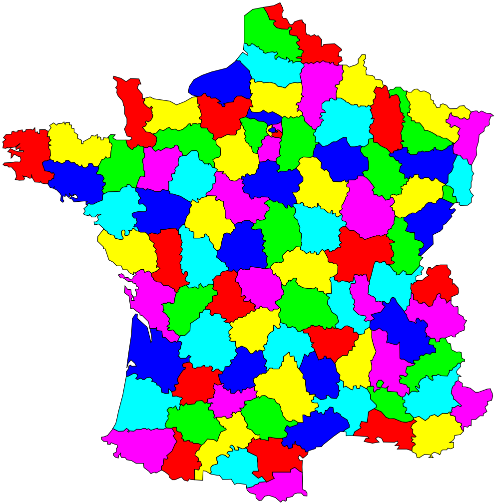
Le Théorème des Quatre Couleurs

Thomas Fernique

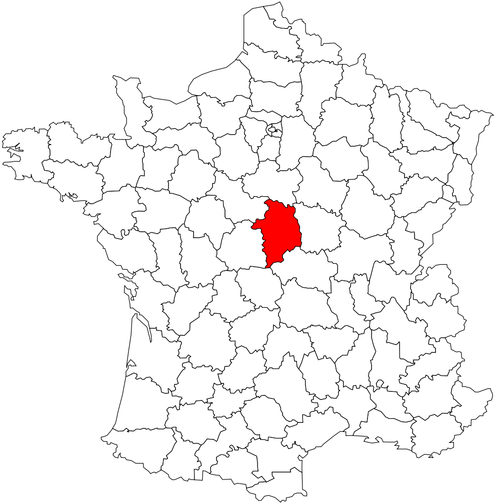
Laboratoire d'Informatique de Paris Nord

Coloriage de carte



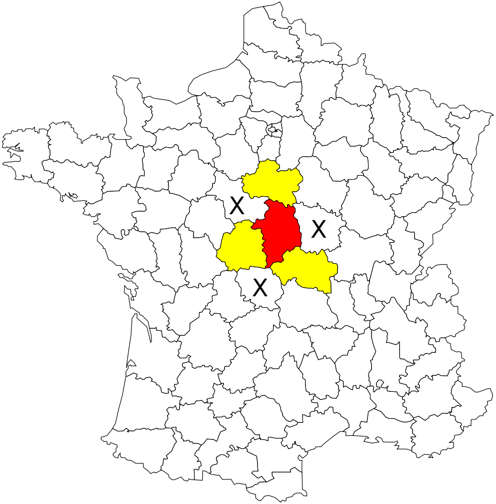
Des pays voisins ont des couleurs différentes. Combien de couleurs ?

Une couleur



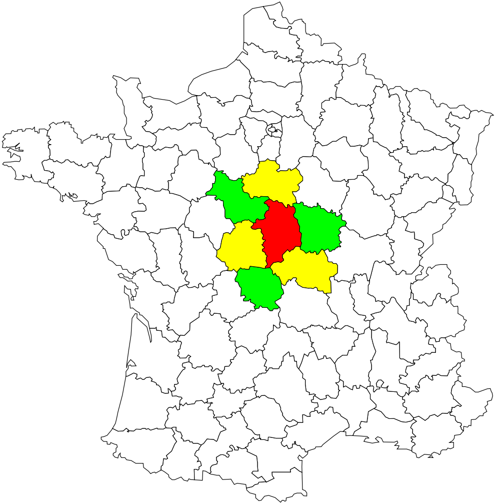
Très limité. . .

Deux couleurs



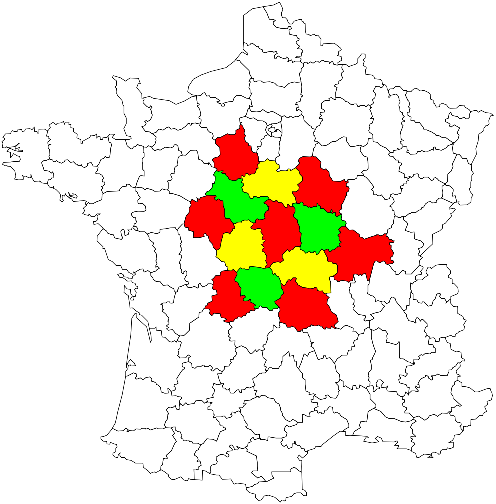
Coloriage sans choix $\rightsquigarrow$ erreur. Il faut donc une troisième couleur !

Trois couleurs



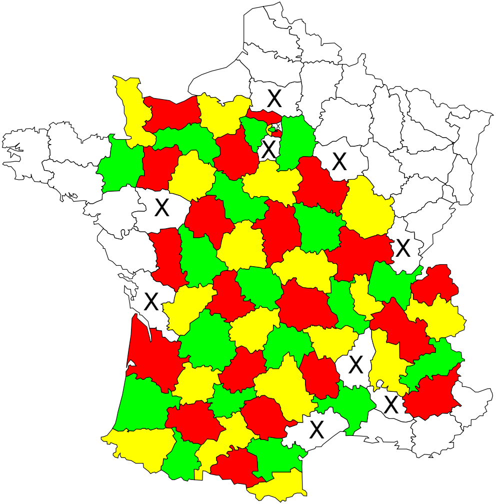
Essayons de colorier sans jamais faire de choix.

Trois couleurs



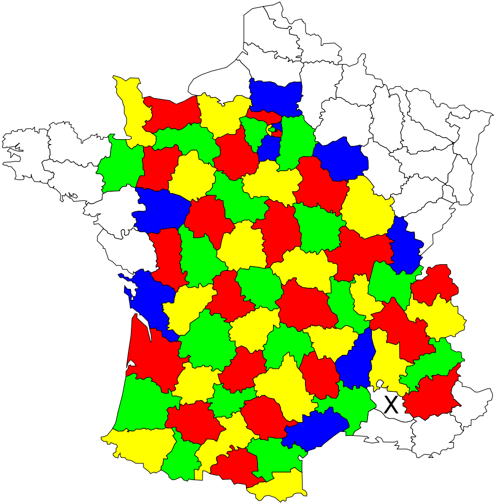
Essayons de colorier sans jamais faire de choix.

Trois couleurs



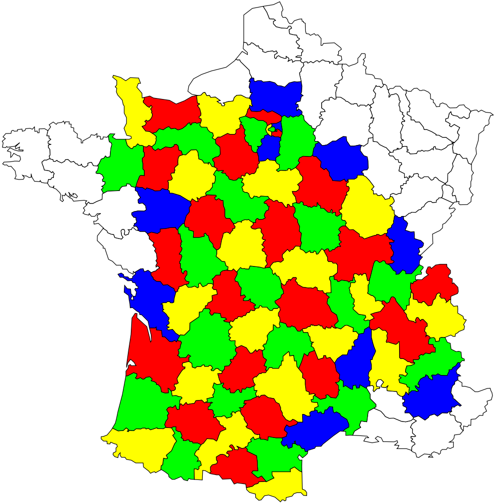
Erreur $\rightsquigarrow$ il faut nécessairement une quatrième couleur !

Quatre couleurs



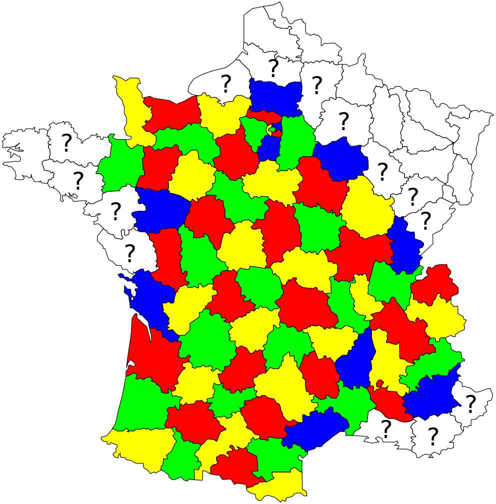
Encore une erreur ! Faut-il donc une cinquième couleur ?

Quatre couleurs



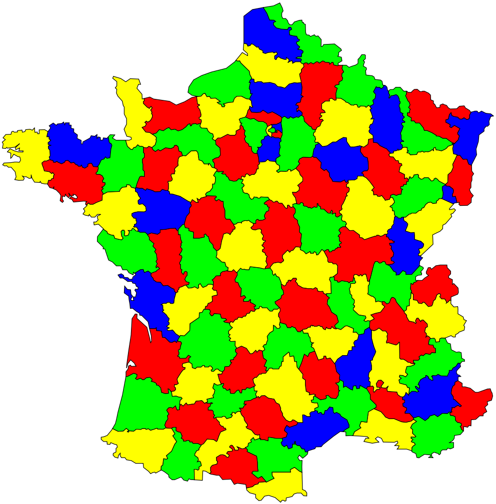
Non car on aurait pu faire un autre choix. . .

Quatre couleurs



Non car on aurait pu faire un autre choix... et ce n'est pas fini !

Quatre couleurs



Ouf, on a réussi ! Est-ce juste un coup de chance avec cette carte ?

Microbes

Conjecture (Guthrie, 1852)

Toute carte est coloriable avec au plus quatre couleurs.

Microbes

Conjecture (Guthrie, 1852)

Toute carte est coloriable avec au plus quatre couleurs.

On ne peut pas vérifier *toutes* les cartes car il y en a une infinité.

Microbes

Conjecture (Guthrie, 1852)

Toute carte est coloriable avec au plus quatre couleurs.

On ne peut pas vérifier *toutes* les cartes car il y en a une infinité.

De deux choses l'une : soit c'est vrai, soit c'est faux...

Microbes

Conjecture (Guthrie, 1852)

Toute carte est coloriable avec au plus quatre couleurs.

On ne peut pas vérifier *toutes* les cartes car il y en a une infinité.

De deux choses l'une : soit c'est vrai, soit c'est faux...

Si c'est faux, il y a des cartes nécessitant au moins cinq couleurs.
Celles qui ont le plus petit nombre de pays sont appelées **microbes**.

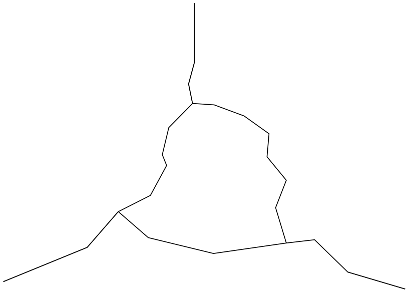
La question devient : les microbes existent-ils ?

Anticorps

Anticorps : configuration qui ne peut pas être dans un microbe.

Théorème

Un triangle est un anticorps



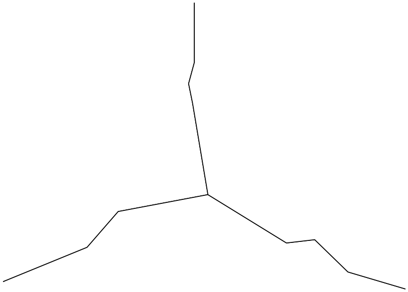
Supposons qu'un microbe ait un pays entouré de trois pays.

Anticorps

Anticorps : configuration qui ne peut pas être dans un microbe.

Théorème

Un triangle est un anticorps



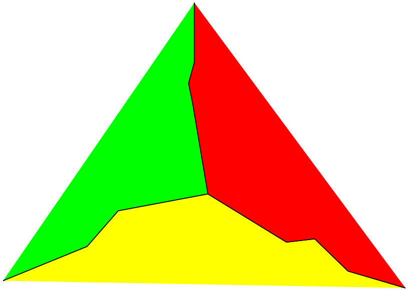
Le réduire à un point donne une carte avec un pays de moins.

Anticorps

Anticorps : configuration qui ne peut pas être dans un microbe.

Théorème

Un triangle est un anticorps



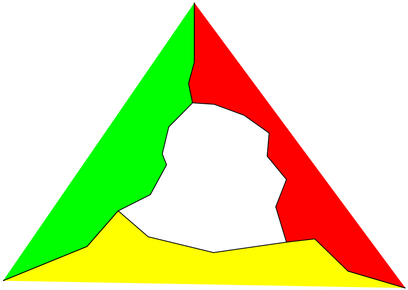
Ce n'est donc pas un microbe : elle est coloriable.

Anticorps

Anticorps : configuration qui ne peut pas être dans un microbe.

Théorème

Un triangle est un anticorps



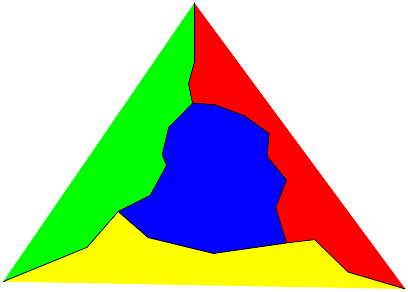
Redilaté, le triangle n'est entouré que de trois couleurs.

Anticorps

Anticorps : configuration qui ne peut pas être dans un microbe.

Théorème

Un triangle est un anticorps

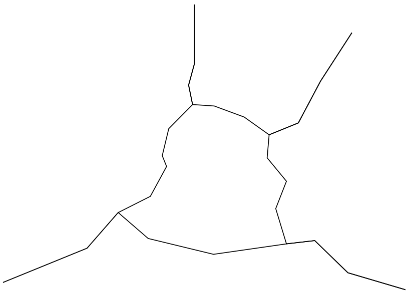


On peut donc utiliser la quatrième. La carte n'est pas un microbe !

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

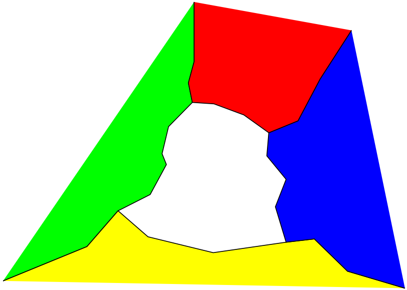


Supposons qu'un microbe ait un pays entouré de quatre pays.

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

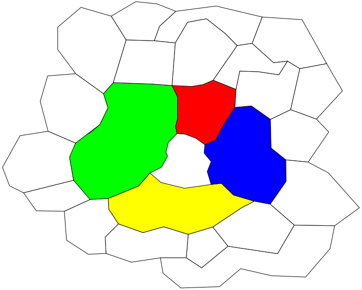


La méthode employée pour le triangle ne marche pas forcément !

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

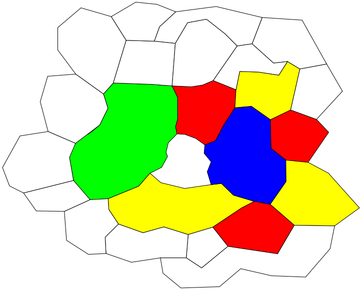


Regardons d'un peu plus loin. Considérons le pays bleu.

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

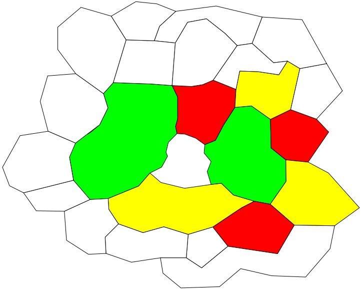


Il se peut qu'il n'ait aucun voisin vert.

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

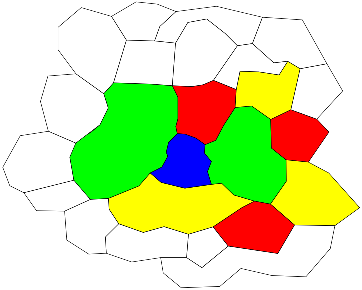


Dans ce cas on peut le recolorier en vert,

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

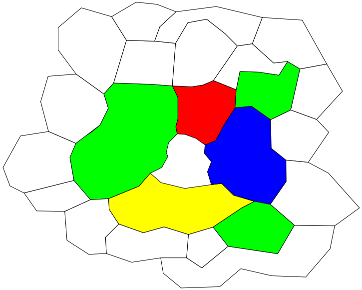


ce qui libère le bleu pour le carré !

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

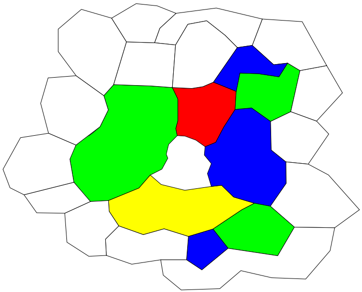


Mais il peut aussi avoir des voisins verts.

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

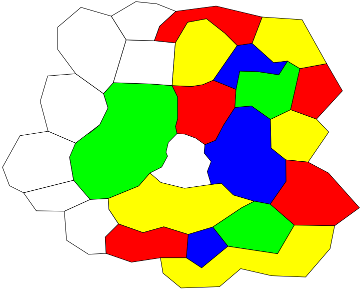


Lesquels peuvent à leur tour avoir d'autres voisins bleus *etc.*

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

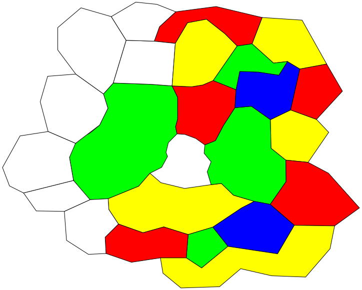


Il se peut qu'on finisse par n'avoir que des voisins jaunes et rouges.

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

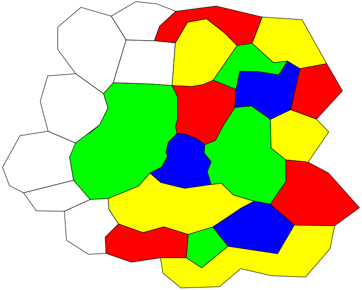


Dans ce cas on peut échanger bleu et vert,

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

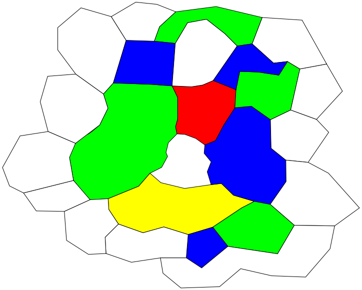


ce qui libère le bleu pour le carré.

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

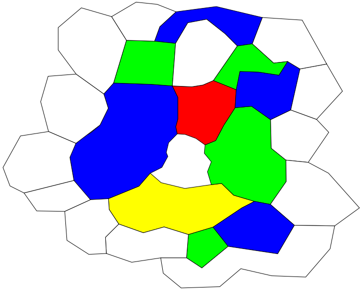


Mais il se peut aussi qu'on boucle sur le voisin vert du carré !

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

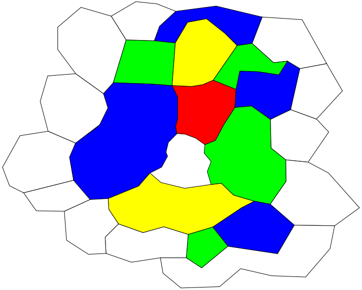


Dans ce cas on ne libère rien en échangeant bleu et vert.

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

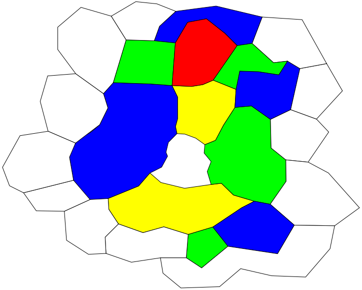


Mais alors il ne peut y avoir de boucle entre jaune et rouge !

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.

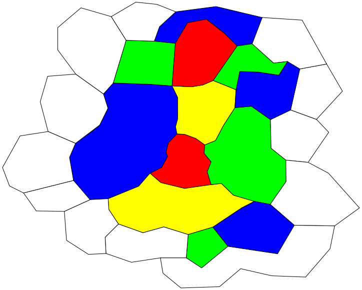


On peut donc libérer rouge (ou jaune) pour le carré.

Chaînes de Kempe

Théorème (Kempe, 1879)

Le carré est un anticorps.



La carte n'est pas un microbe !

Une guérison difficile

Pour montrer que quatre couleurs suffisent toujours, *i.e.*, qu'il n'y a pas de microbes, il faudrait montrer que *toute* carte a un anticorps.

Deux problèmes :

1. Qui sont ces anticorps ?
2. Il y a toujours une infinité de cartes !

Le foot à la rescousse

Théorème

Toute carte a un pays avec au plus 5 voisins.

Preuve : application de la célèbre formule d'Euler ($F - A + S = 1$).

Ensemble inévitable

Un ensemble de configurations est dit **inévitable** si toute carte contient forcément au moins une de ces configurations.

Il suffit alors de montrer que chaque configuration est un anticorps !

Ensemble inévitable

Un ensemble de configurations est dit **inévitable** si toute carte contient forcément au moins une de ces configurations.

Il suffit alors de montrer que chaque configuration est un anticorps !

Théorème (Kempe, 1879)

Le pentagone est un anticorps.

Ensemble inévitable

Un ensemble de configurations est dit **inévitable** si toute carte contient forcément au moins une de ces configurations.

Il suffit alors de montrer que chaque configuration est un anticorps !

Théorème (Kempe, 1879)

Le pentagone est un anticorps.

Preuve : fausse !

Ensemble inévitable

Un ensemble de configurations est dit **inévitable** si toute carte contient forcément au moins une de ces configurations.

Il suffit alors de montrer que chaque configuration est un anticorps !

Théorème (Kempe, 1879)

Le pentagone est un anticorps.

Preuve : fausse ! Mais marche néanmoins pour cinq couleurs...

Au travail !

But : trouver un ensemble inévitable d'anticorps. . . ou un microbe !

Des dizaines de mathématiciens travaillèrent presque un siècle. . .

L'ordinateur à la rescousse

Théorème (Appel-Haken, 1976)

Il existe un ensemble inévitable de 1482 anticorps.

Un travail collaboratif de longue haleine

Conjecture en 1852, preuve en 1976 (124 ans).

Georges Birkhoff : "tout mathématicien sérieux s'y est intéressé."

Un travail collaboratif de longue haleine

Conjecture en 1852, preuve en 1976 (124 ans).

Georges Birkhoff : “tout mathématicien sérieux s’y est intéressé.”
Sa femme : “il m’a fait colorier des cartes notre nuit de noces !”

Un travail collaboratif de longue haleine

Conjecture en 1852, preuve en 1976 (124 ans).

Georges Birkhoff : "tout mathématicien sérieux s'y est intéressé."
Sa femme : "il m'a fait colorier des cartes notre nuit de noces !"

On peut distinguer (outre Kenneth Appel et Wolfgang Haken) :

- Alfred Kempe : preuve fausse mais avec la plupart des idées ;
- Heinrich Heesch : méthode pour trouver des ensembles inévitables, heuristiques pour "débusquer" les anticorps...

Un travail collaboratif de longue haleine

Conjecture en 1852, preuve en 1976 (124 ans).

Georges Birkhoff : “tout mathématicien sérieux s’y est intéressé.”
Sa femme : “il m’a fait colorier des cartes notre nuit de noces !”

On peut distinguer (outre Kenneth Appel et Wolfgang Haken) :

- Alfred Kempe : preuve fausse mais avec la plupart des idées ;
- Heinrich Heesch : méthode pour trouver des ensembles inévitables, heuristiques pour “débusquer” les anticorps. . .

La dernière décennie fut une course entre différentes équipes. . .
qui partagèrent néanmoins à peu près leurs progrès et méthodes.

Mais est-ce une preuve ?

Quelques chiffres :

- 487 “règles de déchargement” pour trouver les inévitables...
- 1200 heures de calcul pour vérifier qu’ils sont des anticorps...
- Plusieurs millions de pages si on imprime tous les calculs...

Est-ce une preuve ?

Mais est-ce une preuve ?

Quelques chiffres :

- 487 “règles de déchargement” pour trouver les inévitables. . .
- 1200 heures de calcul pour vérifier qu’ils sont des anticorps. . .
- Plusieurs millions de pages si on imprime tous les calculs. . .

Est-ce une preuve ?

Le mathématicien : “Non, car une preuve est un raisonnement déductif qui est vérifiable, explicatif et de préférence esthétique.”

Mais est-ce une preuve ?

Quelques chiffres :

- 487 “règles de déchargement” pour trouver les inévitables. . .
- 1200 heures de calcul pour vérifier qu’ils sont des anticorps. . .
- Plusieurs millions de pages si on imprime tous les calculs. . .

Est-ce une preuve ?

Le mathématicien : “Non, car une preuve est un raisonnement déductif qui est vérifiable, explicatif et de préférence esthétique.”

Le logicien : “Calculer c’est aussi prouver ($\pi = 3,14159265\ldots$), explicatif est subjectif et l’esthétique est illusoire. . . ”

La fin de l'histoire

Théorème (Robertson *et al.*, 1994)

Il existe un ensemble inévitable de 633 anticorps.

Preuve similaire mais plus simple (32 règles de déchargement).

La fin de l'histoire

Théorème (Robertson *et al.*, 1994)

Il existe un ensemble inévitable de 633 anticorps.

Preuve similaire mais plus simple (32 règles de déchargement).

Théorème (Gonthier-Werner, 2005)

La preuve de Roberson *et al.* est correcte.

Preuve formelle via un **assistant de preuve** (COQ).

La fin de l'histoire

Théorème (Robertson *et al.*, 1994)

Il existe un ensemble inévitable de 633 anticorps.

Preuve similaire mais plus simple (32 règles de déchargement).

Théorème (Gonthier-Werner, 2005)

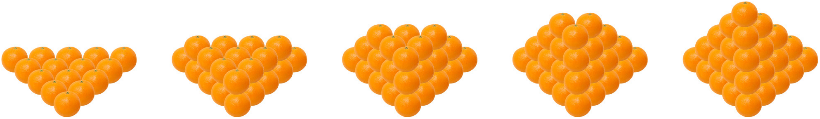
La preuve de Roberson *et al.* est correcte.

Preuve formelle via un **assistant de preuve** (COQ).

Un cas isolé anormalement compliqué qu'on oubliera ?

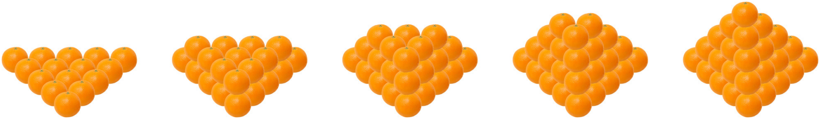
Le futur ?

Encore pire que colorier des cartes, empiler des oranges :



Le futur ?

Encore pire que colorier des cartes, empiler des oranges :



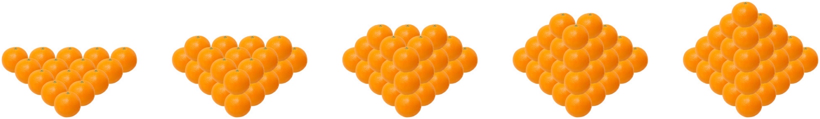
Théorème (Hales, 1998)

La meilleure façon d'empiler les oranges est bien celle qu'on pense.

Conjecture de Kepler en 1611. Preuve formelle de Hales en 2014.

Le futur ?

Encore pire que colorier des cartes, empiler des oranges :



Théorème (Hales, 1998)

La meilleure façon d'empiler les oranges est bien celle qu'on pense.

Conjecture de Kepler en 1611.   Preuve formelle de Hales en 2014.

Des preuves toujours plus longues, calculatoires et formalisées ?

Le Théorème des Quatre Couleurs

Thomas Fernique

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord