

---

# Optimisation dans la détection de communautés recouvrantes et équilibre de Nash

**Michel Crampes, Michel Plantié, Marie Lopez**

*Laboratoire LGI2P, Ecole des Mines, Parc Georges Besse, 30035 Nîmes*

---

*RÉSUMÉ. La détection de communautés dans les graphes a fait l'objet de nombreux algorithmes. Les méthodes récentes cherchent à optimiser une fonction de modularité qui témoigne d'un maximum de relations à l'intérieur des communautés et d'un minimum de relations inter-communautés. D'abord appliqués aux graphes mono-parti non orientés, ces algorithmes étendent leur champ d'application aux graphes multi-partis et orientés. Cependant étant donné le caractère NP-complet du problème, ces algorithmes sont des heuristiques qui ne garantissent pas l'obtention d'un optimum global voire même local. Dans cet article nous introduisons un algorithme qui, à partir d'une solution approchée obtenue à l'aide d'un algorithme de détection efficace, la modifie pour atteindre un optimum local basé sur une fonction de réaffectation. La fonction de réaffectation est une 'fonction potentiel' et en conséquence l'optimum obtenu est un équilibre de Nash. Nous complétons notre méthode par une fonction de recouvrement qui permet de disposer de manière concomitante des deux modes de détection. Quelques expériences montre l'intérêt de l'approche.*

*ABSTRACT. Community detection in graphs has been the subject of many algorithms. Recent methods want to optimize a modularity function which shows a maximum of relationships within communities and found a minimum of inter-community relations. these algorithms are applied to unipartite, multipartite and directed graphs. However, given the NP-completeness of the problem, these algorithms are heuristics that do not guarantee an optimum. In this paper we introduce an algorithm which, based on an approximate solution obtained through an efficient detection algorithm, modify it to achieve a local optimum based on a function. this reassignment function is a 'potential function' and therefore the computed optimum is a Nash equilibrium. We supplement our method with an overlap function that allows to have simultaneously the two detection modes. Several experiments show the interest of our approach.*

*MOTS-CLÉS: Recouvrement de communautés, détection de communautés, Equilibre de Nash*

*KEYWORDS: Overlapping Communities, Community Detection, Nash equilibrium*

---

## 1. Introduction

Avec le développement d'Internet et l'importance prise par les réseaux sociaux, la recherche de communautés à partir de graphes fait l'objet de nombreux travaux. Beaucoup d'algorithmes aux approches très variées ont été proposés. Les plus importants sont rapportés dans (Papadopoulos *et al.*, 2011, Yang *et al.*, 2010, Porter *et al.*, 2009)) et de manière plus détaillée dans (Fortunato, 2009). En grande majorité ils portent sur la détection de communautés partitionnées (ensembles disjoints de sommets). Dans la réalité les individus appartiennent à plusieurs communautés. Le recouvrement est plutôt la règle. Quelques travaux récents se sont intéressés à la détection de communautés recouvrantes, pour l'essentiel dans les graphes unipartis. Dans un article précédent nous nous étions intéressés à la recherche de communautés recouvrantes dans les graphes bipartis en utilisant les treillis de Galois (Crampes *et al.*, 2012). Dans un article plus récent (Crampes *et al.*, 2013) nous proposons une méthode différente. Elle utilise tout algorithme de partitionnement de graphes unipartis pour traiter à la fois les graphes unipartis, les graphes bipartis et les graphes orientés et produire des communautés partitionnées et recouvrantes. Concrètement nous utilisons la méthode de Louvain (Blondel *et al.*, 2008). Appliquée à des benchmarks bien connus nous obtenons des résultats au moins aussi bons et souvent meilleurs que ceux obtenus par d'autres auteurs. En particulier nous présentons à la fois des communautés partitionnées et recouvrantes. Dans d'autres domaines comme par exemple la tractographie du cerveau, les résultats sont pertinents au regard d'une analyse sémantique manuelle. Cependant, malgré son efficacité, la méthode basée sur l'algorithme de Louvain présente une limite que nous souhaitons lever dans le présent article. Comme toute heuristique, elle donne des communautés partitionnées pour lesquelles la répartition des sommets dans le graphe ne garantit pas un optimum global pour la modularité. En particulier, les recouvrements montrent clairement le manque d'optimum. Pour nous approcher de cet optimum nous introduisons une fonction de réaffectation qui permet de prendre en compte le souhait d'un sommet pour être changé de communauté. Nous complétons cette fonction par une condition de stabilité et nous montrons que lorsque cette stabilité est atteinte nous obtenons un équilibre de Nash. Les résultats sont nettement améliorés. Le fait de faire appel à l'équilibre de Nash n'est pas seulement un moyen d'obtenir un optimum local dans des temps acceptables. C'est aussi un source d'interprétation sémantique de l'affectation et de la réaffectation des agents dans les communautés. Notre article se conclut sur l'ouverture de pistes de réflexion en ce sens.

## 2. État de l'art

Les nombreux travaux de recherche se sont focalisés dans un premier temps sur la détection de communautés partitionnées dans des graphes unipartis. Fortunato dans (Fortunato, 2009) en a fait une liste exhaustive. La plupart des algorithmes récents proposent de maximiser une mesure appelée modularité. La notion de modularité pour optimiser l'organisation d'un graphe en communautés introduite par Newman (Newman, 2006) a été largement appliquée d'abord aux graphes unipartis. Puis quelques auteurs l'ont étendue aux graphes bipartis dans un premier temps en adaptant sa formulation (Murata, 2010, Suzuki *et al.*, 2009). Cependant à partir de Barber (Barber,

2007) une expression de la modularité pour les graphes bipartis est directement dérivée de Newman et reprise par divers auteurs pour appliquer des méthodes classiques telles que le recuit simulé (Guimerà *et al.*, 2007), le clustering spectral (Barber, 2007), les algorithmes génétiques (Nicosia *et al.*, 2009), la transmission de labels (Liu Xin *et al.*, 2010), ou encore l'analyse spectrale dichotomique (Leicht *et al.*, 2007). Souvent, les stratégies de détection de communautés recouvrantes à partir de graphes unipartis ne sont que des extensions des méthodes de partitionnement. (Palla *et al.*, 2005) et utilisent le système de percolation de  $k$ -cliques. (Davis *et al.*, 2008) font appel à la marche aléatoire dans un graphe. (Gregory, 2009) utilise les algorithmes de propagation de labels. Certains auteurs proposent des méthodes spécifiques. (Wu *et al.*, 2012) cherchent les recouvrements entre communautés partitionnées. (Reichardt *et al.*, 2006) combinent le modèle d'interaction de spins de Potts et le recuit simulé. (Lancichinetti *et al.*, 2009) optimisent une fonction statistique locale. (Evans *et al.*, 2009) traitent le problème dual de partitionner les liaisons pondérées. Il est plus difficile de trouver dans la littérature des travaux qui portent à la fois sur les graphes bipartis et le recouvrement des communautés. On retrouve l'extension de méthodes telle la recherche de bicliques recouvrantes (Sune Lehmann, Martin Schwartz, Lars Kai Hansen, 2008). D'autres méthodes originales font appel aux résultats connus dans les treillis de Galois (Crampes *et al.*, 2012) et (Roth *et al.*, 2008), mais la représentation et les algorithmes sont complexes. Dans un article récent (Crampes *et al.*, 2013) nous montrons qu'il est possible d'unifier les graphes unipartis, bipartis, et orientés pour produire des communautés à la fois partitionnées et recouvrantes, le recouvrement utilisant une fonction simple d'appartenance simultanée. Nous mettons en œuvre l'algorithme de Louvain (Blondel *et al.*, 2008) qui fonctionne en agrègant itérativement les sommets du graphe afin d'augmenter la modularité au maximum. Cependant dans le cas général cet algorithme, comme toute heuristique, ne produit qu'un résultat approché, c'est-à-dire que l'algorithme s'arrête à partir du moment où la modularité ne peut plus augmenter. Or la fonction de recouvrement montre que certains sommets seraient incités à changer de communauté et que ce changement pourrait améliorer ou inversement abaisser le résultat obtenu. Autrement dit le résultat obtenu n'est pas stable.

La recherche de communautés stables a fait l'objet de peu de publications, les auteurs se satisfaisant en général des résultats de l'algorithme qu'ils mettent en œuvre et les comparant aux résultats d'autres auteurs. Cependant la recherche de stabilité d'un réseau en termes de théorie des jeux a fait l'objet de nombreuses publications comme par exemple (Nisan *et al.*, 2007). Selon cette approche la recherche de stabilité de  $n$  agents qui choisissent des stratégies à partir de fonctions de satisfaction suppose l'existence d'un équilibre de Nash. Appliquée à la détection de communauté le problème consiste à trouver les conditions d'existence d'un équilibre de Nash tel qu'aucun sommet ne souhaite au final quitter la communauté à laquelle il a été affecté. À notre connaissance l'équilibre de Nash n'a été que peu utilisé pour détecter des communautés. (R Narayanam *et al.*, 2012) l'appliquent sur des graphes unipartis. Ils utilisent la connectivité des sommets pour atteindre un équilibre de Nash sans mesurer la modularité du résultat. (Chen *et al.*, 2011) se focalisent également sur les graphes unipartis avec des communautés recouvrantes, et la recherche de l'équilibre de Nash

est l'unique principe directeur. Mais les résultats expérimentaux ne nous semblent pas en rapport avec ce qui a pu être publié sur le sujet. Dans le présent article nous nous distinguons de ces auteurs en recherchant d'abord une solution approchée robuste à l'aide de l'algorithme de Louvain, puis effectuons des réaffectations pour converger vers un équilibre local qui est prouvé être un équilibre de Nash. De plus nous pouvons appliquer cette approche sur les trois types de graphes.

### 3. Détection de communautés partitionnées et recouvrement

#### 3.1. Modularité

Nous avons montré dans (Crampes *et al.*, 2013) que la recherche de communauté partitionnées dans les graphes unipartis, bi-partis et orientés pouvait se ramener à la recherche de communautés dans les graphes uni-partis. En conséquence nous établissons les définitions et démontrons les propriétés pour les graphes uni-partis puis lors des expérimentations nous appliquerons les résultats théoriques à des cas de graphes bi-partis. Le consensus parmi les auteurs pour la détection de communautés consiste à rechercher une solution approchée qui maximise la modularité selon (Newman, 2006). Cet indice mesure la qualité de la partition d'un graphe. Formellement, étant donné un graphe uniparti  $G = (N, E)$  représenté par sa matrice d'adjacence  $A$ , la modularité  $Q$  d'une partition de graphe est définie :

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left[ A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right] \delta(c_i, c_j) \quad [1]$$

où  $A_{ij}$  représente le poids de la liaison entre  $i$  et  $j$ ,  $k_i = \sum_j A_{ij}$  est la somme des poids des arcs attaché au sommet  $i$ ,  $c_i$  est la communauté à laquelle appartient le sommet  $i$ , la fonction de Kronecker  $\delta(u, v)$  est égale à 1 si  $u = v$  et à 0 sinon, enfin  $m = 1/2 \sum_{i,j} A_{ij}$ . Pour l'instant nous ne considérons que des graphes binaires et dans ce cas les poids  $A_{ij}$  prennent les valeurs 1 ou 0 selon que la liaison existe ou n'existe pas. L'interprétation de cette formule est la suivante : la modularité est la somme pondérée pour toutes les communautés de la différence entre les liaisons observées à l'intérieur de la communauté (terme  $A_{ij}$ ) et la probabilité de ces liaisons (terme  $\frac{k_i k_j}{2m}$  dont le numérateur est le produit des marges correspondant à la cellule  $i, j$ ). L'application de cette fonction par de nombreux algorithmes donne de bons résultats. Par exemple elle permet de retrouver des communautés sur des graphes construits ad-hoc. Cependant il a été démontré dans (Fortunato, 2009) que cette fonction a tendance à fusionner les petites communautés et ainsi à masquer une certaine granularité. Pour les graphes bipartis (et les graphes orientés qui peuvent se ramener à des graphes bi-partis) d'autres formulations ont été proposées. En particulier la formulation dans (Barber *et al.*, 2009) semble faire consensus. Peu différente de celle de Newman, nos travaux récents montrent qu'elle pourrait aussi s'appliquer aux graphes unipartis. Cependant nous utiliserons la formulation de Newman quel que soit le type de graphe pour rester conforme à nos travaux antérieurs publiés afin d'unifier les trois types de graphes.

### 3.2. Détection de communautés partitionnées

Parmi les très nombreux algorithmes proposés dans la littérature pour détecter des communautés partitionnées l'algorithme de Louvain (Blondel *et al.*, 2008) est remarquable pour son efficacité et la qualité de ses résultats. Il utilise une méthode hiérarchique pour constituer les communautés en trouvant à chaque étape l'optimum de modularité pour chaque sommet. À chaque étape toutes les communautés de l'étape précédentes sont remplacées par un sommet qui représente tous ses composants. Ainsi le graphe se réduit progressivement pour obtenir la modularité optimum.

### 3.3. Détection et analyse de communautés recouvrantes

Plusieurs approches sont possibles pour identifier le recouvrement entre communautés. La plupart de la littérature vise intrinsèquement à trouver des communautés recouvrantes, les sommets étant affectés par l'algorithme à plusieurs communautés. C'est par exemple le cas dans (Palla *et al.*, 2005) et dans (Chen *et al.*, 2011). Dans notre cas, nous identifions d'abord les communautés partitionnées, puis une fonction de recouvrement qui permet de faire un premier bilan de l'instabilité de l'affectation. Nous obtenons ainsi à la fois des communautés partitionnées et leur recouvrement. Plusieurs fonctions de recouvrement sont possibles. Certaines ne font apparaître que l'existence d'un recouvrement. D'autres comme celle que nous présentons ici permettent de mesurer jusqu'à quel point deux communautés se chevauchent. Notre fonction que nous appelons la 'légitimité' présente aussi le grand intérêt de détailler pour chaque sommet son degré d'appartenance à différentes communautés. Ainsi pour chaque sommet  $u_i$ , son degré d'appartenance (ou de légitimité d'appartenance) à la communauté  $c$  est mesuré par son nombre de liens avec les autres sommets de la communauté divisé par la taille de cette communauté.

$$L(u_i \in c) = \frac{\sum_j A_{ij} \delta(c_j)}{|\{v \in c\}|} \quad [2]$$

Cette fonction peut s'interpréter de la manière suivante : un sommet est attiré par une communauté d'autant plus qu'il a un nombre relatif élevé de relations avec cette communauté indépendamment de la taille. Elle présente l'avantage d'être simple et intuitive. Par exemple dans le benchmark SW présenté dans la section 6 on peut observer que  $c_1$  contient 7 évènements,  $c_2$  5 évènements et  $c_3$  2 évènements. On obtient pour  $w_1$  une légitimité de  $\frac{2}{7}$  en direction de  $c_1$ ,  $\frac{1}{5}$  en direction de  $c_2$  et  $\frac{1}{2}$  en direction de  $c_3$ . Bien que simple, cette fonction montre que certains noeuds sont à cheval sur plusieurs communautés et qu'en conséquence les communautés identifiées peuvent être instables et la modularité non optimale. L'algorithme de Louvain, comme tout algorithme glouton, donne une solution approchée. Pour améliorer la modularité globale nous introduisons une fonction de réaffectation dans la section suivante.

## 4. Réaffectation

### 4.1. Fonction de réaffectation RM

Afin de définir cette fonction de réaffectation nous utilisons une variante de l'équation 1. Soit  $C_i$  une communauté,  $|e_i|$  le nombre d'arêtes dans  $C_i$  et  $d_{C_i}$  la somme des degrés des noeuds dans  $C_i$ . Alors  $Q = \sum_i \left[ \frac{|e_i|}{m} - \frac{(d_{C_i})^2}{(2m)^2} \right]$ . Réaffecter un sommet  $w$  de  $C_1$  à  $C_2$  accroît ou décroît la modularité. Nous définissons ce changement comme la mesure de réaffectation de modularité  $RM_{w:C_1 \rightarrow C_2} = Q_{w \in C_2} - Q_{w \in C_1}$  où  $Q_{w \in C_k}$  est la valeur de la modularité pour  $w \in C_k$  et  $C_1 \neq C_2$

Soit  $l_{w|i}$  le nombre d'arêtes entre un sommet  $w$  et tous les autres sommets  $w'$  tels que  $w' \in C_i$ , et soit  $d_w$  le degré de  $w$ . Nous considérons que le sommet  $w$  appartenant à  $C_1$  est retiré de cette communauté et ensuite réaffecté à une autre communauté  $C_2$ . Alors

$Q_{w \in C_1} = \left[ \frac{1}{m} |e_1| - \frac{(d_{C_1})^2}{(2m)^2} + \frac{1}{m} |e_2| - \frac{(d_{C_2})^2}{(2m)^2} \right] + K_{others}$  où  $K_{others}$  est la contribution à la modularité apportée par les communautés autres que  $C_1$  et  $C_2$ .  $K_{others}$  ne change pas lorsqu'on réaffecte un sommet de  $C_1$  et  $C_2$ .

$$Q_{w \in C_2} = \left[ \frac{1}{m} (|e_1| - l_{w|1}) + \frac{1}{m} (|e_2| + l_{w|2}) - \left( \frac{(d_{C_1} - d_w)^2}{(2m)^2} + \frac{(d_{C_2} + d_w)^2}{(2m)^2} \right) \right] + K_{others}$$

alors  $RM_{w:C_1 \rightarrow C_2} = Q_{w \in C_2} - Q_{w \in C_1} = \left[ \frac{1}{m} (|e_1| - l_{w|1}) + \frac{1}{m} (|e_2| + l_{w|2}) - \left( \frac{(d_{C_1} - d_w)^2}{(2m)^2} + \frac{(d_{C_2} + d_w)^2}{(2m)^2} \right) \right] - \left[ \frac{1}{m} |e_1| - \frac{(d_{C_1})^2}{(2m)^2} + \frac{1}{m} |e_2| - \frac{(d_{C_2})^2}{(2m)^2} \right]$  et après simplification

$$RM_{w:C_1 \rightarrow C_2} = \frac{1}{m} (l_{w|2} - l_{w|1}) - \frac{1}{2m^2} [d_w^2 + d_w (d_{C_2} - d_{C_1})] \quad [3]$$

En appliquant l'équation 3, il est possible de vérifier que si nous réaffectons  $w$  de  $C_1$  à  $C_2$  puis à nouveau de  $C_2$  à  $C_1$ , la modularité ne change pas (le calcul se vérifie de différentes manières) et  $RM_{w:C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1} = 0$ . En conséquence :  $RM_{w:C_1 \rightarrow C_2} = -RM_{w:C_2 \rightarrow C_1}$ .

### 4.2. Effet de la réaffectation sur les autres sommets

Nous supposons, qu'une première passe de calcul des réaffectations a été effectuée, et à la suite de cela  $w$  un sommet du graphe a été déplacé de  $C_1$  à  $C_2$ , suite à une mesure de réaffectation positive. Soit  $z$  un autre sommet du graphe. On peut voir la variation de la valeur de réaffectation pour ce sommet après le déplacement de  $w$ . Le calcul de la différence de la mesure de réaffectation pour le sommet  $z$  de l'étape précédente à l'étape actuelle se calcule comme suit : On cherche  $RM_{z:C_{from} \rightarrow C_{to}}^1 - RM_{z:C_{from} \rightarrow C_{to}}^0$  où  $RM_{z:C_{from} \rightarrow C_{to}}^0$  est la mesure de réaffectation de  $z$  avant le déplacement de  $w$  et  $RM_{z:C_{from} \rightarrow C_{to}}^1$  sa mesure après. Selon les cas de  $C_{from}$  et  $C_{to}$  on trouve les résultats suivants : Soit  $\Delta R_z = [\{w, z\} - \frac{1}{(2m)} d_z d_w] \frac{1}{m}$ , dans lequel  $\{w, z\}$  représente le lien entre  $w$  et  $z$ . S'il n'y a pas de lien cette valeur est nulle.

Dans le tableau ci dessous, nous montrons les différentes valeurs, calculées individuellement, de la correction de réaffectation pour  $z$ . Dans ce tableau  $C_3$  et  $C_4$  sont des communautés autres que  $C_1$  et  $C_2$ .

to\from	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$C_1$	0	$-2\Delta R_z$	$-\Delta R_z$	$-\Delta R_z$
$C_2$	$2\Delta R_z$	0	$\Delta R_z$	$\Delta R_z$
$C_3$	$\Delta R_z$	$-\Delta R_z$	0	0
$C_4$	$\Delta R_z$	$-\Delta R_z$	0	0

On peut relever les propriétés intéressantes suivantes :

$$\begin{aligned}
 (RM_{z:C_1 \rightarrow C_2}^1 - RM_{z:C_1 \rightarrow C_2}^0) &= (RM_{z:C_1 \rightarrow C_3}^1 - RM_{z:C_1 \rightarrow C_3}^0) + (RM_{z:C_3 \rightarrow C_2}^1 - \\
 RM_{z:C_3 \rightarrow C_2}^0) &= 2\Delta R_z \text{ et } (RM_{z:C_2 \rightarrow C_1}^1 - RM_{z:C_2 \rightarrow C_1}^0) = (RM_{z:C_2 \rightarrow C_3}^1 - \\
 RM_{z:C_2 \rightarrow C_3}^0) &+ (RM_{z:C_3 \rightarrow C_1}^1 - RM_{z:C_3 \rightarrow C_1}^0) = -2\Delta R_z
 \end{aligned}$$

On voit aussi que la matrice est antisymétrique, avec  $RM_{z:C_{from} \rightarrow C_{to}}^1 - RM_{z:C_{from} \rightarrow C_{to}}^0 = - [RM_{z:C_{to} \rightarrow C_{from}}^1 - RM_{z:C_{to} \rightarrow C_{from}}^0]$ , ce qui est compatible avec les propriétés de la réaffectation présentée en 4.1. Ce tableau permet de simplifier les calculs de réaffectation. Il est aussi un moyen intéressant d'étudier l'impact sémantique de la réaffectation. Sans détailler les conclusions dans les limites de cet article, synthétiquement ces propriétés montrent qu'un noeud a tendance à suivre un noeud voisin, ou bien à quitter une communauté dans laquelle arrive un noeud avec lequel il n'a pas de liaison.

## 5. Réaffectation et Équilibre de Nash (EN)

Nous montrons dans cette section que l'application de la réaffectation conduit à un équilibre de Nash (EN), une situation où aucun noeud n'a intérêt à quitter la communauté à laquelle il a été finalement affecté. Nous pouvons dans ce but ramener le problème de la réaffectation des noeuds à un problème de théorie des jeux. En effet les  $n$  noeuds peuvent être considérés comme  $n$  agents qui cherchent à optimiser leurs gains en jouant des stratégies. Soit un jeu à un ensemble fini  $n$  de joueurs, chaque joueur  $i$  ayant accès à un ensemble fini  $S_i$  de stratégies :  $S_i = s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{m_i}}$ . Une stratégie est un déplacement accessible à un joueur pour lequel il est en droit d'attendre un gain. Ce gain dépend des stratégies des autres joueurs. Formellement un jeu  $G = (S, f)$  où  $S = S_1 \times S_2 \dots \times S_n$  est l'ensemble des profils de stratégies. Un profil de stratégie (ou vecteur stratégie)  $s \in S$  est la combinaison des stratégies de tous les joueurs à un moment du jeu, chaque joueur appliquant une seule stratégie. À chaque profil de stratégies correspond une fonction de gain  $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  pour le joueur  $i$  et  $f = (f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n)$ . Il est important de noter que le gain du joueur  $i$  dépend à un instant donné de la stratégie de l'ensemble des joueurs. Un profil de stratégie  $s^*$  est un équilibre de Nash (EN) si aucun joueur ne peut unilatéralement changer de stratégie sans faire changer de stratégie un ou plusieurs autres joueurs. Formellement : Un profil de stratégie  $s^*$  est un EN si pour tous les joueurs  $i$  et pour toute stratégie alternative  $s'_i \in S_i$ ,  $s'_i \neq s_i^*$ ,  $f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s'_i, s_{-i}^*)$  où  $s_{-i}$  est un vecteur stratégie duquel a été retirée la stratégie de l'agent  $i$ .

Trois questions se posent : (i) quelles sont les conditions pour qu'il existe au moins un EN, (ii) s'il en existe un comment l'atteindre, et (iii) est-il possible de l'atteindre dans un temps polynomial (en fait la problématique de la NPComplétude est plus... complexe ; le lecteur intéressé en trouvera une présentation dans (Papadimitriou, livre (Nisan *et al.*, 2007)). L'existence d'un EN fait problème pour les jeux à stratégies pures. Un jeu à stratégies pures est un jeu pour lequel les joueurs jouent de manière déterministe ; un jeu à stratégies mixtes est un jeu dans lequel les joueurs font intervenir une fonction de probabilité entre les stratégies pour décider du coup à jouer. Le théorème de Nash affirme que dans un jeu à  $n$  joueurs ( $n$  fini) à stratégies mixtes il existe au moins un EN. Ce théorème qui vaut pour les stratégies mixtes ne peut pas s'appliquer directement aux stratégies pures. Cependant il est possible de donner une réponse à l'existence d'un EN et à la possibilité de converger vers cet équilibre dans le cas d'un jeu fini à stratégies pures si on peut définir une fonction potentiel qui permet d'atteindre un optimum global en recherchant des optima locaux pour les agents. Si de plus la recherche d'un optimum local pour un agent peut se faire en un temps polynomial, alors le problème rentre dans la classe des problèmes PLSComplet (Polynomial Local Search) (Eva Tardos & Tom Wexler (Nisan *et al.*, 2007)). Pour tout jeu fini, une fonction potentiel exacte  $\Phi$  est une fonction qui fait correspondre à chaque vecteur stratégie  $s$  une valeur réelle  $\Phi(s)$  avec les conditions suivantes :

$$\Phi(s') - \Phi(s) = f_i(s') - f_i(s) \quad [4]$$

où  $s = (s_i, s_{-i})$  et  $s' = (s'_i, s_{-i})$

Cette fonction s'interprète de la manière suivante : si le joueur  $i$  passe unilatéralement d'une stratégie  $s_i$  à une stratégie  $s'_i$  avec un gain  $f_i(s') - f_i(s)$  la fonction potentiel croît d'autant pour tous les joueurs ; tous joueurs sont alors favorables au changement de stratégie de  $i$ . Ainsi armé d'une fonction potentiel il est sûr qu'il existe un équilibre de Nash et que l'on peut y converger à partir de la recherche d'optima locaux pour chaque joueur. Dans le cas de la détection des communautés nous sommes dans un jeu fini à stratégies pures où les agents sont les  $n$  noeuds et les stratégies sont les communautés auxquelles les noeuds souhaitent être rattachés. Pour trouver sûrement de manière convergente un équilibre de Nash, c'est-à-dire une partition des communautés qui satisfasse tout le monde, il nous faut construire une fonction potentiel  $\Phi(s)$ . La fonction  $RM_{w:C_1 \rightarrow C_2}$  qui représente le gain attendu par le noeud  $w$  quand il est réaffecté prend en compte le gain de modularité pour toutes les communautés et tous les noeuds. Autrement dit  $\Phi(s) = f_i(s)$ . Ce choix de gain local assure donc que l'algorithme local de réaffectation des noeuds présenté dans la section précédente converge vers un équilibre de Nash. Dans la mesure où le calcul de  $RM$  est polynomial, l'algorithme de convergence vers l'équilibre de Nash est PLSComplet. Ce résultat étant acquis, on notera que l'équilibre de Nash peut ne pas être unique et que celui qui est obtenu n'est pas nécessairement le meilleur.

## 6. Experimentation

Dans la mesure où nous avons montré dans (Crampes *et al.*, 2013) qu'il est possible de traiter indifféremment des graphes unipartis, bipartis et orientés, nous avons

effectué deux types d'expérimentation. D'une part nous avons appliqué notre algorithme de réaffectation à des graphes unipartis traditionnels tels que le 'karate club' ou les 'dauphins' pour comparer nos résultats à d'autres auteurs. D'autre part nous l'avons appliqué à la détection de communauté dans des graphes bipartis. Nous laissons le lecteur prendre connaissance de ces graphes dans notre article ci-dessus, ou pour les dauphins dans d'autres articles cités en référence.

### 6.1. Graphes unipartis

Louvain appliqué seul au graphe 'karaté' produit quatre communautés. Notre mesure de réaffectation ne montre aucune instabilité puisqu'il n'y a pas de valeurs de  $RM$  positives. La modularité mesurée est supérieure à celle de tous les autres algorithmes que nous connaissons. En particulier elle est nettement meilleure (0,470) que celle déclarée chez les auteurs qui utilisent aussi une approche locale pour obtenir un équilibre de Nash, en particulier chez (R Narayanam *et al.*, 2012) qui produisent 3 communautés ainsi que chez (Chen *et al.*, 2011) qui détectent aussi 3 communautés. En ce qui concerne les dauphins, Louvain seul produit 4 communautés avec une modularité de 0,48 et notre mesure de réaffectation montre l'instabilité de trois sommets. Après réaffectation de ces sommets, à l'équilibre, la modularité monte à 0,51. Les autres auteurs affichent une modularité résultante moindre sauf (R Narayanam *et al.*, 2012) pour lequel l'absence de données ne nous a pas permis de vérifier les résultats. Sans analyser plus loin, il nous paraît que notre approche améliore de manière intéressante la méthode de Louvain, surtout en lui offrant un moyen polynomial de vérifier la stabilité. Comparé aux autres méthodes qui utilisent l'équilibre de Nash, nous faisons mieux, ou, dans certains cas aussi bien (pour peu qu'il soit possible de vérifier les résultats de ces auteurs).

### 6.2. Graphes bipartis

**Jeu de données 'Southern Women.'** Des résultats partiels ont déjà été présentés dans (Crampes *et al.*, 2013) sans réaffectation. Nous le complétons ici avec le recouvrement et l'équilibre de Nash. Dans la figure 1, le graphe biparti est montré comme un graphe à deux couches au milieu avec les dames sur la couche du dessus et les événements sur la couche du dessous. Les arêtes entre dames et événements représentent leurs participations à ces événements. Trois communautés regroupant des dames et des événements ont été détectées et montrées dans cette figure en couleur rouge, bleu et jaune. Ce résultat est plus précis que la majorité des résultats présentés dans (Freeman, 2003). La figure montre les recouvrements en utilisant deux mesures : la légitimité et la mesure de réaffectation de modularité ( $RM$ ) pour les dames et les événements. Pour les dames ces deux mesures sont représentées en fonction des communautés partitionnées au dessus des dames. Les meilleures valeurs maximales pour la légitimité et  $RM$  sont soulignées. Seule une dame (W8) - en italique - présente des valeurs de légitimité et de  $RM$  supérieures pour des communautés autres que celles auxquelles elle a été affectée. Notre méthode met ainsi en relief des litiges d'affectation qu'aucun autre auteur n'avait fait apparaître. La mesure de  $RM$  montre avec plus d'acuité cette tendance à être affecté de façon préférentielle à une autre communauté. Concrètement

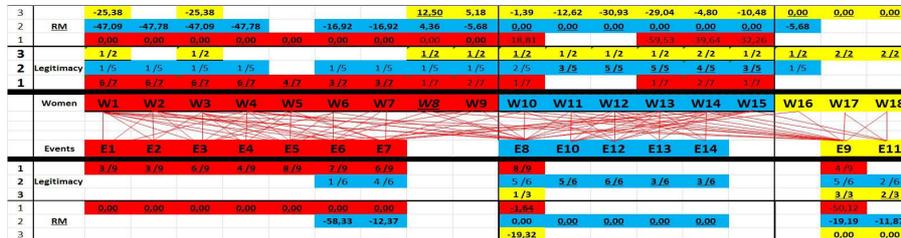


Figure 1. Graphe biparti Women Events : Communautés, mesures de Légitimité et RM

deux individus (W8 et W9) sont instables. Après réaffectation l'ensemble des trois communautés est stable. La modularité passe de 0,309 à 0,325. Il est intéressant de noter que les deux individus réaffectés le sont dans la troisième communauté qui se trouve renforcée alors qu'aucun autre auteur ne l'avait identifiée.

**Compte Facebook et expérimentations de grande taille.** Cette expérimentation déjà présentée en partie dans (Crampes *et al.*, 2013) sans réaffectation, traite d'un compte facebook d'un étudiant dont nous avons extrait les photos et les tags associés aux photos. Le seul critère impartial de sélection fut le nombre de photos étiquetées présentes sur le compte. Le jeu de données comporte 644 photos pour 274 tags différents. Après curetage et un premier passage par Louvain 16 communautés de 2 personnes ou plus sont identifiées. Elles sont peu recouvrantes. La mesure RM nous montre qu'un seul sommet sur plus de 250 personnes est instable. Ceci indique une pertinence particulièrement élevée des communautés partitionnées d'origine. La mesure RM appliquée aux photos montre également que 15 photos souhaitent être affectées à des communautés différentes de celles trouvées par le partitionnement. Ceci indique que dès le début le jeu de données révèle peu d'ambiguïté. Ceci peut se comprendre étant donné le fait que les photos supposent la présence physique des individus dans un temps et un lieu précis. Elles témoignent assez bien de périodes de la vie de celui qui les possède.

Nos expérimentations récentes ont porté sur plusieurs grands graphes. Sur un graphe de plus de 10600 sommets cité par (Chen *et al.*, 2011), l'équilibre après réaffectation est atteint après 80 itérations pour quelques secondes de calcul.

## 7. Perspectives et Conclusion

Nous avons appliqué une méthode de détection de communautés dans des graphes unipartis et bipartis. Notre première contribution a consisté à faire apparaître les recouvrements. La deuxième contribution consiste à faire apparaître l'instabilité des résultats produits par l'algorithme de détection malgré leur qualité. Pour trouver une solution stable nous avons fait appel à une fonction de réaffectation et nous avons démontré que cette solution nous permettait d'atteindre un équilibre de Nash en temps polynomial. Plus généralement, presque toutes les méthodes de détection de communautés produisent des situations d'affectation instables. Notre contribution permet de

compléter tout algorithme de détection de communautés pour trouver en temps polynomial un équilibre stable pour lequel la modularité est optimale. On notera pour ce faire le caractère 'social' de tous les sommets qui identifient leur intérêt à l'intérêt collectif. Ce point sera approfondi dans l'une des suites à nos travaux. Nos recherches futures porteront sur l'amélioration des méthodes de réaffectation, Une limite à la méthode présentée est le fait qu'elle prend pour contrainte le nombre de communautés trouvé par l'algorithme initial de détection. Nous étudierons comment supprimer ou faire apparaître de nouvelles communautés. Le but est d'étudier comment des politiques de rajout ou de suppression de communautés peuvent entraîner des instabilités et des insatisfactions. Plus globalement si la création d'un graphe initial ainsi que la détection de communautés ont été largement étudiées, il existe peu de travaux sur l'application de contraintes externes et sur la dynamique d'adaptation des communautés. Ces modèles trouveraient leur application à des problèmes d'ajout ou à l'inverse de suppression d'unités de production, de services, etc. La réalité suppose de disposer de graphes multipartis ce qui explique notre approche qui mêle dans un premier temps graphes unipartis et graphes bipartis. De même il faudra considérer des fonctions potentiels plus égoïstes qui laissent aussi la place à des agents moins altruistes.

## 8. Bibliographie

- Barber M., « Modularity and community detection in bipartite networks », *Physical Review E*, vol. 76, n° 6, p. 1-9, 2007.
- Barber M. J., Clark J. W., « Detecting network communities by propagating labels under constraints », *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*, vol. 80, n° 2 Pt 2, p. 026129, 2009.
- Blondel V. D., Guillaume J.-L., Lambiotte R., Lefebvre E., « Fast unfolding of communities in large networks », *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2008, n° 10, p. P10008, October, 2008.
- Chen W., Liu Z., Sun X., Wang Y., « Community detection in social networks through community formation games », *Proceedings of the Twenty-Second international joint conference on Artificial Intelligence - Vol. Three, IJCAI'11*, AAAI Press, p. 2576-2581, 2011.
- Crampes M., Plantié M., « Détection de communautés dans les graphes bipartis », *IC 2012 Ingénierie des connaissances*, 2012.
- Crampes M., Plantié M., « Partition et recouvrement de communautés dans les graphes bipartis, unipartis et orientés », *IC 2013 Ingénierie des connaissances*, 2013.
- Davis G. B., Carley K. M., « Clearing the FOG : Fuzzy, overlapping groups for social networks », *Social Networks*, vol. 30, n° 3, p. 201-212, 2008.
- Evans T. S., Lambiotte R., « Line Graphs, Link Partitions and Overlapping Communities », *Physical Review E*, vol. 80, n° 1, p. 9, 2009.
- Fortunato S., « Community detection in graphs », *Physics Reports*, vol. 486, n° 3-5, p. 103, June, 2009.
- Freeman L. C., « Finding social groups : A meta-analysis of the southern women data », *Dynamic Social Network Modeling and Analysis*, National Academies Press, p. 39-97, 2003.
- Gregory S., « Finding overlapping communities in networks by label propagation », *New Journal of Physics*, vol. 12, n° 10, p. 103018, 2009.

- Guimerà R., Sales-Pardo M., Amaral L., « Module identification in bipartite and directed networks », *Physical Review E*, September, 2007.
- Lancichinetti A., Fortunato S., Kertész J., « Detecting the overlapping and hierarchical community structure in complex networks », *New Journal of Physics*, vol. 11, n° 3, p. 033015, March, 2009.
- Leicht E. A., Newman M. E. J., « Community structure in directed networks », *Physical Review Letters*, vol. 100, n° 11, p. 118703, 2007.
- Liu Xin, Murata Tsuyoshi, « An Efficient Algorithm for Optimizing Bipartite Modularity in Bipartite Networks », *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, vol. 14, n° 4, p. 408-415, 2010.
- Murata T., « Detecting communities from tripartite networks », *Proceedings 19th int conference on World Wide Web*, vol. 1, p. 0-1, 2010.
- Newman M., « Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices », *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*, vol. 74, n° 3 Pt 2, p. 036104, 2006.
- Nicosia V., Mangioni G., Carchiolo V., Malgeri M., « Extending the definition of modularity to directed graphs with overlapping communities », *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2009, n° 03, p. P03024, March, 2009.
- Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirani V. V., [BOOK] *Algorithmic game theory*, Cambridge University Press., 2007.
- Palla G., Derenyi I., Farkas I., Vicsek T., « Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society », *Nature*, vol. 435, n° 7043, p. 1-10, 2005.
- Papadopoulos S., Kompatsiaris Y., Vakali A., Spyridonos P., « Community detection in Social Media », *Data Mining and Knowledge Discovery*, vol. 1, n° June, p. 1-40, 2011.
- Porter M. A., Onnela J.-P., Mucha P. J., « Communities in Networks », 2009.
- R Narayanan, Y Narahari, « A game theory inspired decentralized local information based algorithm for community detection in social graphs », *ICPR 21st International Conference on Pattern Recognition*, Vienna, 2012.
- Reichardt J., Bornholdt S., « Partitioning and modularity of graphs with arbitrary degree distribution », *Physical Review E - Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics*, vol. 76, n° 1 Pt 2, p. 015102, 2006.
- Roth C., Obiedkoy S., Kourie D. G., « On succinct representation of knowledge community taxonomies with formal concept analysis », *International Journal of Foundations of Computer Science*, vol. 19, n° 2, p. 383, 2008.
- Sune Lehmann, Martin Schwartz, Lars Kai Hansen, « Biclique communities. », *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 2008.
- Suzuki K., Wakita K., « Extracting Multi-facet Community Structure from Bipartite Networks », *2009 International Conference on Computational Science and Engineering*, vol. 4, p. 312-319, 2009.
- Wu Z., Lin Y., Wan H., Tian S., Hu K., « Efficient overlapping community detection in huge real-world networks », *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 391, n° 7, p. 2475 - 2490, 2012.
- Yang B., Liu D., Liu J., Furht B., *Discovering communities from Social Networks : Methodologies and Applications*, Springer US, Boston, MA, 2010.