

TP1

Introduction à Coq

Exercice 1 Une preuve classique.

Montrer, en Coq, qu'il existe x et y irrationnels tels que x^y soit rationnel. Pour cet exercice, utiliser les notions de $\sqrt{2}$, d'irrationnalité et de rationalité axiomatisées comme suit :

```
Require Export Reals.
```

```
Open Scope R_scope.
```

```
Parameter rac2: R.
```

```
Definition is_irrat (x:R):Prop:= forall n p : nat, x * (INR p) <> (INR n).
```

```
Definition is_rat (x:R):Prop:=
```

```
  exists n:nat, exists p:nat, x * (INR p) = (INR n).
```

```
Hypothesis two_rac2: rac2 * rac2 = 2.
```

```
Hypothesis rac2_irr : is_irrat rac2.
```

```
Hypothesis two_rat : is_rat (Rpower rac2 2).
```

```
Hypothesis irrat_not_rat: forall x:R, ~(is_rat x) -> is_irrat x.
```

On pourra utiliser la fonction `Rpower: R -> R -> R`. Pour la preuve, on pourra également charger la bibliothèque `Classical` (`Require Export Classical`).

Exercice 2 Définition inductive.

Ecrire une fonction `pow_nat: nat -> nat -> nat` qui calcule n^m et vérifier que $2^3 = 8$.

Exercice 3 Preuve par récurrence.

En utilisant la fonction `pow_nat` définie dans l'exercice précédent, prouver que $n^m * n^p = n^{m+p}$.

Indications : `Require Export Mult`, `induction`, `simpl`, `rewrite`, `apply mult_assoc_reverse`, `auto`, `omega`, ...

Exercice 4 Russell et le pape.

Formaliser et prouver les dires de Russel :

"Un certain philosophe fut très choqué quand Bertrand Russell lui apprit qu'une proposition fausse implique n'importe quelle proposition. Il dit à Russell :

- "Voulez-vous dire qu'il résulte de la proposition : "deux et deux font cinq" que vous êtes le Pape?" et Russell répondit : "oui". Le philosophe lui demanda alors : "pouvez-vous le prouver?" Russell répondit : "certainement" et inventa sur le champ la démonstration suivante :

- "Supposons que $2 + 2 = 5$, on retranche 2 aux deux membres et on obtient $2 = 3$. on transpose pour avoir $3 = 2$. Enfin, on retranche 1 aux deux membres et on obtient $2 = 1$.

A présent, le Pape et moi nous sommes 2. Mais $2 = 1$ et par conséquent, le Pape et moi sommes 1. Donc, je suis le Pape."