

Théorie de la démonstration
TD4: calcul des séquents propositionnel et au
premier ordre

10 octobre 2016

Exercice 1. Prouver les formules suivantes en **LK** bilatère :

1. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A \vee B$
2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
3. $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg B)$
4. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Exercice 2. Prouver les formules suivantes en **LK** monolatère :

1. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (loi de Peirce)
2. $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$ (propriété de la disjonction conditionnelle)
3. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (distributivité)
4. $A \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
5. $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ (Curryfication)
6. $(A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (contraction)
7. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (affaiblissement)

Exercice 3. Prouver les formules suivantes en **LK**¹ monolatère :

1. $\forall x.(A \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \forall x.B(x))$ (où x n'est pas libre dans A)
2. $\forall x.(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow (A \wedge \forall x.B(x))$ (où x n'est pas libre dans A)

Exercice 4. Prouver les formules suivantes en **LK**¹ bilatère :

1. $\neg\forall x.A \Leftrightarrow \exists x.\neg A$
2. $\exists x.(B(x) \Rightarrow \forall y.B(y))$