

Savez-vous rendre les sous ?

Thomas Fernique

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord

Savante Banlieue 2012

Où l'on achète un timbre



Où l'on achète un timbre



=



+



Où l'on achète un timbre



Où l'on achète un timbre



Où l'on achète un timbre



Algorithme glouton



Algorithme : suite d'instructions à suivre pas à pas.

Algorithme glouton



Glouton : rendre toujours la plus grosse pièce possible.

Algorithme glouton



L'algorithme glouton est-il toujours optimal ?

Le Changement, c'est maintenant



Mi-février 2014, les pièces de 2 et 5 centimes seront remplacées par une unique pièce de 7 centimes, et celles de 20 et 50 par une de 70.

Le Changement, c'est maintenant



Mi-février 2014, les pièces de 2 et 5 centimes seront remplacées par une unique pièce de 7 centimes, et celles de 20 et 50 par une de 70.

Le Changement, c'est maintenant



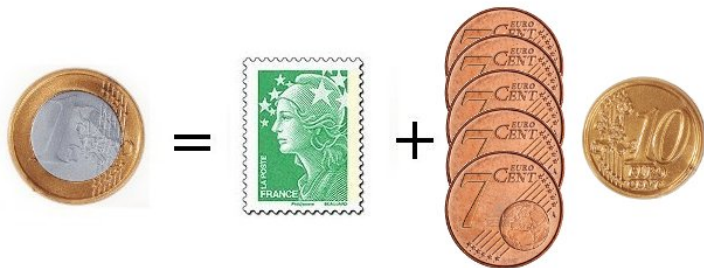
Comment rendre 45 centimes avec des pièces de 1, 7, 10 et 70 ?

Le Changement, c'est maintenant



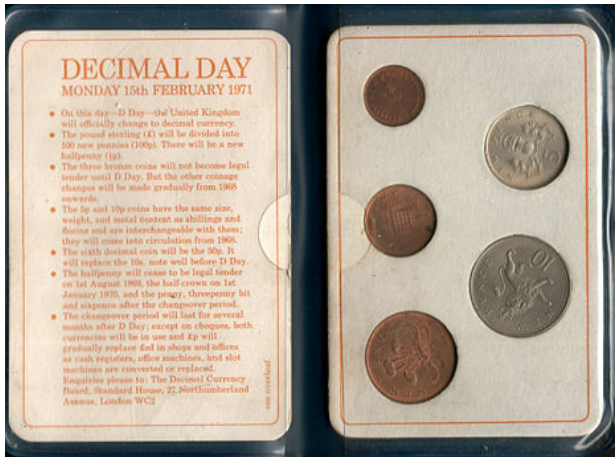
L'algorithme glouton rend quatre pièces de 10 et cinq de 1.

Le Changement, c'est maintenant



On “gagne” trois pièces en rendant une pièce de 10 et cinq de 7!

Le D-Day



Mi-février 1971 : création des pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 pences.

Le D-Day



Les pièces qu'elles remplacent valaient 1, 3, 6, 12, 24 et 30 pences.

Le D-Day

Old £sd	New £p	Old £sd	New £p	Old £sd	New £p	Old £sd	New £p	Old £sd	New £p
1	$\frac{1}{2}$	2/-	10	4/-	20	6/-	30	8/-	40
2	1	2/1	10 $\frac{1}{2}$	4/1	20 $\frac{1}{2}$	6/1	30 $\frac{1}{2}$	8/1	40 $\frac{1}{2}$
3	1	2/2	11	4/2	21	6/2	31	8/2	41
4	1 $\frac{1}{2}$	2/3	11	4/3	21	6/3	31	8/3	41
5	2	2/4	11 $\frac{1}{2}$	4/4	21 $\frac{1}{2}$	6/4	31 $\frac{1}{2}$	8/4	41 $\frac{1}{2}$
		2/5	12	4/5	22	6/5	32	8/5	42
6	2 $\frac{1}{2}$	2/6	12 $\frac{1}{2}$	4/6	22 $\frac{1}{2}$	6/6	32 $\frac{1}{2}$	8/6	42 $\frac{1}{2}$
7	3	2/7	13	4/7	23	6/7	33	8/7	43
8	3 $\frac{1}{2}$	2/8	13 $\frac{1}{2}$	4/8	23 $\frac{1}{2}$	6/8	33 $\frac{1}{2}$	8/8	43 $\frac{1}{2}$
9	4	2/9	14	4/9	24	6/9	34	8/9	44
10	4	2/10	14	4/10	24	6/10	34	8/10	44
11	4 $\frac{1}{2}$	2/11	14 $\frac{1}{2}$	4/11	24 $\frac{1}{2}$	6/11	34 $\frac{1}{2}$	8/11	44 $\frac{1}{2}$
1/-	5	3/-	15	5/-	25	7/-	35	9/-	45
1/1	5 $\frac{1}{2}$	3/1	15 $\frac{1}{2}$	5/1	25 $\frac{1}{2}$	7/1	35 $\frac{1}{2}$	9/1	45 $\frac{1}{2}$
1/2	6	3/2	16	5/2	26	7/2	36	9/2	46
1/3	6	3/3	16	5/3	26	7/3	36	9/3	46
1/4	6 $\frac{1}{2}$	3/4	16 $\frac{1}{2}$	5/4	26 $\frac{1}{2}$	7/4	36 $\frac{1}{2}$	9/4	46 $\frac{1}{2}$
1/5	7	3/5	17	5/5	27	7/5	37	9/5	47
1/6	7 $\frac{1}{2}$	3/6	17 $\frac{1}{2}$	5/6	27 $\frac{1}{2}$	7/6	37 $\frac{1}{2}$	9/6	47 $\frac{1}{2}$
1/7	8	3/7	18	5/7	28	7/7	38	9/7	48
1/8	8 $\frac{1}{2}$	3/8	18 $\frac{1}{2}$	5/8	28 $\frac{1}{2}$	7/8	38 $\frac{1}{2}$	9/8	48 $\frac{1}{2}$
1/9	9	3/9	19	5/9	29	7/9	39	9/9	49
1/10	9	3/10	19	5/10	29	7/10	39	9/10	49
1/11	9 $\frac{1}{2}$	3/11	19 $\frac{1}{2}$	5/11	29 $\frac{1}{2}$	7/11	39 $\frac{1}{2}$	9/11	49 $\frac{1}{2}$

Shoppers' table



This table will help you to check decimal prices against previous £sd prices, but there is no need to learn it by heart.

Remember, shops will charge either £p prices or £sd prices, but not both. You cannot use this table to choose whether you pay the £sd or the £p price.



Qu'est-ce qui a bien pu pousser les Anglais à se rallier à Napoléon ?

Quand glouton rit !

Un jeu de pièces est dit **canonique** si glouton est toujours optimal.

Quand glouton rit !

Un jeu de pièces est dit **canonique** si glouton est toujours optimal.

Théorème (Kozen & Zaks, 1994)

Si glouton est optimal jusqu'à la somme des deux plus grandes pièces d'un jeu, alors il est optimal pour n'importe quelle valeur.

Quand glouton rit !

Un jeu de pièces est dit **canonique** si glouton est toujours optimal.

Théorème (Kozen & Zaks, 1994)

Si glouton est optimal jusqu'à la somme des deux plus grandes pièces d'un jeu, alors il est optimal pour n'importe quelle valeur.

Quels jeux de pièces parmi les suivants sont canoniques ?

- ▶ 1, 2 et 5 centimes ;
- ▶ 1, 4 et 7 centimes ;
- ▶ 1, 7 et 10 centimes.

Quand glouton pleure ?

Comment va-t-on survivre avec nos pièces de 1, 7 et 10 centimes ?

Peut-on rendre 45 centimes en moins de 6 pièces ?

Quand glouton pleure ?

Comment va-t-on survivre avec nos pièces de 1, 7 et 10 centimes ?

Peut-on rendre 45 centimes en moins de 6 pièces ?

Et si on sait qu'il faut au moins 5 pièces pour rendre 35, 38 et 44 ?

Quand glouton pleure ?

Comment va-t-on survivre avec nos pièces de 1, 7 et 10 centimes ?

Peut-on rendre 45 centimes en moins de 6 pièces ?

Et si on sait qu'il faut au moins 5 pièces pour rendre 35, 38 et 44 ?

Peut-on rendre 35, 38 ou 44 en moins de 5 pièces ?

Quand glouton pleure ?

Comment va-t-on survivre avec nos pièces de 1, 7 et 10 centimes ?

Peut-on rendre 45 centimes en moins de 6 pièces ?

Et si on sait qu'il faut au moins 5 pièces pour rendre 35, 38 et 44 ?

Peut-on rendre 35, 38 ou 44 en moins de 5 pièces ?

Il suffit d'itérer jusqu'à tomber sur des valeurs triviales.

Quand glouton pleure ?

Comment va-t-on survivre avec nos pièces de 1, 7 et 10 centimes ?

Peut-on rendre 45 centimes en moins de 6 pièces ?

Et si on sait qu'il faut au moins 5 pièces pour rendre 35, 38 et 44 ?

Peut-on rendre 35, 38 ou 44 en moins de 5 pièces ?

Il suffit d'itérer jusqu'à tomber sur des valeurs triviales.

Astuce pour simplifier : remplir un tableau de 1 à 45 !

Le Facteur temps



Quels calculs pour rendre 99 centimes avec un jeu de 3 pièces ?

Le Facteur temps



Quels calculs pour rendre 99 centimes avec un jeu de 3 pièces ?
Trois divisions à faire s'il est canonique, 99 cases à remplir sinon.

Savez-vous rendre les sous ?

Thomas Fernique

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord

Savante Banlieue 2012