Mots Multidimensionels et Substitutions

Thomas Fernique

LIRMM - Université Montpellier II

25 Novembre 2005

Introduction

1925 H. Bohr introduit la notion de *quasipériodicité* ;

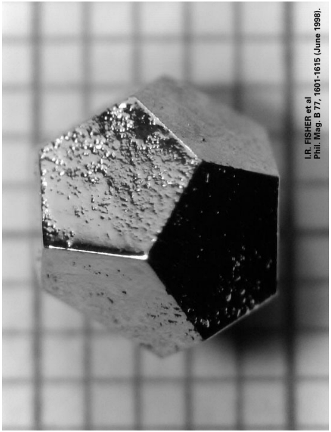
1968 On enseigne à l'école :

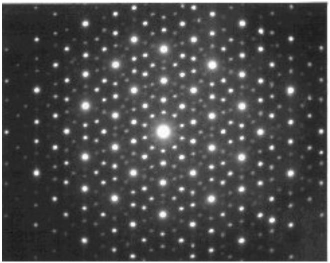
$$\text{cristal} = \text{réseau} + \text{motif} = \text{pics de diffraction} ;$$

1984 D. Shechtman découvre un alliage AlMn invariant par rotation $\frac{\pi}{5}$ et qui a des pics de diffractions ;

1999 les cristaux n'ont pas changé à l'école.

Introduction





1. Mots
   - Périodicité
   - Quasipériodicité
2. Classement par complexité
   - Complexité rectangulaire
   - Cas limites : Sturm et Nivat
   - Un point de vue géométrique
3. Construction par substitutions
   - Le cas unidimensionnel
   - Quelles extensions ?

Definition (Mot d-dimensionnel sur $\mathcal{A}$)

Séquence u indexée de lettres de $\mathcal{A}$ indexée par $\mathbb{Z}^d$: $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$.

$$u = (u(i))_{i\in\mathbb{Z}} = \ldots 0100101001010 \ldots \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}.$$

$$u = (u(i,j))_{i,j\in\mathbb{Z}} = \begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ & 1 & 0 & 0 & \\ \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & \vdots & & \end{array} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}.$$

Definition

$\vec{v} \in \mathbb{Z}^d$ est *vecteur de périodicité* pour $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ si :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d, \quad u(\vec{x}) + k\vec{v} = u(\vec{x}).$$

u est périodique s'il admet $r > 0$ vecteurs de périodicité (libres).

$$u = \begin{array}{cccccccc} & & & \vdots & \vdots & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ & & & \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

1. Mots
   - Périodicité
   - Quasipériodicité
2. Classement par complexité
   - Complexité rectangulaire
   - Cas limites : Sturm et Nivat
   - Un point de vue géométrique
3. Construction par substitutions
   - Le cas unidimensionnel
   - Quelles extensions ?

Definition (Facteur d'un mot $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$)

Soit $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. Le *facteur* de u de taille $k_1 \times \ldots \times k_d$ en position $\exists(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ est la matrice M :

$$M[i_1, \ldots, i_d] = u(x_1 + i_1, \ldots, x_d + i_d).$$

$u = \ldots 00001111 \ldots \rightsquigarrow$ trois facteurs de taille 2 : 00,01 et 11.

Definition

$u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est *quasipériodique* si $\forall r > 0$, $\exists R > 0$ t.q. $\forall \vec{x} \in \mathbb{Z}^d$, *tout* facteur de taille inférieure à r apparait à une position $\vec{y}$ avec $d(\vec{y}, \vec{x}) \leq R$.

périodicité $\Rightarrow$ quasipériodicité. Réciproque fausse (quasicristaux !).

Definition (Fonction de complexité rectangulaire)

Pour $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$, $p_u(k_1, \ldots, k_d)$ est le nombre de facteurs (distincts) de taille $k_1 \times \ldots \times k_d$.

$$u = \ldots 00001111 \ldots \rightsquigarrow p_u(n) = n + 1.$$

$$u = \ldots 011011011011011 \ldots \rightsquigarrow p_u(n) = 3.$$

Theorem

$u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est d-périodique ssi p_u est bornée.

p_u pour u périodique ? quasipériodique ? apériodique ?

$u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est périodique *ssi* p_u est bornée. Plus fort :

Theorem

$u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est périodique ssi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $p_u(n_0) \leq n_0$.

En particulier, u apériodique $\Rightarrow \forall n,\ p_u(n) \geq n + 1$.

Mots “limite” de complexité $n + 1$: mots de *Sturm*, caractérisés.

Conjecture (Nivat, il y a 8 ans)

Pour $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$:

$$\exists(m_0, n_0) \mid p_u(m_0, n_0) \leq m_0 n_0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ périodique.}$$

- Mots "limite" de complexité $mn + 1$: caractérisés :)
- prouvé si $p_u(m_0, n_0) \leq \frac{m_0 n_0}{16}$:)
- réciproque fausse :(
- généralisation pour $d > 2$ fausse :(

Conjecture (Nivat, il y a 8 ans)

Pour $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$:

$$\exists (m_0, n_0) \mid p_u(m_0, n_0) \leq m_0 n_0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ périodique.}$$

- Mots "limite" de complexité $mn + 1$: caractérisés :)
- prouvé si $p_u(m_0, n_0) \leq \frac{m_0 n_0}{16}$:)
- réciproque fausse :(
- généralisation pour $d > 2$ fausse :(

Conjecture (Nivat, il y a 8 ans)

Pour $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$:

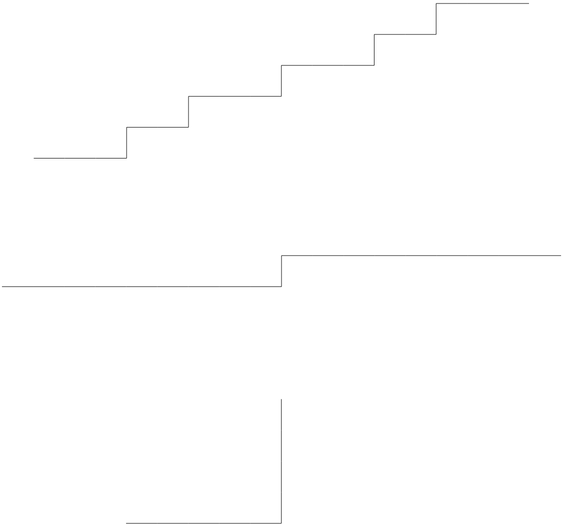
$$\exists (m_0, n_0) \mid p_u(m_0, n_0) \leq m_0 n_0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ périodique.}$$

- Mots "limite" de complexité $mn + 1$: caractérisés :)
- prouvé si $p_u(m_0, n_0) \leq \frac{m_0 n_0}{16}$:)
- réciproque fausse :(
- généralisation pour $d > 2$ fausse :(

$u \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \rightsquigarrow$ courbe plane : $0/1 \rightsquigarrow$ segment vertical/horizontal.

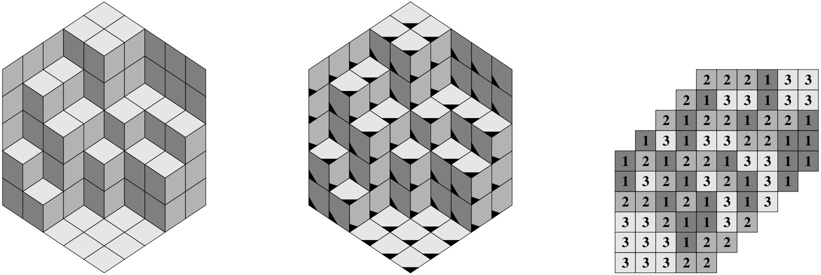
Les mots de Sturm correspondent à trois types précis de courbes :

- une droite discrète naïve de pente $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (quasipériodique) ;
- le cas limite $\ldots 0001000 \ldots$ (et ses transformations) ;
- le cas du "coin" $\ldots 000111 \ldots$ (et ses transformations).



Cas limite $p_u(m,n) = mn + 1$: deux lettres, pas de correspondance géométrique naturelle.

Mais on peut coder sur *trois* lettres une *surface discrète* :



conjecture (moi, il y a 8 jours)

Si u code une surface discrète :

$$\exists (m_0, n_0) \mid p_u(m_0, n_0) < m_0 n_0 + m_0 + n_0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ périodique.}$$

- rien de prouvé et pas vieux :(
- semble ne pas être moins fort que Nivat :|
- analogies avec les types de mots de Sturm :)

conjecture (moi, il y a 8 jours)

Si u code une surface discrète :

$$\exists(m_0, n_0) \mid p_u(m_0, n_0) < m_0 n_0 + m_0 + n_0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ périodique.}$$

- rien de prouvé et pas vieux :(
- semble ne pas être moins fort que Nivat :|
- analogies avec les types de mots de Sturm :)

conjecture (moi, il y a 8 jours)

Si u code une surface discrète :

$$\exists(m_0, n_0) \mid p_u(m_0, n_0) < m_0 n_0 + m_0 + n_0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ périodique.}$$

- rien de prouvé et pas vieux :(
- semble ne pas être moins fort que Nivat :|
- analogies avec les types de mots de Sturm :)

conjecture (moi, il y a 8 jours)

Si u code une surface discrète :

$$\exists(m_0,n_0) \mid p_u(m_0,n_0) < m_0 n_0 + m_0 + n_0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ périodique.}$$

- rien de prouvé et pas vieux :(
- semble ne pas être moins fort que Nivat :|
- analogies avec les types de mots de Sturm :)