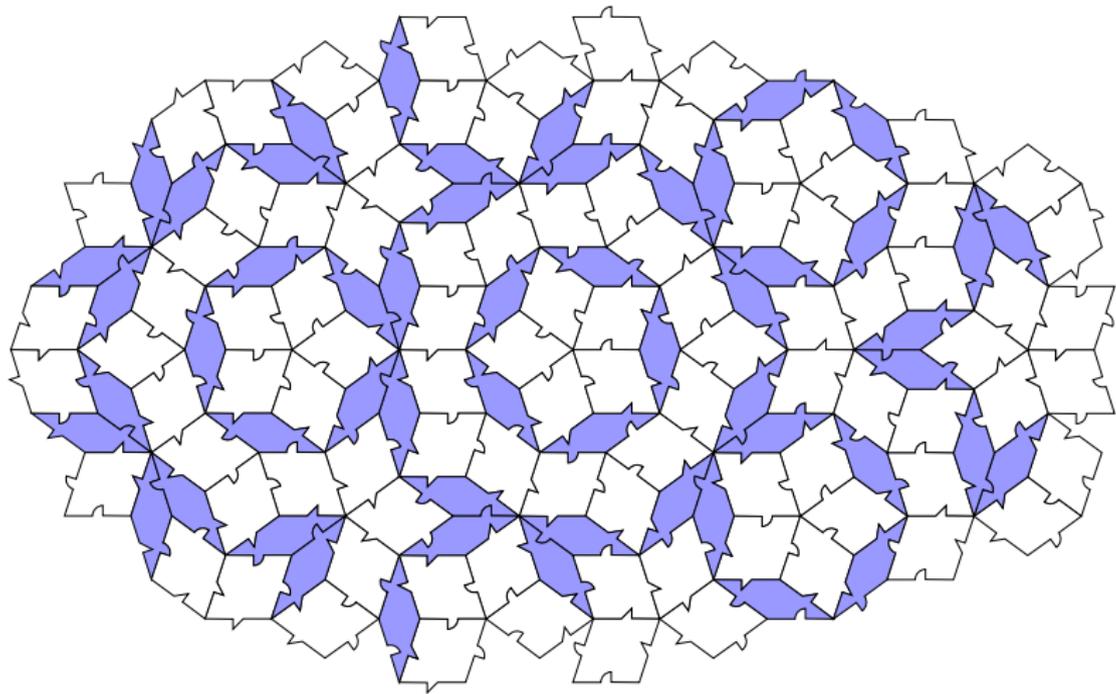
# Puzzle N°2



# Puzzle N°2



# Puzzle N°2



# Apériodicité

Puzzle apériodique : peut paver le plan, mais pas périodiquement.

# Apériodicité

**Puzzle apériodique** : peut paver le plan, mais pas périodiquement.

Berger (1964) : premier puzzle apériodique (20426 pièces).

Penrose (1974) : le puzzle N°2 est apériodique.

# Apériodicité

**Puzzle apériodique** : peut paver le plan, mais pas périodiquement.

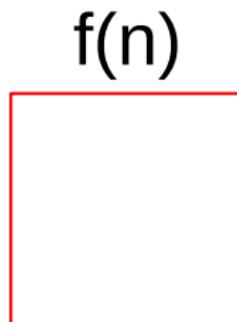
Berger (1964) : premier puzzle apériodique (20426 pièces).

Penrose (1974) : le puzzle N°2 est apériodique.

Remarque : on peut toujours se tromper en faisant ces puzzles. . .

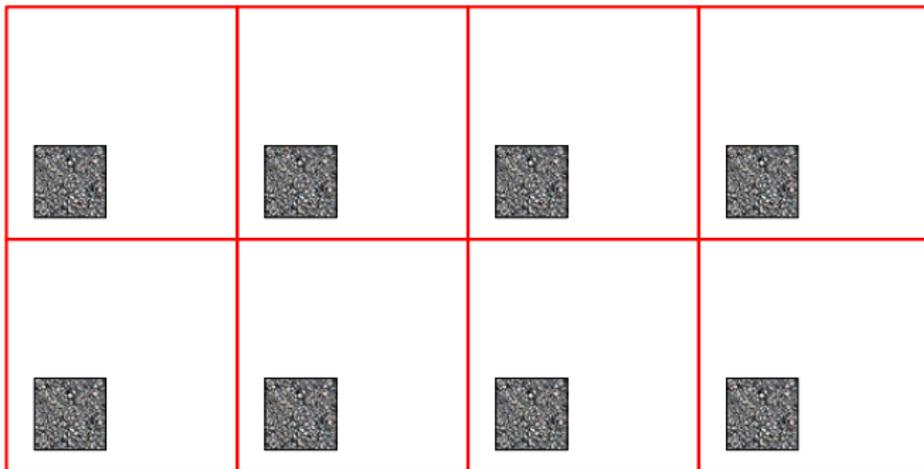
# Solution quasipériodique

**Solution quasipériodique** : un motif de taille  $n$  qui apparaît quelque part réapparaît à distance au plus  $f(n)$  de n'importe quel point.



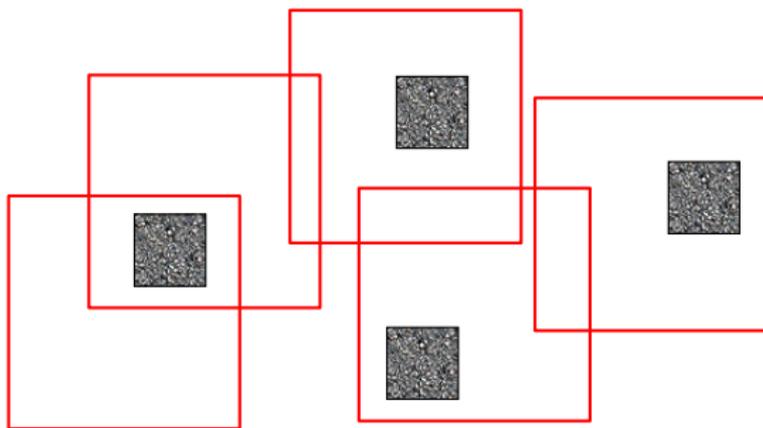
# Solution quasipériodique

**Solution quasipériodique** : un motif de taille  $n$  qui apparaît quelque part réapparaît à distance au plus  $f(n)$  de n'importe quel point.



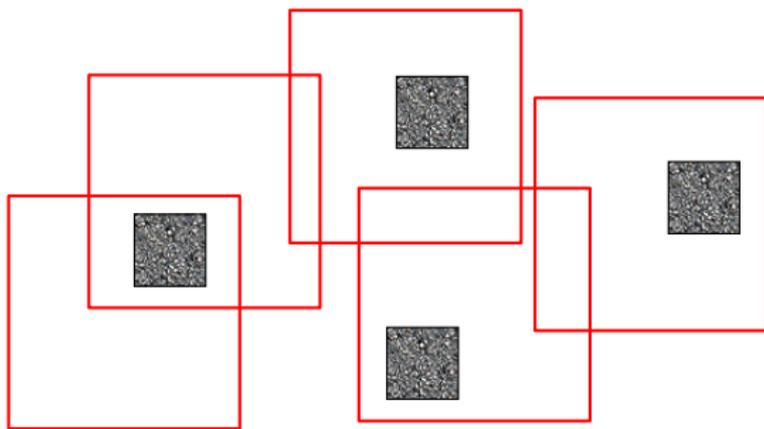
# Solution quasipériodique

**Solution quasipériodique** : un motif de taille  $n$  qui apparaît quelque part réapparaît à distance au plus  $f(n)$  de n'importe quel point.



# Solution quasipériodique

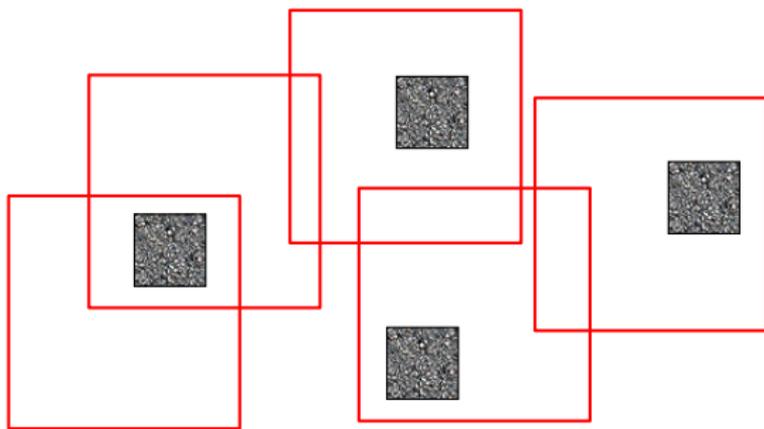
**Solution quasipériodique** : un motif de taille  $n$  qui apparaît quelque part réapparaît à distance au plus  $f(n)$  de n'importe quel point.



Birkhoff (1912) : s'il y a une solution, il y en a une quasipériodique.

# Solution quasipériodique

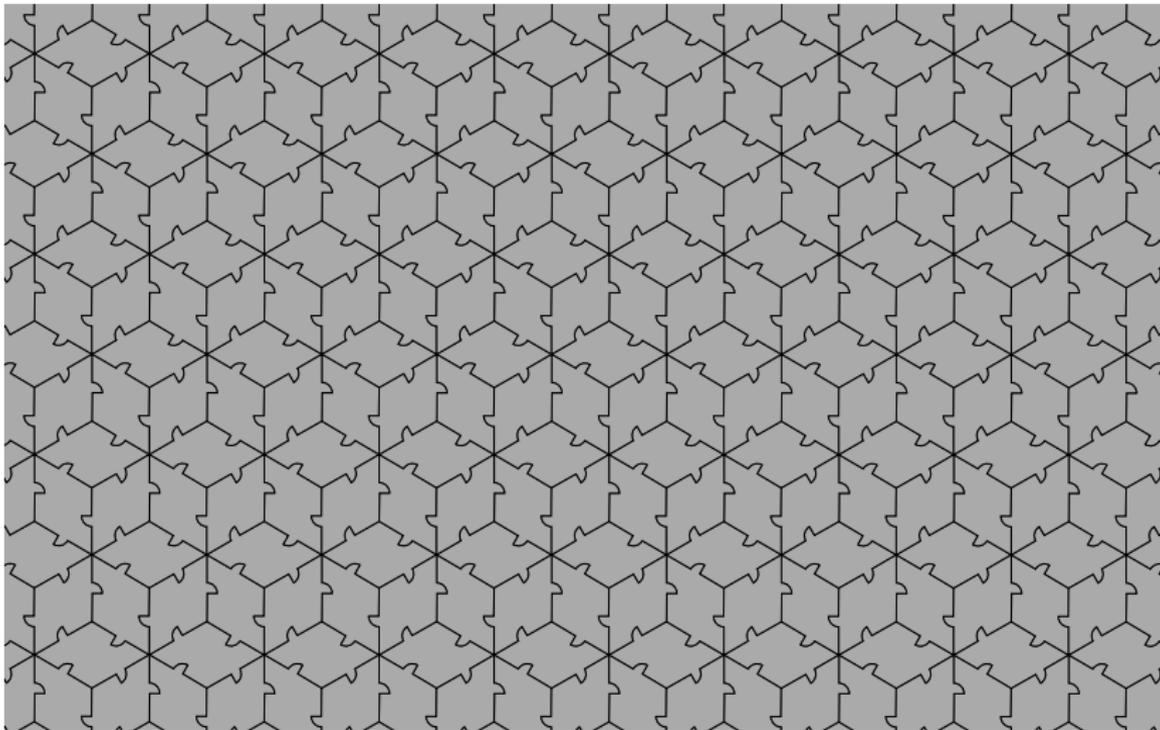
**Solution quasipériodique** : un motif de taille  $n$  qui apparaît quelque part réapparaît à distance au plus  $f(n)$  de n'importe quel point.



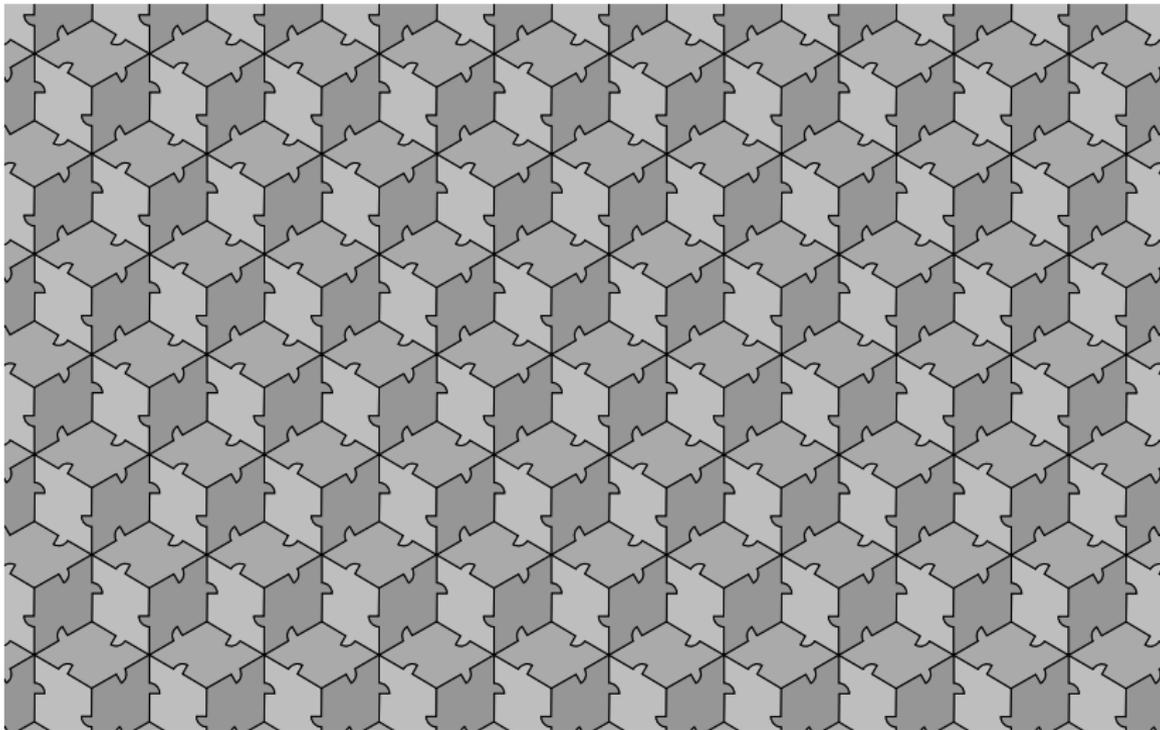
Birkhoff (1912) : s'il y a une solution, il y en a une quasipériodique.

DeBruijn (1981) : les solutions du puzzle  $N^{\circ}2$  sont quasipériodiques.

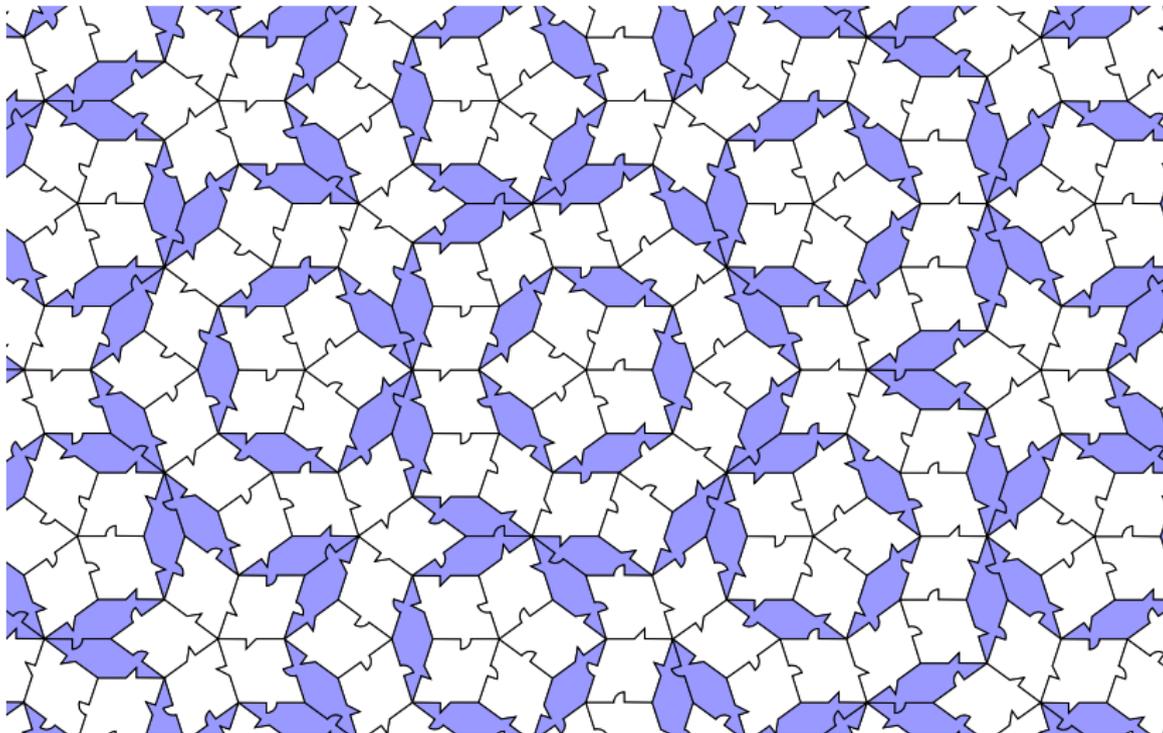
# Prenons un peu de hauteur



# Prenons un peu de hauteur



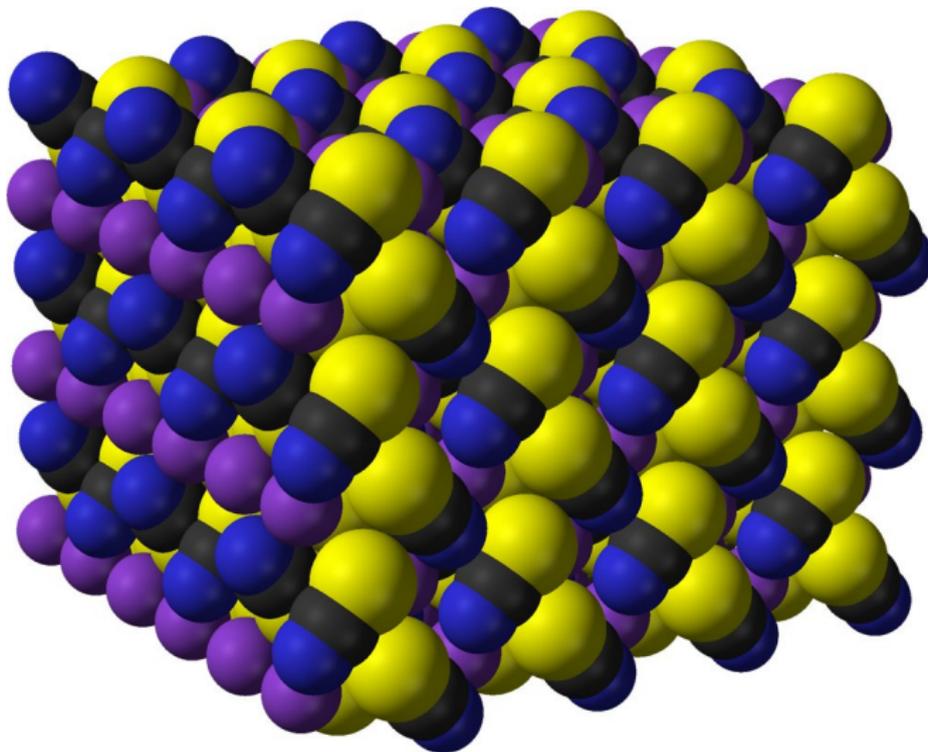
# Prenons un peu de hauteur



# Menu

- 1 Quasipériodicité
- 2 **Quasicristaux**
- 3 Indécidabilité

# Cristaux avant 1982 : empilements périodiques d'atomes



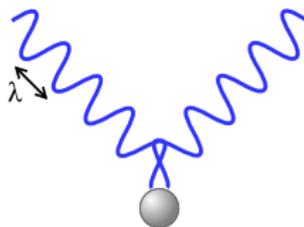
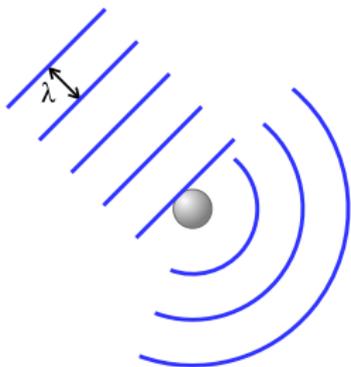
# Ondes

**Onde** : propagation d'une perturbation ; une onde transporte de l'énergie sans transporter de matière.



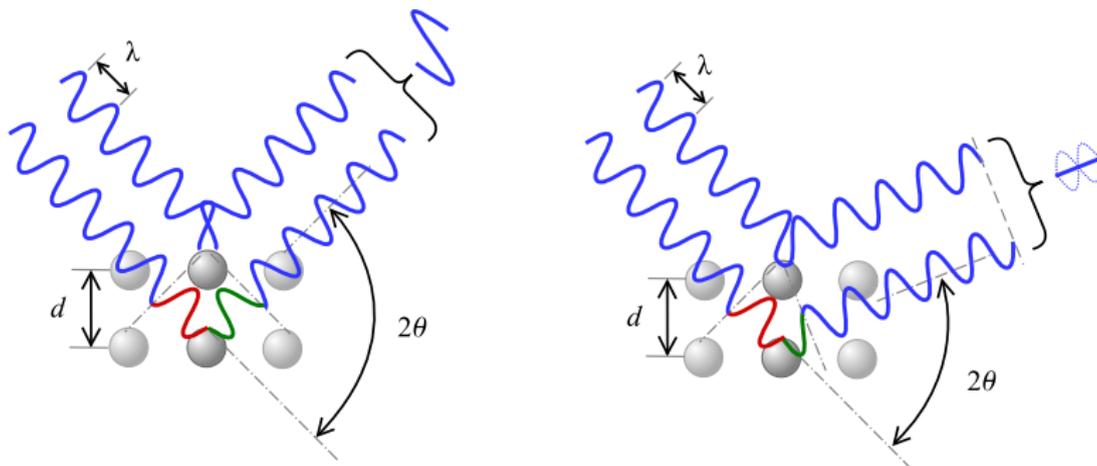
**Exemples** : vague, son, onde radio, lumière, rayons X. . .

# Diffusion d'une onde par un atome



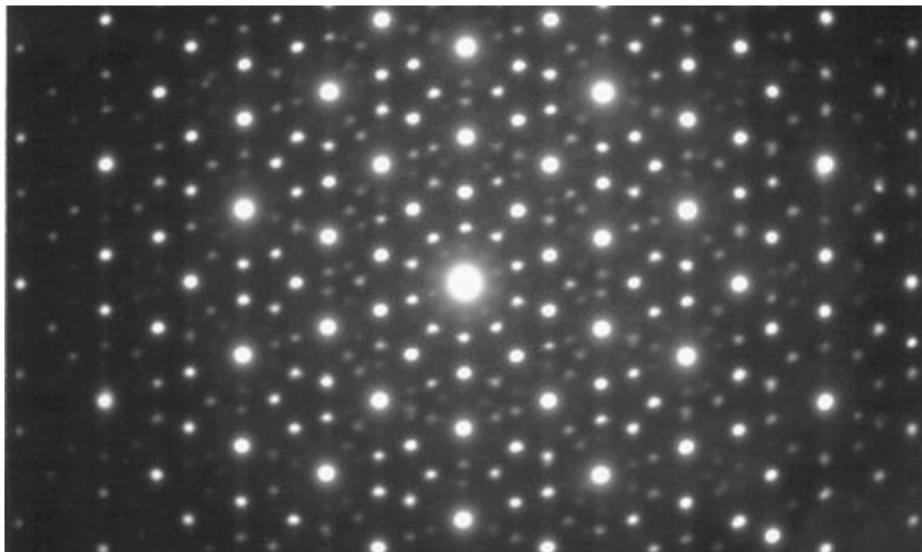
Onde frappant un atome  $\rightsquigarrow$  réémission d'une onde sphérique.

# Interférences



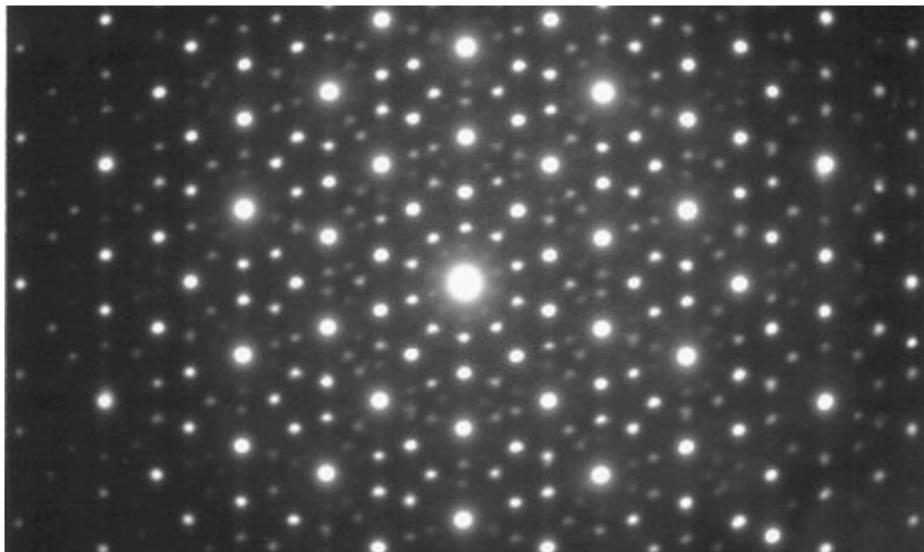
Plusieurs atomes  $\rightsquigarrow$  interférences  $\rightsquigarrow$  diffractogramme.

## Cristaux depuis 1992 : diffractogramme discret



Empilement périodique d'atomes  $\Rightarrow$  diffractogramme discret.

## Cristaux depuis 1992 : diffractogramme discret



Empilement périodique d'atomes  $\neq$  diffractogramme discret.

# Classification de ces nouveaux cristaux ?

1 H																	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	57 -71	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	89 -103	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cn	113 Uut	114 Fl	115 Uup	116 Lv	117 Uus	118 Uuo

57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

- Known in antiquity
- also known when (akw) Lavoisier published his list of elements (1789)
- akw Mendeleev published his periodic table (1869)
- akw Deming published his periodic table (1923)
- akw Seaborg published his periodic table (1945)
- also known (ak) up to 2000
- ak to 2012

# Menu

- 1 Quasipériodicité
- 2 Quasicristaux
- 3 Indécidabilité**

## L'exploitation de la machine par l'homme ?

**Problème du puzzle** : étant donné un nombre fini de pièces de puzzle, existe-t-il au moins une solution couvrant tout le plan ?

## L'exploitation de la machine par l'homme ?

**Problème du puzzle** : étant donné un nombre fini de pièces de puzzle, existe-t-il au moins une solution couvrant tout le plan ?

Approche naturelle : couvrir des zones de plus en plus grandes,

- répondre “non” si on trouve une zone qu'on ne peut couvrir ;
- répondre “oui” si on trouve un motif qu'on peut répéter.

Ça risque d'être long, mais on peut utiliser un ordinateur !

# Problème N°1 : c'est très long...

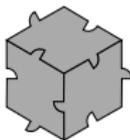
Il existe généralement beaucoup de façons de couvrir une zone.



Exemple : un million de dollars pour qui résout le puzzle *Eternity II*

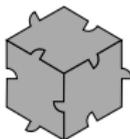
## Problème N°2 : c'est vraiment très long...

Si on trouve un motif qu'on peut répéter périodiquement : OK.



## Problème N°2 : c'est vraiment très long...

Si on trouve un motif qu'on peut répéter périodiquement : OK.



Mais si le puzzle est apériodique ? !

# La Défaite d'Allègre

Berger (1964) : le problème du puzzle est *indécidable*.

**Problème décidable** : il existe un programme qui répond “oui” ou “non” correctement à chaque instance du problème.

Exemple : la parité d'un nombre entier est décidable.

## Ingrédient N°1 : le problème de l'arrêt

**Problème de l'arrêt** : un programme s'arrête ou s'exécute sans fin ?

Turing (1936) : le problème de l'arrêt est indécidable.

# Ingrédient N°1 : le problème de l'arrêt

**Problème de l'arrêt** : un programme s'arrête ou s'exécute sans fin ?

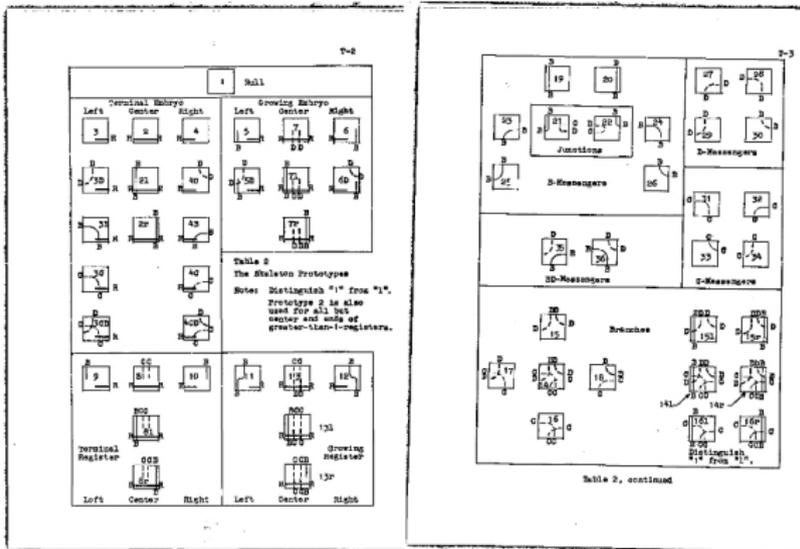
Turing (1936) : le problème de l'arrêt est indécidable.

S'il existait un programme `arret()` qui décidait l'arrêt :

`P()` :

```
si arret(P())="oui" alors
    boucler sans fin
sinon
    s'arrêter
```

# Ingrédient N°2 : des puzzles qui calculent



Exécuter un programme  $\Leftrightarrow$  faire un puzzle (apériodique).  
Exécution sans fin  $\Leftrightarrow$  solution du puzzle.

## Conclusion

- Des mathématiques ludiques
- Des mathématiques utiles
- Des mathématiciens irremplaçables