Théorie de la démonstration

Examen final

23 avril 2013

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1. (Traduction de Krivine) On considère le language de formules suivant :

$$A, B \quad ::= \quad X \mid \bot \mid A \Rightarrow B,$$

où X varie sur un ensemble quelconque d'atomes propositionnels. Comme d'habitude, on définit la négation par $\neg A := A \Rightarrow \bot$.

Si C est une formule du langage ci-dessus, on définit la formule C^{K} par induction, comme suit :

$$X^{\mathrm{K}} := \neg X,$$
$$\bot^{\mathrm{K}} := \bot,$$
$$(A \Rightarrow B)^{\mathrm{K}} := A^{\mathrm{K}} \Rightarrow B^{\mathrm{K}}.$$

En d'autres termes, C^{K} est obtenue a partir de C en rajoutant des négations à tous les atomes de C.

a. Démontrer que, pour toute formule A, on a $\neg\neg A^{\mathrm{K}} \vdash A^{\mathrm{K}}$ en **NJ**.

b. En déduire que si A est prouvable en **NK**, alors A^{K} est prouvable en **NJ**.

Exercice 2. (Une sémantique dénotationnelle du λ-calcul linéaire) Un λ-terme M est *linéaire* si :

- toute variable apparaît libre dans M au plus une fois ;
- pour tout sus-terme de M de la forme $\lambda x.N$, x apparaît libre dans N au plus une fois.

Les termes linéaires sont évidemment stables par β-réduction : si M est linéare et $M \to_\beta M'$, M' est aussi linéaire.

On considère les types simples engendrés par la grammaire habituelle :

$$T, U ::= X \mid T \to U,$$

où X varie sur un ensemble de types de base.

On définit un *contexte* comme une suite de la forme

$$x_1 : T_1, \ldots, x_n : T_n,$$

où les x_i sont des variables deux à deux distinctes et les T_i sont des types. On utilise Γ, Δ pour dénoter des contextes quelconques et on écrit $\Gamma \# \Delta$ dans le cas où Γ et Δ n'ont pas de variable en commun.

Un *jugement* est une expression de la forme

$$\Gamma \vdash M : T$$

où

- M est un λ-terme linéaire ;
- T est un type ;
- Γ est un contexte contenant exactement les variables libres de M.

Les jugements peuvent être dérivés à partir des règles suivantes :

$$\frac{}{x : T \vdash x : T} \qquad \frac{\Gamma, x : T \vdash M : U}{\Gamma \vdash \lambda x.M : T \to U} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : T \to U \quad \Delta \vdash N : T}{\Gamma, \Delta \vdash MN : U}\ \Gamma \# \Delta$$

Soit M linéaire, dont les variables libres sont $x_1, \dots, x_n$. On définit l'ensemble

$$[\![M]\!] := \big\{\ T_1 \to \cdots \to T_n \to T \ \mid\ x_1 : T_1, \dots, x_n : T_n \vdash M : T \ \text{ est dérivable}\big\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que $[\![M]\!]$ est inviariant par β-réduction, c'est-à-dire, l'ensemble des types que l'on peut donner à un terme linéaire est une sémantique dénotationnelle.

a. Démontrer le *lemme de substitution* suivant : pour tous λ-termes linéaires M et N, si les jugements

$$\Gamma, x : T \vdash M : U,$$
$$\Delta \vdash N : T$$

sont dérivables, avec $\Gamma \# \Delta$, alors

$$\Gamma, \Delta \vdash M[N/x] : U$$

est dérivable.

b. En déduire la propriété de *réduction du sujet* : pour tous λ-termes linéaires M, M' tels que $M \to_\beta M'$, si

$$\Gamma \vdash M : T$$

est dérivable, alors

$$\Gamma \vdash M' : T$$

est dérivable (autrement dit, $[\![M]\!] \subseteq [\![M']\!]$).

c. Démontrer le *lemme d'expansion* suivant : pour tout λ-terme linéaire P contenant la variable libre y et pour tout λ-terme linéaire Q, si

$$\Gamma \vdash P[Q/y] : T$$

est dérivable, alors

$$\Gamma \vdash (\lambda y.P)Q : T$$

est dérivable. (*La preuve est par induction sur* P).

d. En déduire la propriété d'*expansion du sujet* : pour tous λ-termes linéaires M, M' tels que $M \to_\beta M'$, si

$$\Gamma \vdash M' : T$$

est dérivable, alors

$$\Gamma \vdash M : T$$

est dérivable (autrement dit, $[\![M']\!] \subseteq [\![M]\!]$).

Exercice 3. (Opérateurs « ou » séquentiel et parallèle) Soit

$$\mathbf{B} = \{\perp, \mathbf{t}, \mathbf{f}\}$$

avec l'ordre partiel $\perp \leq \mathbf{t}$, $\perp \leq \mathbf{f}$ (plus les relations réflexives). $(\mathbf{B}, \leq)$ est trivialement un dI-domain (et donc un domaine de Scott). On définit aussi le dI-domain $\mathbf{B} \times \mathbf{B}$ avec l'ordre défini point par point, c'est-à-dire,

$$(x, x') \leq (y, y') \quad \text{ssi} \quad x \leq y \text{ et } x' \leq y'.$$

On considère les deux fonctions monotones $G, P : \mathbf{B} \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}$ définies comme suit :

$$\begin{aligned} G(\perp, x) &= \perp \\ G(\mathbf{t}, x) &= \mathbf{t} \\ G(\mathbf{f}, x) &= x \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbf{B}$, et

$$\begin{aligned} P(\perp, \perp) &= \perp \\ P(\mathbf{t}, x) &= \mathbf{t} \\ P(x, \mathbf{t}) &= \mathbf{t} \\ P(\mathbf{f}, x) &= x \\ P(x, \mathbf{f}) &= x \end{aligned}$$

Évidemment, G et P représentent toutes les deux la fonction « ou » sur les Booléens mais elles se comportent différemment par rapport à l'absence d'information, c'est-à-dire, le point $\perp$ (par exemple, $G(\perp, \mathbf{t}) = \perp$ tandis que $P(\perp, \mathbf{t}) = \mathbf{t}$).

a. Est-ce que G et P sont continues ? (*Ne vous lancez surtout pas dans une vérification de propriétés spécifiques de G et P ! Pensez plutôt à qui sont les points compacts d'un domaine fini...*)

b. On rappelle que, si $f : D \to E$ est une fonction continue entre deux domaines D, E, pour tout $x \in D$ et $e \leq f(x)$ compact, on définit

$$\mathrm{apx}_f(x, e) = \{d \in \mathcal{K}(D) \mid d \leq x,\ e \leq f(d)\},$$

où l'on dénote par $\mathcal{K}(D)$ l'ensemble des points compacts de D.

Calculer $\mathrm{apx}_G((\mathbf{t}, \mathbf{t}), \mathbf{t})$ et $\mathrm{apx}_P((\mathbf{t}, \mathbf{t}), \mathbf{t})$.

c. Que peut-on en déduire sur la stabilité de G et/ou P ?