Transformée de Fourier

Exercice 1

Déterminer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

1. $f_1(t)$ vaut 1 sur $[-1, 1]$ et 0 partout ailleurs.
2. $f_2(t) = \mathcal{U}(t+1) - \mathcal{U}(t-1)$.
3. $f_3(t)$ vaut 1 sur $[-T, T]$ et 0 partout ailleurs ($T > 0$).
4. $f_4(t) = e^{-\frac{|t|}{T}}$ ($T > 0$).
5. $f_5(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.
6. $f_6(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Exercice 2

Soit $a > 0$ et soit la fonction $q_a(t) = 1 - \dfrac{|t|}{a}$ pour $|t| \leq a$ et $q_a(t) = 0$ pour $|t| > a$.

1. Calculer $q_a'(t)$ et l'écrire en fonction de ρ_a. (Rappelons que ρ_a est la fonction impulsion rectangulaire qui vaut 1 sur $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ et 0 ailleurs.)
2. En déduire l'expression de $\widehat{q_a'}(\omega)$.

Exercice 3

Soit l'équation $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}$ pour $0 < a < b$, f absolument intégrable et bornée. Déterminer $\hat{f}$ puis en déduire f.

Exercice 4

Soit la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ pour $a > 0$.

1. Calculer sa transformée de Fourier (sans utiliser le formulaire).
2. En déduire la transformée de Fourier de $g\colon x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer le produit de convolution $f * f$ et en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 5

Pour $t > 0$, on pose $S_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Calculer sa transformée de Fourier de deux façons différentes (dont l'une utilisant la formule d'inversion). En déduire que l'ensemble $\{\, S_t \colon t > 0 \,\}$ forme un semi-groupe pour le produit de convolution (i.e., qu'il est clos par le produit de convolution, et que ce dernier est associatif).

Exercice 6

Le but de cet exercice est de chercher des fonctions u absolument intégrables et bornées vérifiant pour tout x réel,

$$u(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} u(y) dy,$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution pour $\beta < \dfrac{1}{2}$.

Exercice 7
On considère une tige homogène très mince de longueur infinie. La température de la tige au temps $t \geq 0$ et au point d'abscisse $x \in \mathbb{R}$ est notée $u(t,x)$. On suppose que cette fonction vérifie l'équation suivante (dite équation de la chaleur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ avec pour condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$. On suppose que u_0 est absolument intégrable et bornée, et on cherche une solution à l'équation de la chaleur qui soit C^1 par rapport à la variable temps et C^2 par rapport à la variable d'espace. On suppose que l'équation précédente possède une solution u telle qu'il existe une fonction g absolument intégrable, tendant vers 0 en l'infini, vérifiant, pour tout $t \geq 0$,

$$|u(t,x)| \leq g(x), \; \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x), \; \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right| \leq g(x), \; \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq g(x).$$

On note $\hat{f}_x(t,\omega)$ la transformée de Fourier d'une fonction $(t,x) \mapsto f(t,x)$ par rapport à la variable d'espace x, i.e., $\hat{f}_x(t,\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,s)e^{-is\omega}ds$. On admet que $\widehat{\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)}_x = \dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}_x$ (cela provient de $\left|\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$), c'est-à-dire que l'on peut permuter les symboles d'intégration et de dérivation dans $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx}ds\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)$.

1. Montrer que $\widehat{\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}_x = -x^2\hat{u}_x$.
2. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, on note $v(t) = \hat{u}_x(t,x)$. Montrer que v est solution d'une équation différentielle en t.
3. Résoudre cette équation.
4. En déduire une valeur de u.

Exercice 8
Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}dx.$$