d-Orthogonal Packing Problem avec Ordres

D.Mohia - Cermics -14 juin 2011

d–Orthogonal Packing Problem

Input : Ensemble $V := \{v_1, ..., v_n\}$ de boîtes parallélépipèdes, une fonction de tailles $w : V \to \mathbb{R}_+^{*d}$. Un conteneur C de taille $W \in \mathbb{R}_+^{*d}$.

Question : Existe-t-il un chargement de V dans C?

d–Orthogonal Packing Problem

Conditions du chargement :

Orthogonalité : La face de chacune des boîtes est parallèle à une face du conteneur.

Contiguïté : Aucune boîte ne dépasse les bornes du conteneur.

Disjonction : Les boîtes ne se chevauchent pas.

Orientation fixe : La rotation des boîtes n'est pas admise.

Modélisation du problème

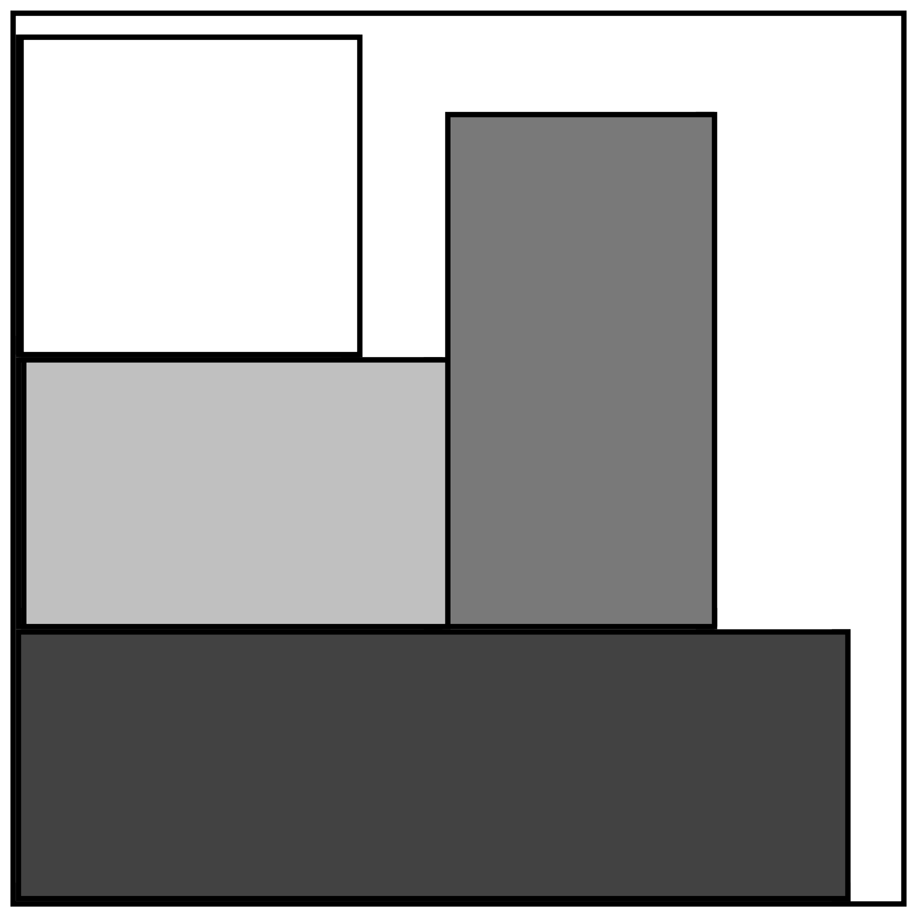
Idée de base :

Utiliser l'information combinatoire induite par les positions relatives des boîtes dans le conteneur.

$\longrightarrow$ *Packing Classes* [S.Fekete, J.Schepers (2004)]

Modélisation du problème

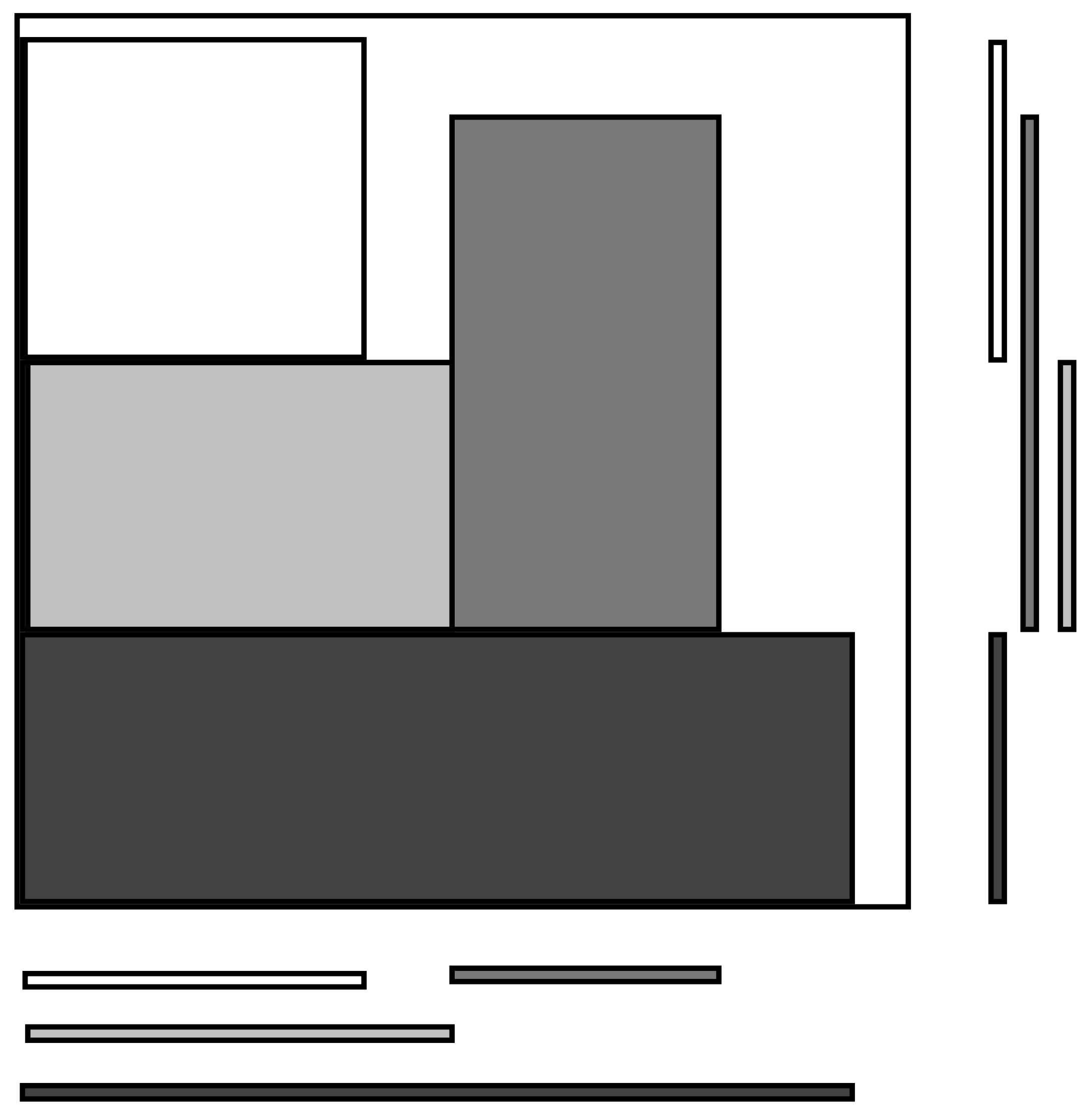
Packing Classes



Modélisation du problème

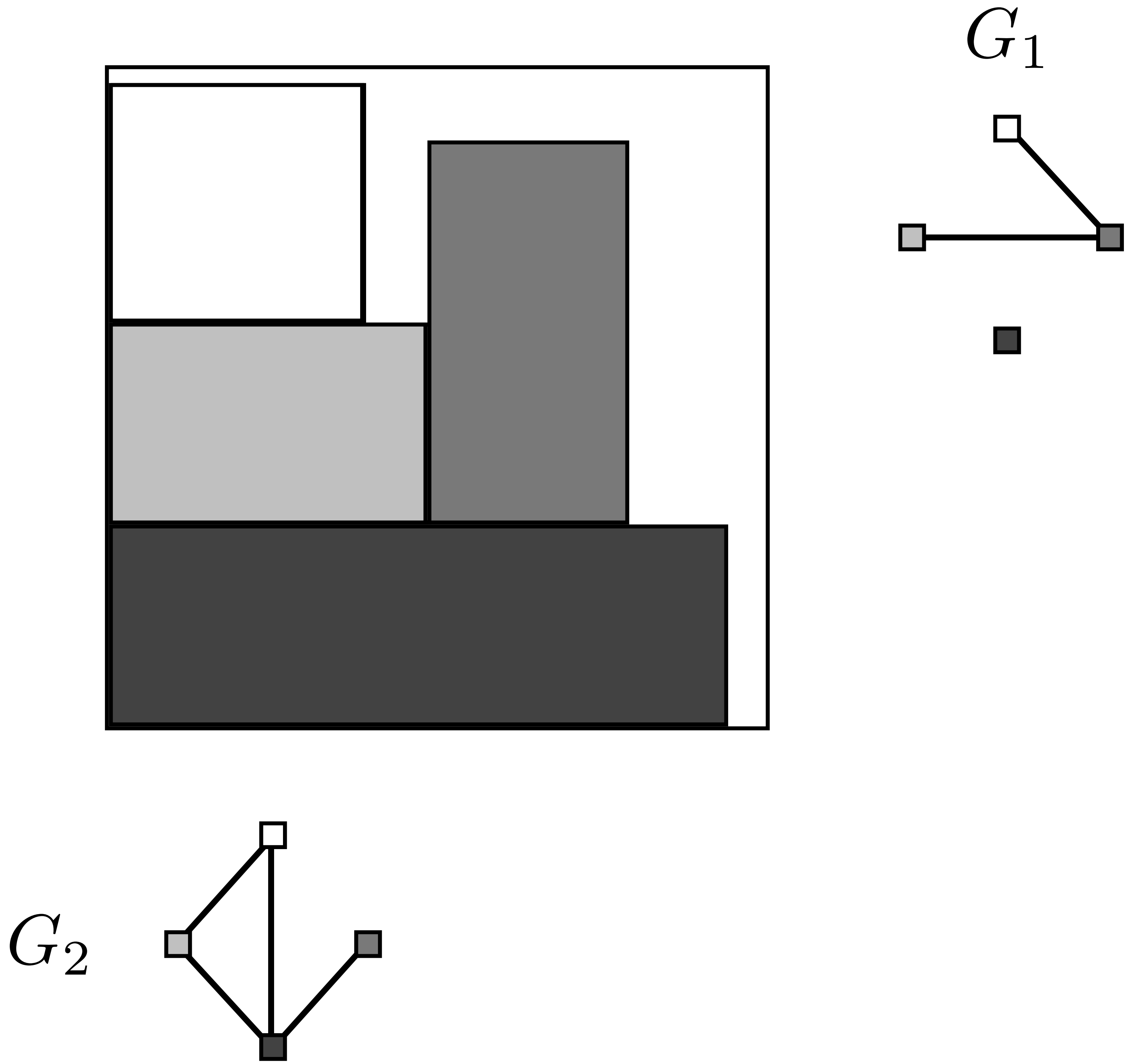
Packing Classes

Considérons la projection des boîtes sur les axes du conteneur



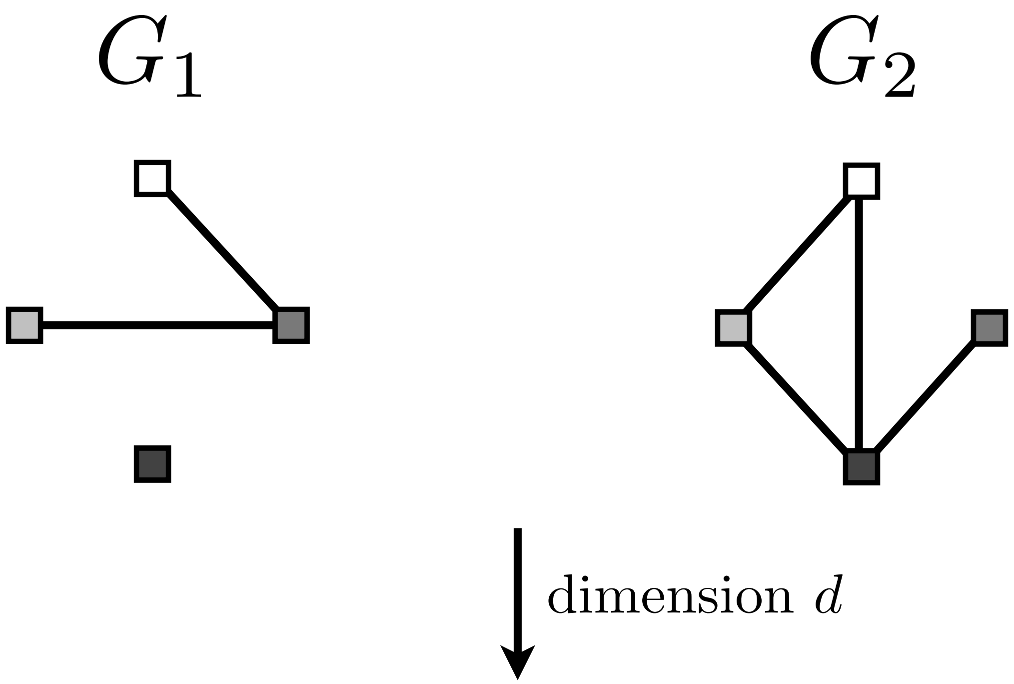
Modélisation du problème

Packing Classes



Modélisation du problème

Packing Classes – Condition nécessaire



d graphes avec les propriétés :

P1 : Les d graphes sont des graphes d'*intervalles*.

P2 : Tout stable S_i de G_i est i–réalisable.

P3 : $\bigcap_{i \in \{1,\ldots,d\}} E_i = \emptyset$.

Modélisation du problème

Packing Classes – Condition suffisante

Soient d graphes avec les propriétés :

P1 : Les d graphes sont des graphes d'*intervalles*.

P2 : Tout stable S_i de G_i est i–réalisable.

P3 : $\bigcap_{i\in\{1,\ldots,d\}} E_i = \emptyset$.

Alors il existe un chargement (V, w, W).

$\downarrow$

Packing Class

Modélisation du problème

Packing Classes

Théorème 1 : [Fekete, Schepers (2004)] *Un ensemble de boîtes de dimension d peut être chargé dans un conteneur C ssi il existe un Packing Class pour* (V, w).

d–Orthogonal Packing Problem

Formellement :

Etant donnés V un ensemble de boîtes, une fonction de tailles w et un conteneur de taille W,

Une fonction $p : V \to \mathbb{R}_{+}^{*d}$ est un *chargement* de (V, w, W), ssi

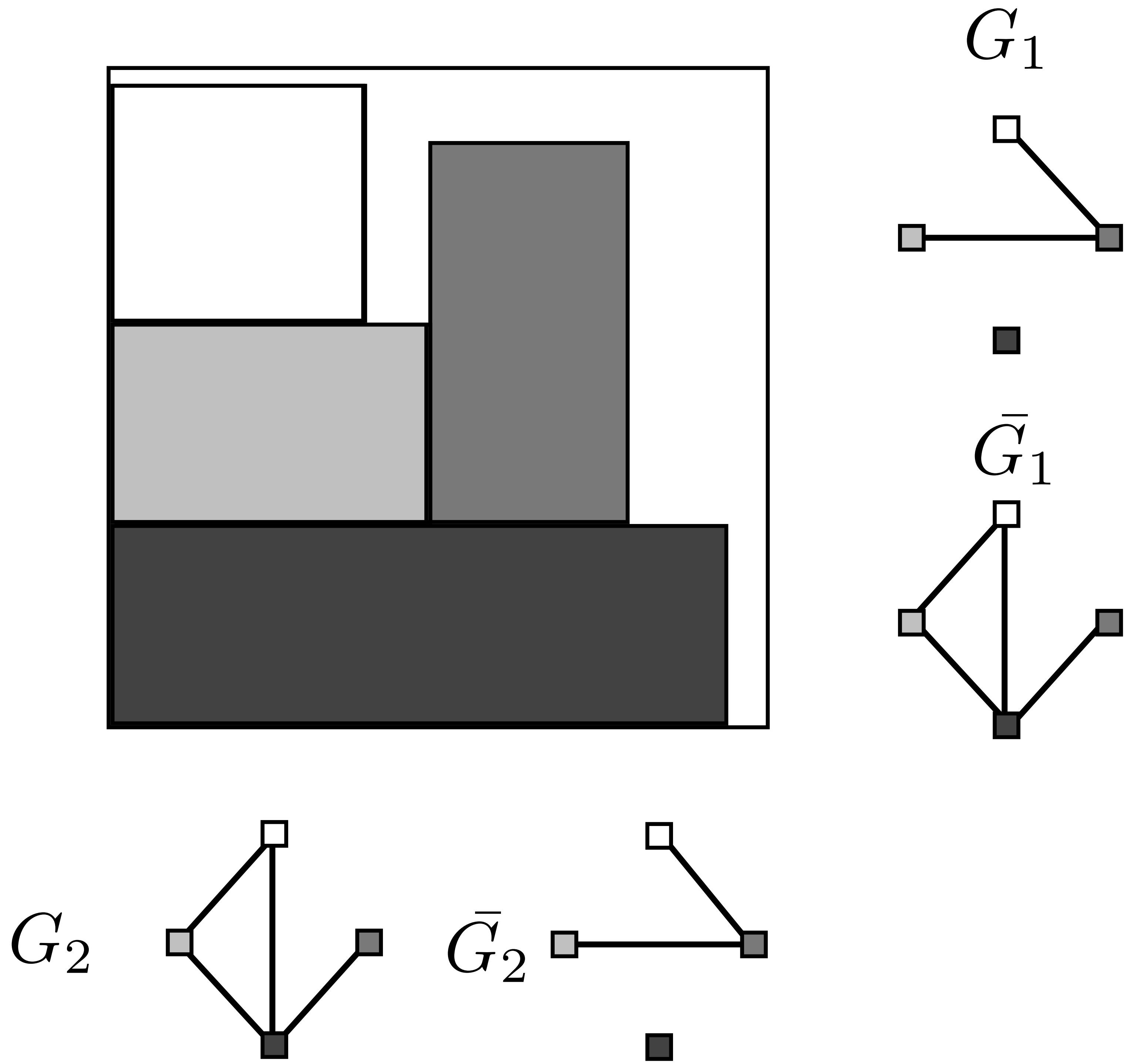
$$\forall v \in V \ \ : \ \ p(v) + w(v) \leq W \qquad (1)$$

$$\forall u,\ v \in V,\ u \neq v,\ \exists i \in \{1, ..., d\} \ \ : \ \ I_i^p(u) \cap I_i^p(v) = \emptyset \qquad (2)$$

avec $I_i^p(u) = [p_i(u)\ , p_i(u) + w_i(u)]$

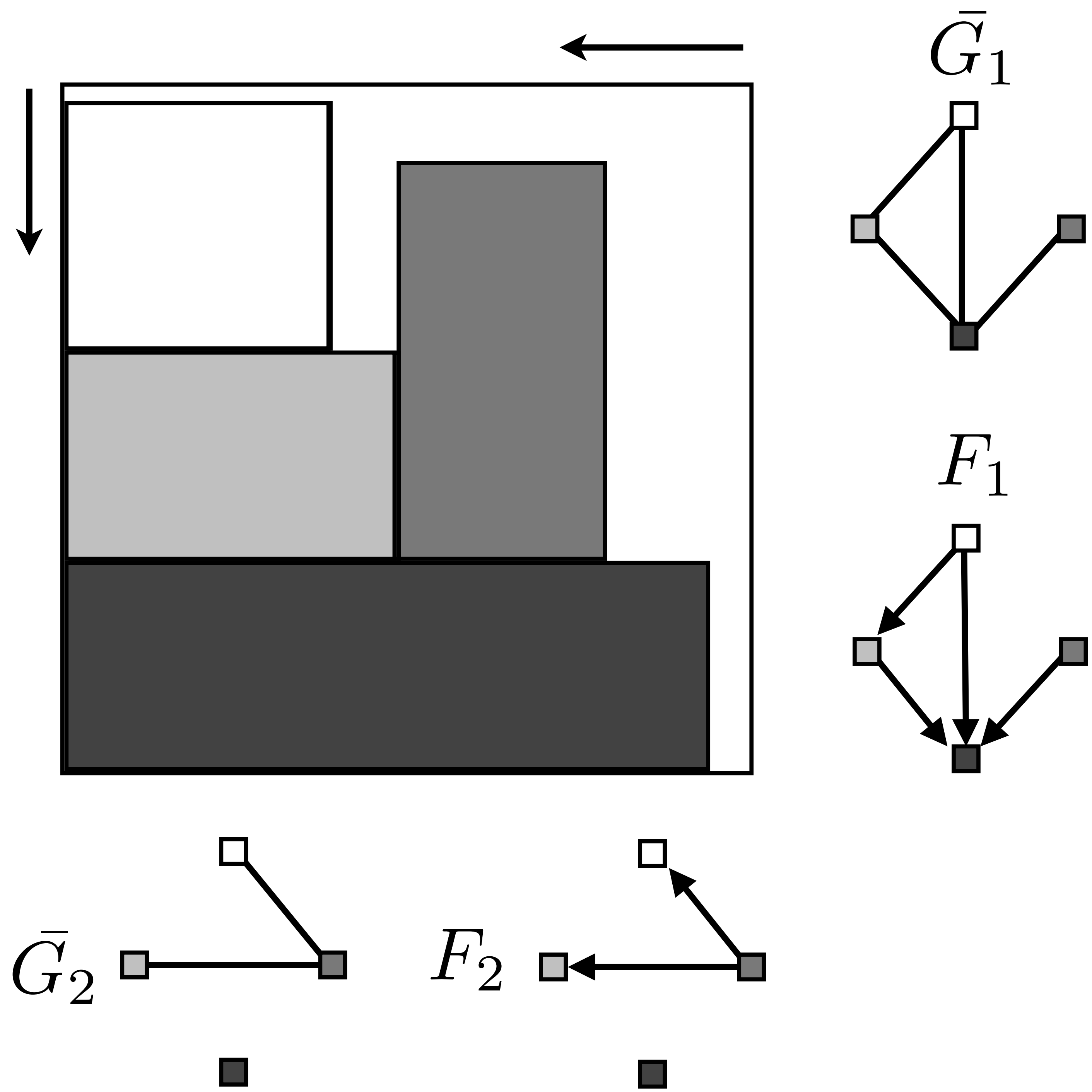
Modélisation du problème

Graphes de Comparabilité



Modélisation du problème

Orientation Transitive



d–Orthogonal Packing Problem

Eléments de preuve :

(1)

• Une fonction de placement $p_i^F(u) := max\{p_i^F(v) + w_i(v) \ / \ \overrightarrow{uv} \in F_i\}$.

• Un chemin dans le graphe de comparabilité est une clique et donc un stable dans le graphe d'intervalle. $P2$.

(2)

• Pour $u, v \in V$, par $P3$, il existe $i \in \{1, ..., d\}$ tel que soit $\overrightarrow{uv} \in F_i$ ou $\overrightarrow{vu} \in F_i$ et donc que $p_i^F(u) \geq p_i^F(v) + w_i(v)$ ou l'inverse.

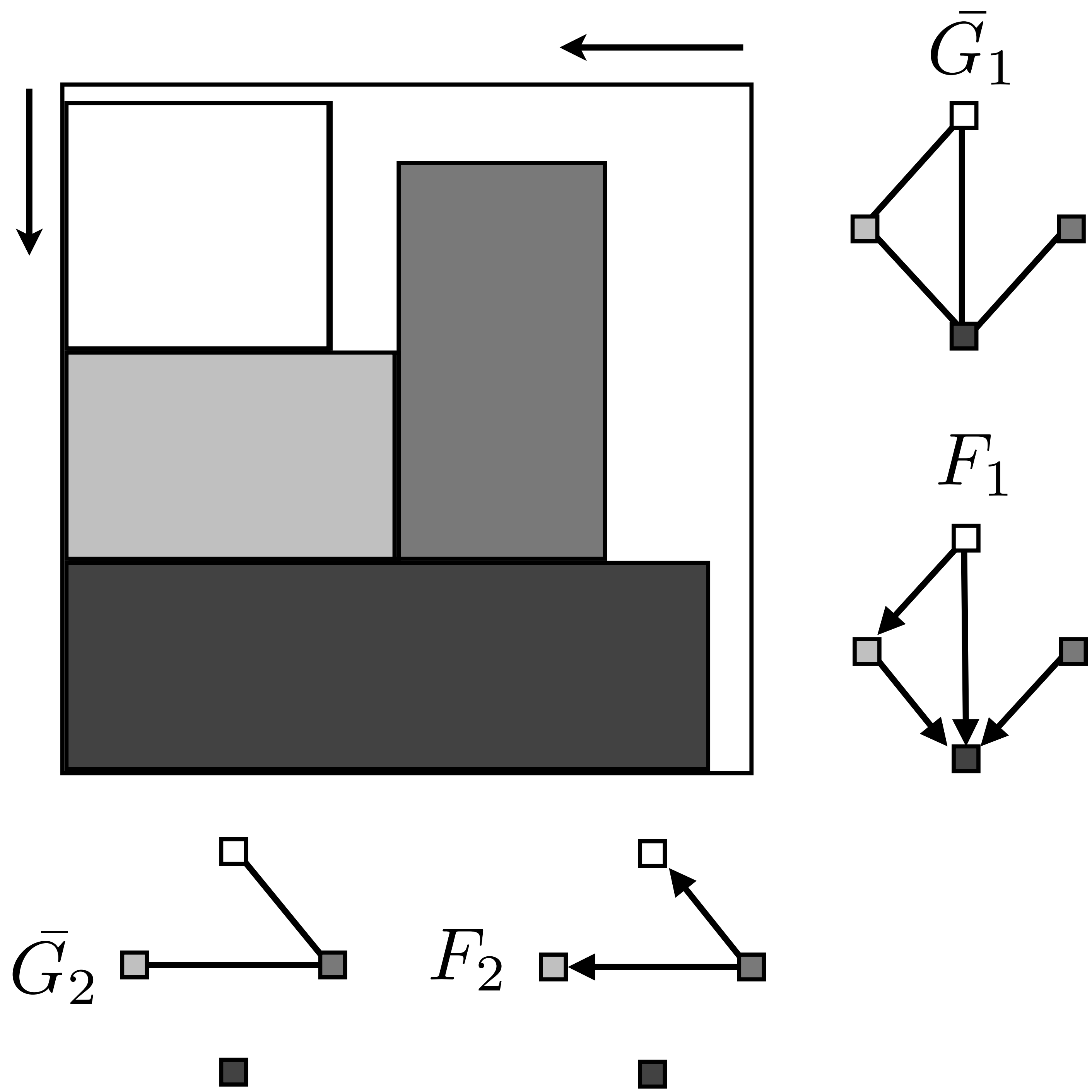
Modélisation du problème

Orientation Transitive

Un chargement existe dès lors qu'il existe une orientation transitive sur les graphes complémentaires.

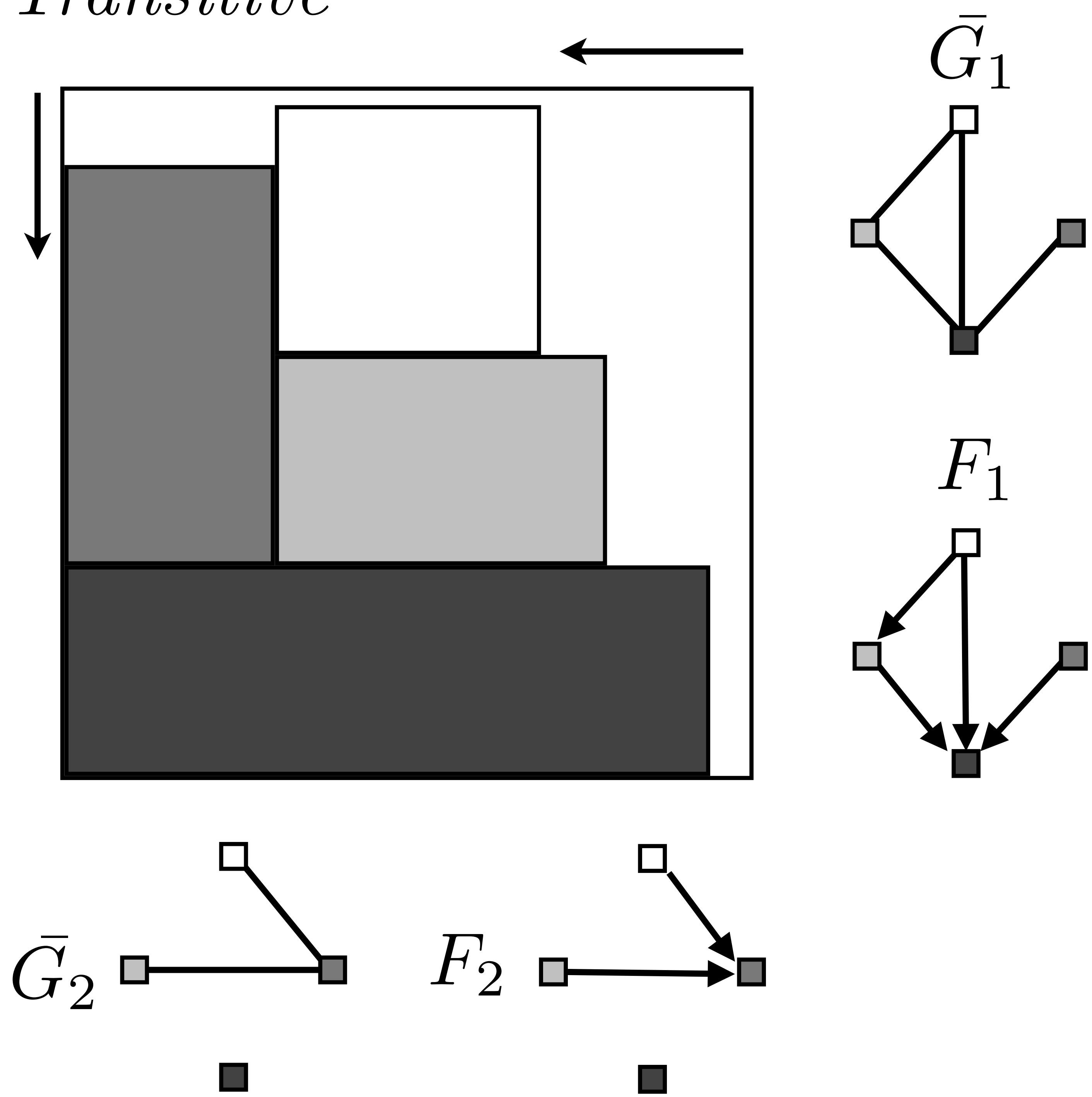
Modélisation du problème

Orientation Transitive



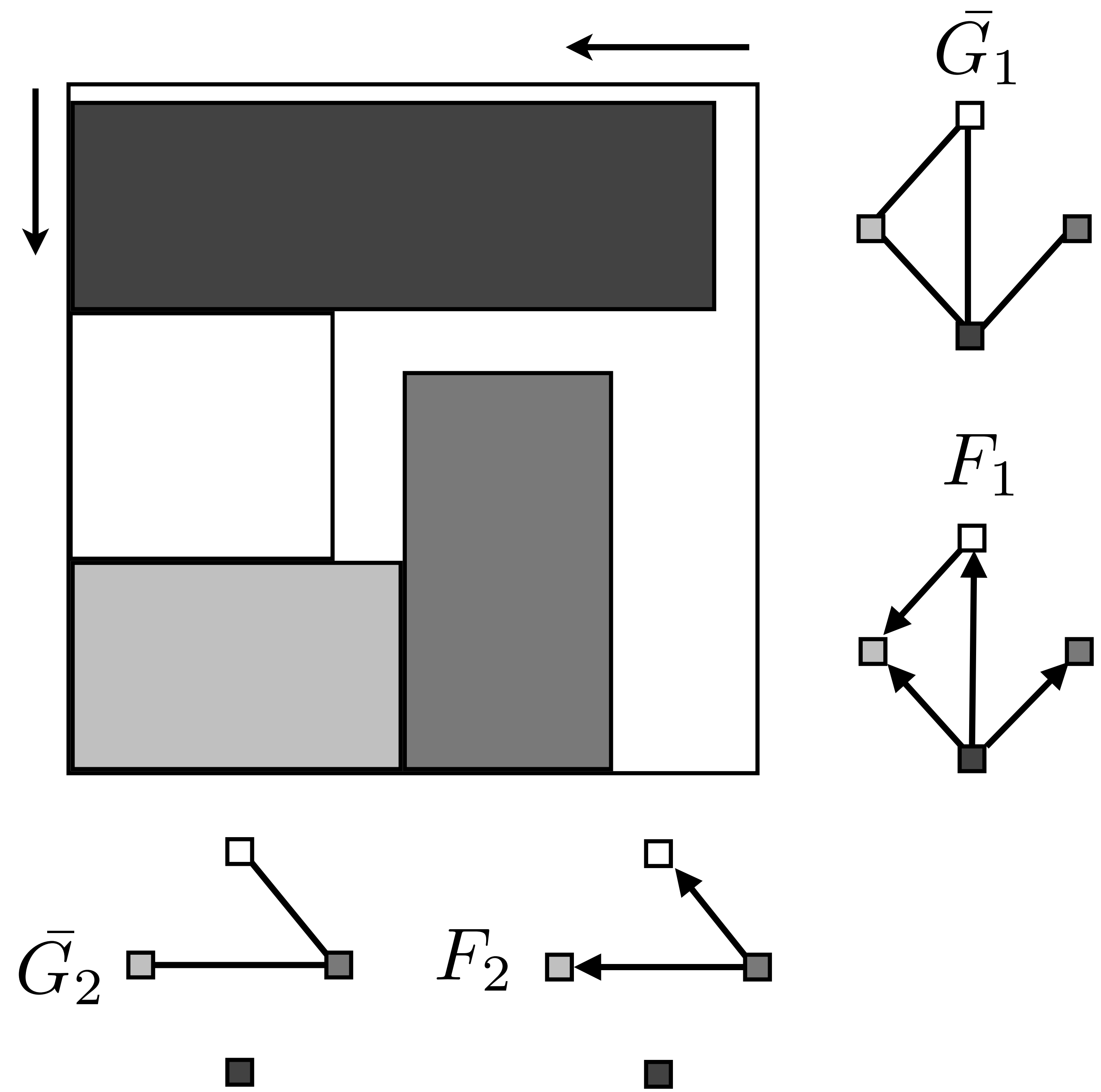
Modélisation du problème

Orientation Transitive



Modélisation du problème

Orientation Transitive



Résolution du problème

Branch and Bound

Objectif : Construire un *Packing Class*.

$E_1, ..., E_d$ pour un ensemble V de boîtes.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dl, "{\{u,v\} \in E_i}"'] \arrow[dr, "{\{u,v\} \notin E_i}"] & \\
{} & & {}
\end{tikzcd}$$

Résolution du problème

Branch and Bound

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\{u,v\} \in E_i"'] \arrow[dr, "\{u,v\} \notin E_i"] & \\ \mathit{Augmenter}\ \mathcal{E}_{i,+} & & \mathit{Augmenter}\ \mathcal{E}_{i,-} \end{tikzcd}$$

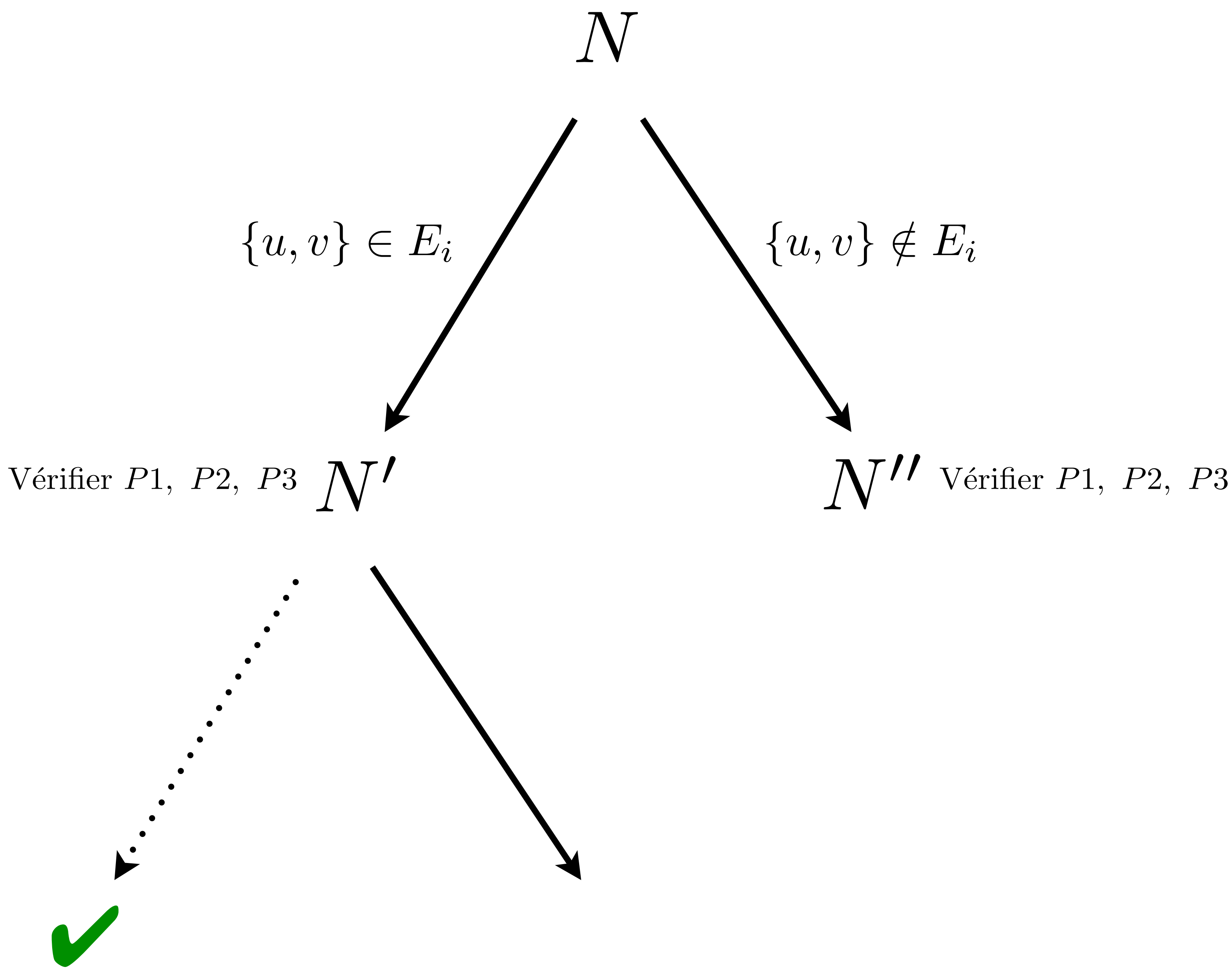
Résolution du problème

Branch and Bound

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\{u,v\} \in E_i"', "Augmenter\ \mathcal{E}_{i,-}"] \arrow[dr, "\{u,v\} \notin E_i", "Augmenter\ \mathcal{E}_{i,+}"'] & \\ N' & & N'' \end{tikzcd}$$

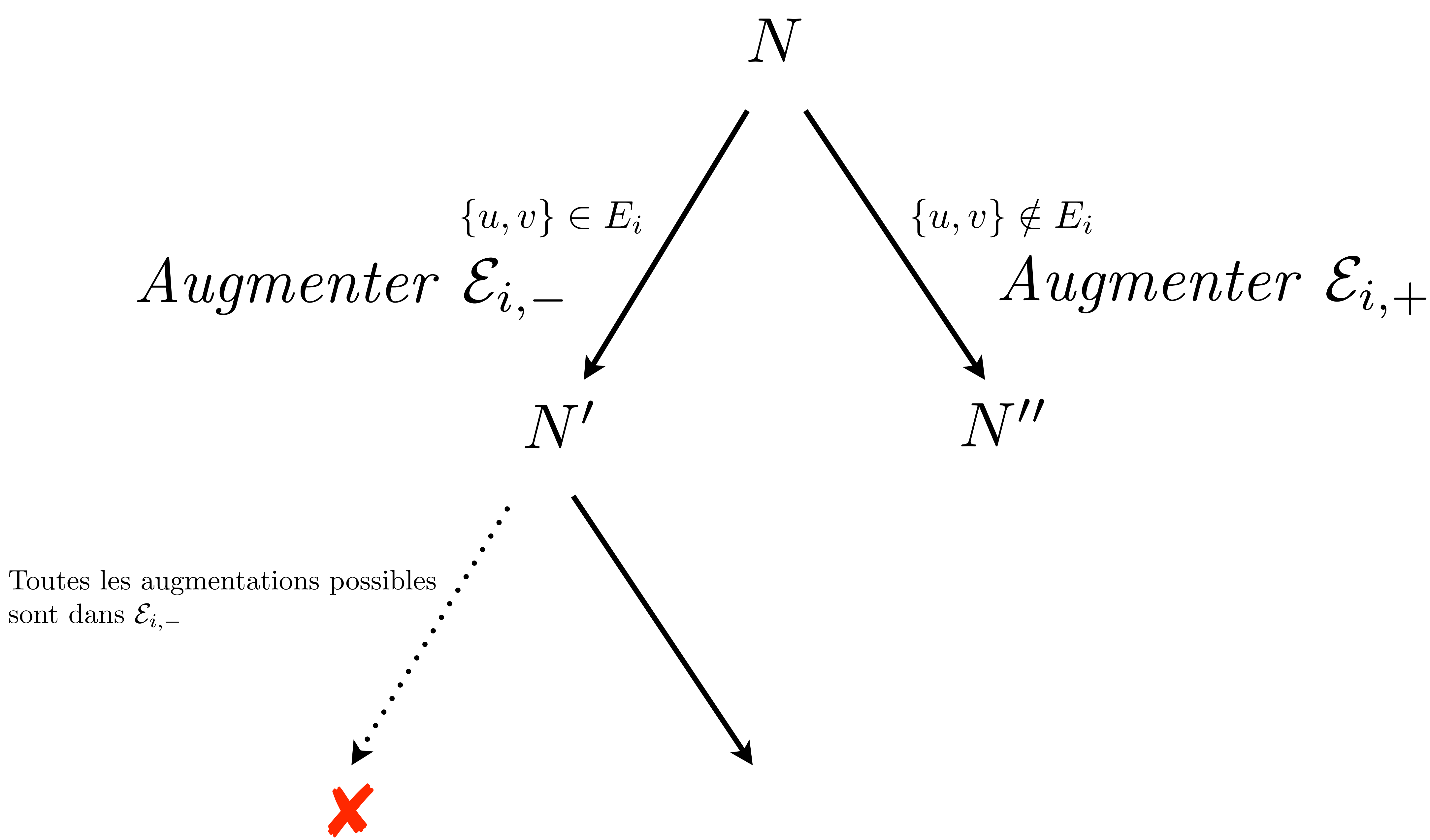
Résolution du problème

Branch and Bound



Résolution du problème

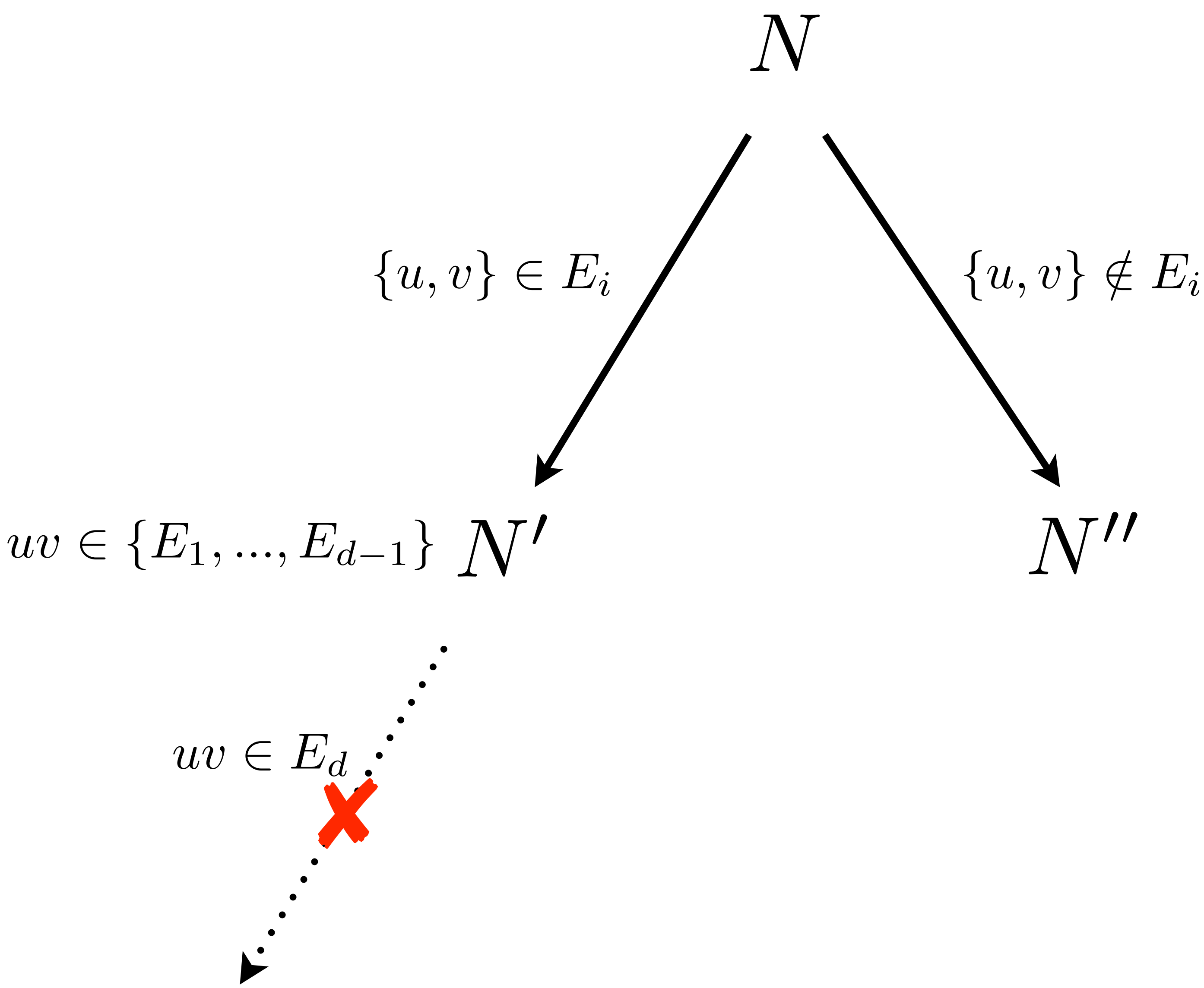
Branch and Bound



Résolution du problème

Branch and Bound

Augmentations



Résolution du problème

Branch and Bound

Augmentations

$$
\begin{tikzcd}
 & & N \arrow[dl, "{\{u,v\} \in E_i}"'] \arrow[dr, "{\{u,v\} \notin E_i}"] & \\
\text{Augmenter } uv \in \mathcal{E}_{d,-} & N' & & N''
\end{tikzcd}
$$

d–OPP avec ordres

d–OPP avec ordres

Input : Ensemble $V := \{v_1, ..., v_n\}$ de boîtes parallélépipèdes, une fonction de tailles $w : V \to \mathbb{R}_+^{*d}$. Un conteneur C de taille $W \in \mathbb{R}_+^{*d}$.

A chaque boîte u est associé un intervalle $\tau_u := [\tau_u^{pu}, \tau_u^{dy}] \in \mathbb{R}$. L'ensemble des intervalle forme une séquence S de chargements et déchargements.

Question : Existe-t-il un chargement de V dans C respectant S?

d–OPP avec ordres

Respectant S :

- Les boîtes bougent selon un axe unique : *Axe de chargement*.
- Une boîte ne bouge que lors de son chargement ou de son déchargement.

d–OPP avec ordres

Propriétés d'un chargement avec ordres :

P1 : Idem

P2 : Idem

P3 Modifiée : Pour tout couple $(u, v) \in V^2$, $u \neq v$, avec $\tau_u \cap \tau_v \neq \emptyset$, il existe une dimension $i \in \{1, ..., d\}$ tel que $uv \notin E_i$.

P4 : Pour tout couple $(u, v) \in V^2$, $u \neq v$, avec $\tau_u \cap \tau_v \neq \emptyset$, si $uv \in E_1$ et $\overrightarrow{uv} \in F_2$ alors $\tau_u \subseteq \tau_v$.

d–OPP avec ordres

Théorème 2 : *Un ensemble de boîtes de dimension d peut être chargé dans un conteneur C en respectant une séquence S, ssi il existe un Packing Class pour (V, w) respectant les propriétés P1, P2, P3 modifiée et P4.*

d–Orthogonal Packing Problem

Formellement :

Etant donnés V un ensemble de boîtes, une fonction de tailles w et un conteneur de taille W,

Une fonction $p : V \to \mathbb{R}_+^{*d}$ est un *chargement* de (V, w, W), ssi

$$\forall v \in V \quad : \quad p(v) + w(v) \leq W \tag{1}$$

$$\forall u,\ v \in V,\ u \neq v,\ \exists i \in \{1, ..., d\} \quad : \quad I_i^p(u) \cap I_i^p(v) = \emptyset \tag{2}$$

avec $I_i^p(u) = [p_i(u)\ , p_i(u) + w_i(u)]$

d–Orthogonal Packing Problem

Formellement :

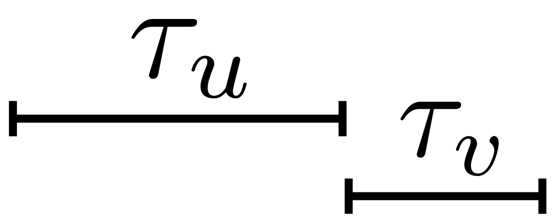
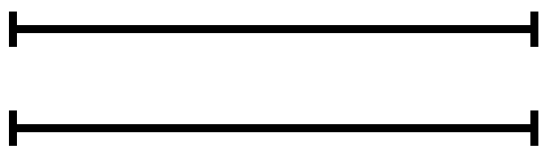
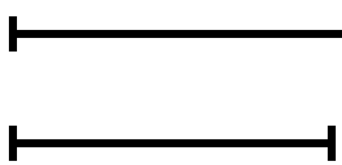
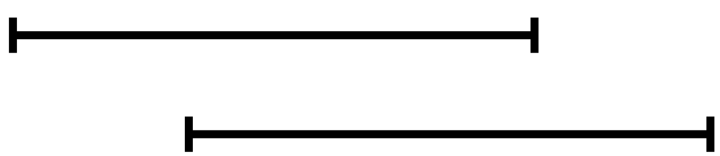
$$\begin{aligned}&\text{Pour deux boîtes } u, v \in V\text{, avec } \tau_u \cap \tau_v \neq \emptyset\text{, si } \tau_u \not\subset \tau_v \\ &\text{alors } I_1^p(u) \cap I_1^p(v) = \emptyset \text{ ou } p_i(u) \geq p_i(v) + w_i(v).\end{aligned} \tag{3}$$

d–Orthogonal Packing Problem

Eléments de preuve :
(3)
• Par $P4$, si $uv \in E_1$ alors $vu \in F_2$ et par conséquent $p_2^F(u) > p_2^F(v) + w_2(v)$.

d–OPP avec ordres

Configurations des intervalles

	$\tau_u \cap \tau_v = \emptyset$	*P3 Originale ne s'applique pas*
	$\tau_u = \tau_v$	*OPP classique*
	$\tau_u \subset \tau_v$	*Si* $uv \in E_1$ *alors* $\overrightarrow{uv} \in F_2$
	*Crossing*	$uv \notin E_1$

d–**OPP avec ordres**

Configurations des intervalles

Claim 1 : *Pour tout couple* $(u, v) \in V^2,\ u \neq v,$ *avec* $\tau_u \cap \tau_v \neq \emptyset$, *si* u *et* v *sont en crossing i.e* $\tau_u \not\subset \tau_v$ *et* $\tau_v \not\subset \tau_u$ *alors* $uv \notin E_1$.

d–OPP avec ordres

Configurations des intervalles

Preuve : De P4 nous avons : Pour tout couple $(u, v) \in V^2$, $u \neq v$, *avec* $\tau_u \cap \tau_v \neq \emptyset$,

si $\tau_u \not\subset \tau_v$ *alors* $uv \notin E_1$ *ou* $\overrightarrow{uv} \notin F_2$.

$\tau_u \not\subset \tau_v \wedge \tau_v \not\subset \tau_u \iff (uv \notin E_1 \vee \overrightarrow{uv} \notin F_2) \wedge (uv \notin E_1 \vee \overrightarrow{vu} \notin F_2)$

$uv \in E_1 \Rightarrow \overrightarrow{uv} \notin F_2 \quad \wedge \quad \overrightarrow{vu} \notin F_2 \iff uv \in E_2$

qui contredit la condition P3.

d–OPP avec ordres

Pré-traitements

Claim 2 : *Soit une instance d'OPP* $P := (V, w, W)$ *avec une séquence* S *et soit* $(u, v) \in V^2$, $u \neq v$ *avec* $\tau_u \cap \tau_v \neq \emptyset$ *et* $\tau_u \not\subset \tau_v$ *et* $\tau_v \not\subset \tau_u$.

Si $w_1(u) + w_1(v) > W_1$ *alors* P *n'est pas réalisable.*

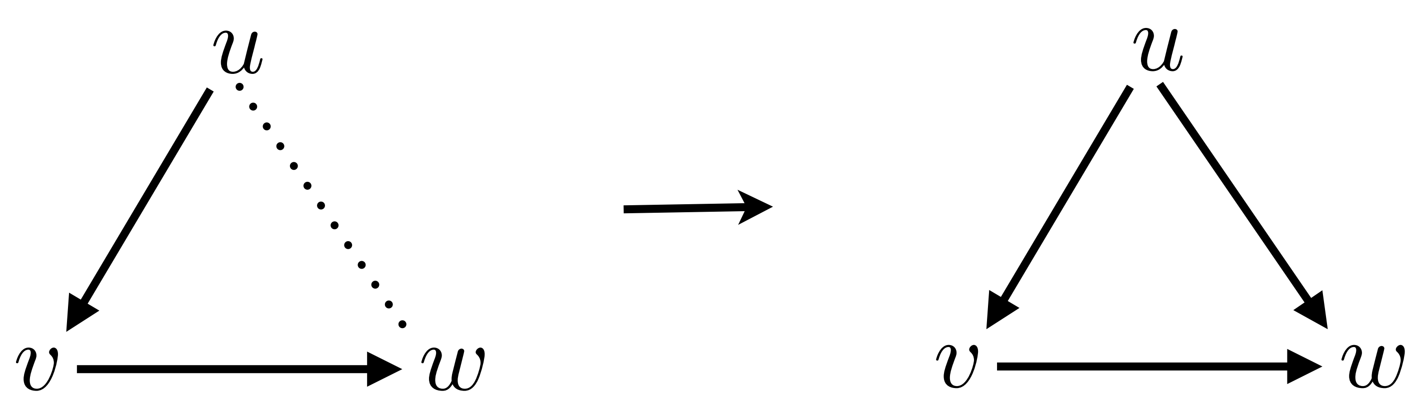
Claim 2 Général : *Soit une instance d'OPP* $P := (V, w, W)$ *avec une séquence* S.
S'il existe un ensemble $\mathcal{C}$ *de boîtes deux à deux en crossing, et* $\sum_{u \in \mathcal{C}} w_1(u) > W_1$ *alors* P *n'est pas réalisable.*

d–OPP avec ordres

Augmentations

- Pour tout couple $(u, v) \in V^2$ en crossing, augmenter $uv \in \mathcal{E}_{-,1}$.

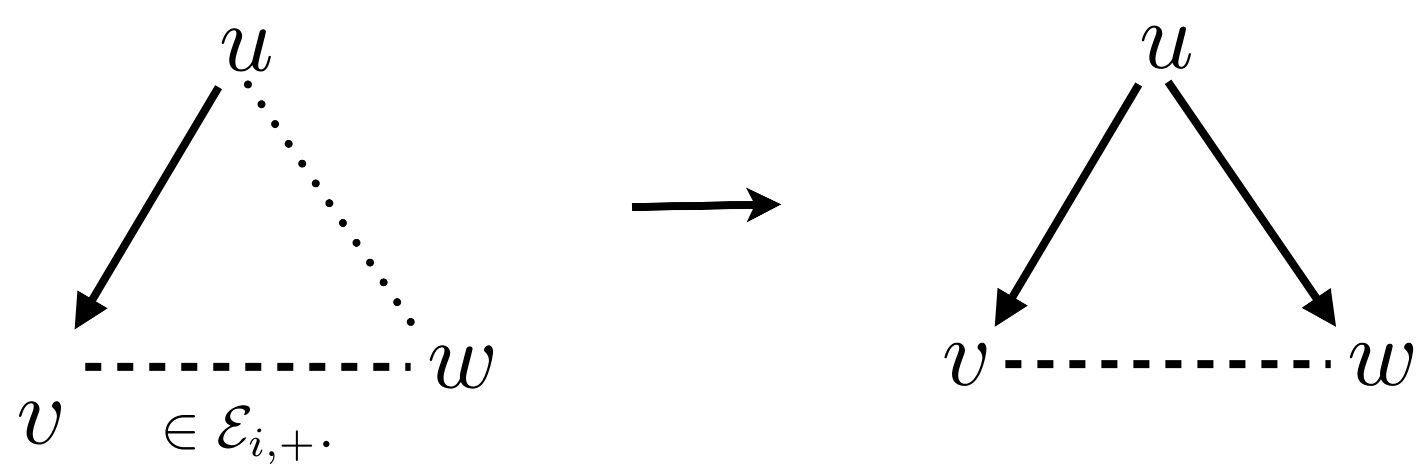
- Pour tout $(u, v, w) \in V^3$, si $\overrightarrow{uv} \in F_i$ et $\overrightarrow{vw} \in F_i$ alors $uw \in F_i$, $i \in \{1, ..., d\}$.



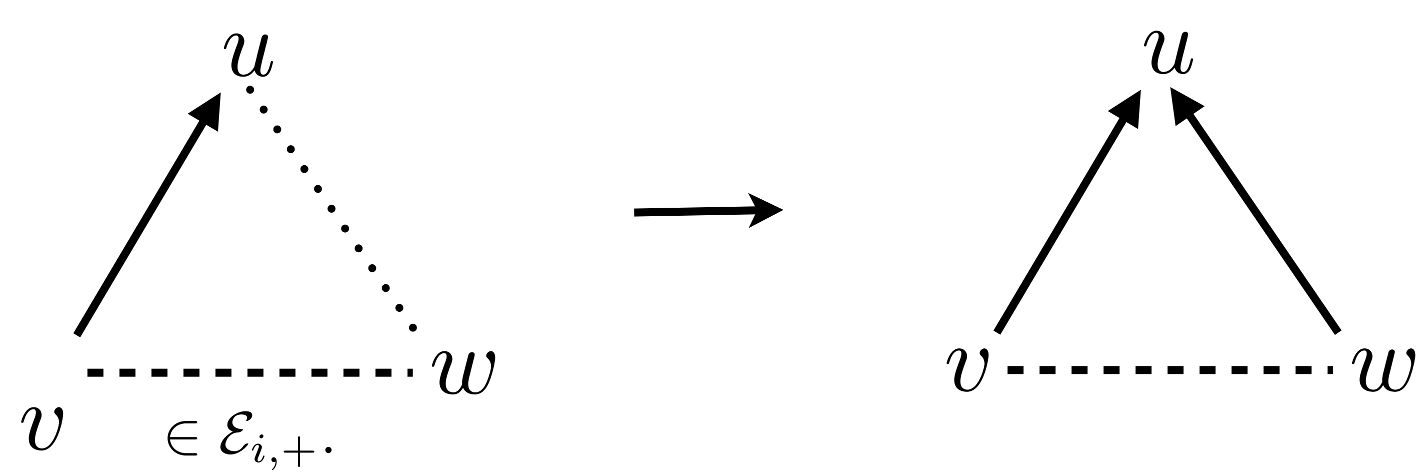
d–**OPP avec ordres**

Augmentations

- Pour tout $(u, v, w) \in V^3$, si $\overrightarrow{uv} \in F_i$ et $vw \in E_i$, alors $\overrightarrow{uw} \in F_i$.



- Pour tout $(u, v, w) \in V^3$, si $\overrightarrow{vu} \in F_i$ et $vw \in E_i$, alors $\overrightarrow{wu} \in F_i$.



Conclusion

- d-OPP Classique impélmenté.
- d-OPP avec ordres en chantier.

Références

Fekete, S. P. and J. Schepers (1997b). On higher-dimensional packing I: Modeling. Technical report, Univ. of Cologne, Center for Parallel Computing.

Fekete, S. P. and J. Schepers (1997c). On higher-dimensional packing II: Bounds. Technical report, Univ. of Cologne, Center for Parallel Computing.