# Calculs de processus
# TD6

**Exercice 1.** On peut considérer une version asymétrique de la bisimulaton : on dit qu'une relation binaire $\mathcal{S}$ sur les processus de CCS est une *simulation* si, pour tout $(P, Q) \in \mathcal{S}$, on a que $P \xrightarrow{\alpha} P'$ implique qu'il existe $Q'$ tel que $Q \overset{\alpha}{\Longrightarrow} Q'$ et $(P', Q') \in \mathcal{S}$. On écrit $P \mathbin{/} Q$ lorsqu'il existe une simulation $\mathcal{S}$ telle que $(P, Q) \in \mathcal{S}$.

Par rapport à la bisimulation, le jeux de la simulation ne prévoit pas que l'opposant puisse choisir le jeton intial, ni qu'il puisse le changer par la suite : le jeton de l'opposant est celui initialement placé sur $P$, celui du joueur est celui initialement placé sur $Q$ et cette attribution persiste pendant la durée du jeu.

Pour tout processus $P, Q$ de CCS, $P \approx Q$ implique évidemment $P \mathbin{/} Q$ et $Q \mathbin{/} P$. Montrer que la réciproque est fausse, c'est-à-dire, trouver deux processus $P, Q$ tels que $P \mathbin{/} Q$ et $Q \mathbin{/} P$ tandis que $P \not\approx Q$.

**Exercice 2.** Un *compteur* (initialisé à 0) est un processus $C$ tel que $C \approx C_0$, où

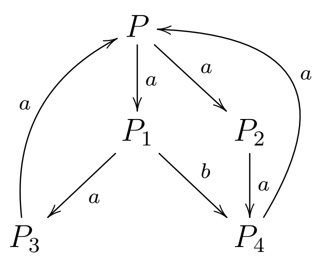
$$C_0 \overset{\text{rec}}{=} \mathsf{up}.C_1,$$
$$C_{n+1} \overset{\text{rec}}{=} \mathsf{down}.C_n + \mathsf{up}.C_{n+2}.$$

(Essentiellement, un compteur est un sémaphore de capacité infinie). Vérifier que le processus

$$C \overset{\text{rec}}{=} \mathsf{up}.(C \mid \mathsf{down})$$

est bien un compteur.

**Exercice 3.** Considérer le système de transitions étiquetées suivant :




Définir un processus $Q$ de CCS tel que $Q \approx P$.

**Exercice 4.** Soient

$$
\begin{aligned}
H_1 &:= a.\overline{c_1}.e_1.d, \\
H_2 &:= b.\overline{c_2}, \\
\text{Synch} &\stackrel{\text{rec}}{=} c_1.c_2.\overline{e_1}.\text{Sync}.
\end{aligned}
$$

Montrer que

$$\nu(c_1, c_2, e_1)(H_1 \mid H_2 \mid \text{Sync}) \approx a.b.d + b.a.d.$$

**Exercice 5.** Soient

$$
\begin{aligned}
H_1 &\stackrel{\text{rec}}{=} a.\overline{c_1}.e_1.H_1, \\
H_2 &\stackrel{\text{rec}}{=} b.\overline{c_2}.e_2.H_2, \\
\text{Sync}_2 &\stackrel{\text{rec}}{=} c_1.c_2.\overline{e_1}.\overline{e_2}.\text{Sync}_2, \\
H &\stackrel{\text{rec}}{=} a.b.H + b.a.H.
\end{aligned}
$$

Montrer que

$$\nu(c_1, c_2, e_1, e_2)(H_1 \mid H_2 \mid \text{Sync}_2) \approx H.$$

Remarque : le processus $\text{Sync}_2$ de l'exercice précedent synchronise les deux processus $H_1$ et $H_2$ pour que leurs actions ($a$ et $b$, respectivement) puissent se produire dans n'importe quel ordre mais de manière à ce que chaque processus attende l'autre. En effet, les traces de $H$ ont la forme

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{2n}\alpha_{2n+1} \ldots$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{2n} \neq \alpha_{2n+1}$.

On peut généraliser cela à $k$ actions : il suffit de poser

$$
\begin{aligned}
H_i &\stackrel{\text{rec}}{=} a_i.\overline{c_i}.e_i.H_i && \text{pour } 1 \leq i \leq k, \\
\text{Sync}_k &\stackrel{\text{rec}}{=} c_1 \ldots c_k.\overline{e_1} \ldots \overline{e_k}.\text{Sync}_k.
\end{aligned}
$$

On pourra maintenant vérifier que

$$\nu(c_1, \ldots, c_k, e_1, \ldots, e_k)(H_1 \mid \cdots \mid H_k \mid \text{Sync}_k) \approx H,$$

avec

$$H \stackrel{\text{rec}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(k)}.H,$$

où $\mathfrak{S}_k$ dénote l'ensemble des permutations sur $k$ éléments.

**Exercice 6.** On dispose de trois LED, rouge, bleu et vert, activés par trois controleurs (un pour chaque LED). En plus d'envoyer un signal pour allumer leur LED, les controleurs peuvent aussi envoyer et recevoir des signaux de synchronisations entre eux. Le but est de configurer les controleurs de manière à ce que les trois LED s'allument de manière alternée, comme suit : rouge, bleu, vert, rouge, bleu, vert, etc.

On peut modéliser cela en CCS de la façon suivante : on cherche un processus $P$ de la forme

$$\nu(\widetilde{a})(K_r \mid K_b \mid K_v),$$

où chaque $K_i$ est un processus représentant un controleur ($r$ pour rouge, $b$ pour bleu et $v$ pour vert), tel que l'on ait $P \approx H$, où

$$H \stackrel{\text{rec}}{=} \overline{r}.\overline{b}.\overline{v}.H.$$

Trouver un tel processus $P$ et montrer la bisimulation avec $H$.