Théorie de la démonstration

Examen de rattrapage

2 juin 2011

Durée de l'épreuve : 1 heure et 30 minutes.
Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1. Soit $\mathbf{L} = \forall X.X \Rightarrow (A \Rightarrow X \Rightarrow X) \Rightarrow X$ le type des listes de type A dans le système **F**. Comme dans le cas des entiers, on peut démontrer que les termes normaux de type $\mathbf{L}_A$ sont tous de la forme $\Lambda X.\lambda n^X c^{A\Rightarrow X\Rightarrow X}.L$, où L est un terme de type X engendré par la grammaire suivante :

$$L ::= n \bigm| cTL,$$

où T varie sur les termes normaux de type A.

Trouvez un terme $R : \mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{L}$ qui, donnée une liste non vide, rend la liste privée de son premier élément, ou la liste vide sinon. En d'autres termes, R doit être tel que, pour tout $M : \mathbf{L}$,

$$RM \to^* \begin{cases} M & \text{si } M \simeq_\beta \Lambda X.\lambda n^X c^{A\Rightarrow X\Rightarrow X}.n, \\ \Lambda X.\lambda n^X c^{A\Rightarrow X\Rightarrow X}.L & \text{si } M \simeq_\beta \Lambda X.\lambda n^X c^{A\Rightarrow X\Rightarrow X}.cTL. \end{cases}$$

Exercice 2. Dans ce qui suit, donné un ensemble A, on dénote par $\#A$ sa cardinalité et par $\wp(A)$ l'ensemble de ses parties.

On rappelle qu'un *espace cohérent* est une paire $X = (|X|, \frown_X)$ où $|X|$ est un ensemble, appelé *trame*, et $\frown_X$ est une *relation de choérence*, c'est-à-dire une relation binaire sur $|X|$ qui est réflexive et symétrique. A partir d'un espace cohérent X, on peut définir son *ensemble des cliques*

$$\mathcal{C}(X) = \{x \subseteq |X| \mid \forall a, a' \in x,\ a \frown_X a'\}.$$

Soit U un ensemble, et soient $u, u' \subseteq U$. On définit

$$u \perp u' \qquad \text{ssi} \qquad \#(u \cap u') \leq 1.$$

À partir de cela, si $\mathcal{U} \subseteq \wp(U)$, on pose

$$\mathcal{U}^\perp = \{u' \subseteq U \mid \forall u \in \mathcal{U},\ u' \perp u\}.$$

On définit alors un *espace de cliques* comme une paire $E = (|E|, \mathfrak{C}(E))$, où $|E|$ est un ensemble et $\mathfrak{C}(E) \subseteq \wp(|E|)$ est tel que $\mathfrak{C}(E)^{\perp\perp} = \mathfrak{C}(E)$.

Montrez les énoncés suivants :

(a) pour tout espace cohérent X, $(|X|, \mathcal{C}(X))$ est un espace de cliques ;

(b) pour tout espace de cliques E, si on définit l'espace cohérent $X_E = (|E|, \frown)$ en posant, pour $a, a' \in |E|$, $a \frown a'$ ssi $\{a, a'\} \in \mathfrak{C}(E)$, on a $\mathcal{C}(X_E) = \mathfrak{C}(E)$.