Théorie de la démonstration
TD7: simulation examen

7 décembre 2016

Exercice 1. Pour chacune des formules suivantes, déterminer si elle est prouvable ou pas, avec la méthode que vous préférez.

1. $(P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
2. $((P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
3. $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
4. $\neg\forall x.A \Rightarrow \exists x.\neg A$
5. $(\forall x.A(x,x)) \Rightarrow \forall x.\exists y.A(x,y)$
6. $(\forall x.\exists y.A(x,y)) \Rightarrow \forall x.A(x,x)$

Exercice 2. Pour chacune des formules 1, 2 et 3 de l'exercice 1, déterminer si elle est prouvable ou pas en calcul des séquents intuitionniste (**LJ**) ; dans le cas négatif, expliquer pourquoi.
Bonus : dans le cas positif, en donner aussi une preuve en déduction naturelle (**NJ**).

Exercice 3. Calculer la forme sans coupures de la preuve suivante, en supposant π et σ sans coupures.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\ \pi$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash A$}
\AxiomC{$\vdots\ \sigma$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash B$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash A \wedge B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, A$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg A, \neg B, B \wedge A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{id}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\RightLabel{$\wedge$}
\BinaryInfC{$\vdash \neg A, \neg B, \neg B, (B \wedge A) \wedge B$}
\RightLabel{cntr}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, \neg B, (B \wedge A) \wedge B$}
\RightLabel{$\vee$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \vee \neg B, (B \wedge A) \wedge B$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\vdash (B \wedge A) \wedge B$}
\end{prooftree}
$$

Corrigé

Exercice 1.

1. On pose

$$\Gamma := P \vee Q \Rightarrow R, P$$
$$\Delta := P \vee Q \Rightarrow R, Q$$

et on fait la preuve en déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P \vee Q \Rightarrow R}\,\mathsf{id} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash P}\,\mathsf{id}}{\Gamma \vdash P \vee Q}\,\vee\mathsf{I}_1}{\Gamma \vdash R}\,\Rightarrow\mathsf{E}}{P \vee Q \Rightarrow R \vdash P \Rightarrow R}\,\Rightarrow\mathsf{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash P \vee Q \Rightarrow R}\,\mathsf{id} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash Q}\,\mathsf{id}}{\Delta \vdash P \vee Q}\,\vee\mathsf{I}_2}{\Delta \vdash R}}{P \vee Q \Rightarrow R \vdash Q \Rightarrow R}\,\Rightarrow\mathsf{I}}{\dfrac{P \vee Q \Rightarrow R \vdash (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)}{\vdash (P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)}\,\Rightarrow\mathsf{I}}\,\wedge\mathsf{I}$$

Cela montre que cette formule est prouvable en **NJ**, donc en **LJ** et donc en **LK**.

2. On pose

$$\Gamma := (P \Rightarrow (Q \vee R)) \wedge (Q \Rightarrow R), P$$

et on fait la preuve en déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (P \Rightarrow (Q \vee R)) \wedge (Q \Rightarrow R)}\,\mathsf{id}}{\Gamma \vdash P \Rightarrow (Q \vee R)}\,\wedge\mathsf{E}_1 \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P}\,\mathsf{id}}{\Gamma \vdash Q \vee R}\,\Rightarrow\mathsf{E} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, Q \vdash (P \Rightarrow (Q \vee R)) \wedge (Q \Rightarrow R)}\,\mathsf{id}}{\Gamma, Q \vdash Q \Rightarrow R}\,\wedge\mathsf{E}_2 \quad \dfrac{}{\Gamma, Q \vdash Q}\,\mathsf{id}}{\Gamma, Q \vdash R}\,\Rightarrow\mathsf{E} \quad \dfrac{}{\Gamma, R \vdash R}\,\mathsf{id}}{\dfrac{\Gamma \vdash R}{\vdash ((P \Rightarrow Q \vee R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow P \Rightarrow R}\,\Rightarrow\mathsf{I}}\,\vee\mathsf{E}$$

Cela montre que cette formule est prouvable en **NJ**, donc en **LJ** et donc en **LK**.

3. On fait la preuve en **LK** bilatère :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,\mathsf{id}}{P, Q \vdash Q, P}\,\mathsf{weak}}{\vdash P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P}\,\vdash\Rightarrow}{\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)}\,\vdash\vee$$

On remarque que cette preuve n'est pas en **LJ**, car on a employé des séquents avec 2 formules à droite. Donc, pour l'instant, on ne sait pas si cette formule est prouvable intuitionnistiquement.

4. Si on utilise la définition classique de l'implication $A \Rightarrow B = \neg A \vee B$, on voit que cette formule est égale à

$$\forall x.A \vee \exists x.\neg A$$

qui, après avoir transformé la disjonction en virgule, est une identité de **LK** monolatère, donc cette formule est banalement prouvable.

5. On fait la preuve en **LK** bilatère :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(z,z) \vdash A(z,z)}\,\mathsf{id}}{\forall x.A(x,x) \vdash A(z,z)}\,\forall\vdash}{\forall x.A(x,x) \vdash \exists y.A(z,y)}\,\vdash\exists}{\forall x.A(x,x) \vdash \forall x.\exists y.A(x,y)}\,\vdash\forall}{\vdash \forall x.A(x,x) \Rightarrow \forall x.\exists y.A(x,y)}\,\vdash\Rightarrow$$

6. Cette formule n'est pas prouvable, car elle admet un contre-modèle. En effet, définissions la structure $\mathcal{S}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathcal{S}} &:= \{\text{Amélie}, \text{Pierre}\},\\ \mathcal{S}(A) &:= \{(\text{Amélie}, \text{Pierre}), (\text{Pierre}, \text{Amélie})\}.\end{aligned}$$

On voit bien que $\mathcal{S} \not\models (\forall x.\exists y.A(x,y)) \Rightarrow \forall x.A(x,x)$, car il est vrai que, pour tout individu $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, il existe un individu $y \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ tel que la relation $A(x,y)$ est vérifiée (si $x =$ Amélie, on prend $y =$ Pierre ; si $x =$ Pierre, on prend $y =$ Amélie), mais il n'existe cependant aucun individu $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ tel que $A(x,x)$ soit vérifiée.

Exercice 2.

1. On sait déjà que cette formule est prouvable intuitionnistiquement, on en a donné une preuve en **NJ** ci-dessus (et on a ainsi répondu aussi à la question bonus).
2. On sait déjà que cette formule est prouvable intuitionnistiquement, on en a donné une preuve en **NJ** ci-dessus (et on a ainsi répondu aussi à la question bonus).
3. Cette formules n'est pas prouvable intuitionnistiquement. Pour le montrer, on procède par l'absurde, en utilisant la *propriété de la disjonction* de **LJ**, qui s'énonce ainsi :

   Propriété de la disjonction de LJ : *si* $\vdash A \vee B$ *est prouvable en* **LJ**, *alors soit* $\vdash A$ *soit* $\vdash B$ *est prouvable en* **LJ**.

   Supposons donc, par l'absurde, que $\vdash (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ était prouvable en **LJ**. Alors, par la propriété de la disjonction, au moins l'un entre $\vdash P \Rightarrow Q$ et $\vdash Q \Rightarrow P$ devrait être prouvable en **LJ**. Mais, en appliquant une règle de l'implication à droite, qui est la seule possible grâce au théorème d'élimination des coupures, on aboutit dans les deux cas à des séquents improuvables :

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \Rightarrow Q}\,{\vdash\Rightarrow} \qquad\qquad \dfrac{Q \vdash P}{\vdash Q \Rightarrow P}\,{\vdash\Rightarrow}$$

   Puisque la seule règle que l'on a appliquée est réversible, on peut conclure qu'aucune des formules $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ n'est prouvable, en obtenant la contradiction souhaitée.

Exercice 3. Considérons la preuve de l'énoncé :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array}}{\vdash A \wedge B}\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\text{id} \quad \dfrac{}{\vdash \neg A, A}\,\text{id}}{\vdash \neg A, \neg B, B \wedge A}\wedge \quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\text{id}}{\vdash \neg A, \neg B, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\wedge}{\vdash \neg A, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\text{cntr}}{\vdash \neg A \vee \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\vee}{\vdash (B \wedge A) \wedge B}\,\text{cut}$$

La seule coupure est principale, on applique donc la règle d'élimination correspondante, et l'on obtient

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\text{id} \quad \dfrac{}{\vdash \neg A, A}\,\text{id}}{\vdash \neg A, \neg B, B \wedge A}\wedge \quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\text{id}}{\vdash \neg A, \neg B, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\wedge}{\vdash \neg A, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\text{cntr}}{\vdash \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\text{cut}}{\vdash (B \wedge A) \wedge B}\,\text{cut}$$

On se trouve maintenant en présence de 2 coupures commutatives. On agit sur la maximale, c'est-à-dire celle qui est placée le plus haut dans la preuve : c'est la coupure entre A et $\neg A$. On repère les ancêtres principaux de $\neg A$: il n'y en a qu'un, mis en évidence ci-dessous :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id} \quad \dfrac{}{\vdash \boxed{\neg A}, A}\,\mathsf{id}}{\vdash \neg A, \neg B, B \wedge A}\,\wedge \quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id}}{\vdash \neg A, \neg B, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\wedge}{\vdash \neg A, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cntr}}{\vdash \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cut}}{\vdash (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cut}$$

On applique alors une étape commutative : on fait remonter la coupure jusqu'à l'ancêtre principal :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array} \quad \dfrac{}{\neg A, A}\,\mathsf{id}}{A}\,\mathsf{cut}}{\vdash \neg B, B \wedge A}\,\wedge \quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id}}{\vdash \neg B, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\wedge}{\vdash \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cntr}}{\vdash (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cut}$$

On peut ici éliminer immédiatement la coupure entre A et $\neg A$, car il s'agit d'une coupure sur une identité :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array}}{\vdash \neg B, B \wedge A}\,\wedge \quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id}}{\vdash \neg B, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\wedge}{\vdash \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cntr}}{\vdash (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cut}$$

On s'occupe maintenant de la dernière coupure restante, qui est aussi commutative. Les ancêtres principaux de $\neg B$ sont mis en évidence ci-dessous :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \boxed{\neg B}, B}\,\mathsf{id} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array}}{\vdash \neg B, B \wedge A}\,\wedge \quad \dfrac{}{\vdash \boxed{\neg B}, B}\,\mathsf{id}}{\vdash \neg B, \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\wedge}{\vdash \neg B, (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cntr}}{\vdash (B \wedge A) \wedge B}\,\mathsf{cut}$$

On applique donc la même étape commutative, qui produit cette fois-ci une duplication de σ, car il y a 2 ancêtres principaux :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array} \quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id}}{\vdash B}\,\mathsf{cut} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array}}{\vdash B \wedge A}\,\wedge \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array} \quad \dfrac{}{\vdash \neg B, B}\,\mathsf{id}}{\vdash B}\,\mathsf{cut}}{\vdash (B \wedge A) \wedge B}\,\wedge$$

On remarque que l'on a aussi supprimé la contraction, car il n'y a plus de formules à contracter, σ n'ayant que la seule conclusion B. Si σ avait été une preuve de $\vdash \Gamma, B$, on aurait conservé les contractions pour contracter les 2 copies de Γ que l'on aurait obtenu.

On peut maintenant éliminer immédiatement les deux coupures restantes, car il s'agit de coupures sur des identités, et l'on obtient ainsi la forme sans coupures demandée :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\pi\\ \vdash A\end{array}}{\vdash B \wedge A}\,\wedge \quad \begin{array}{c}\vdots\,\sigma\\ \vdash B\end{array}}{\vdash (B \wedge A) \wedge B}\,\wedge$$