Programmation Semidéfinie et Optimisation Combinatoire

Frédéric Roupin

roupin@lipn.univ-paris13.fr

MPRO 2017-2018

Plan du cours

1. 1. Introduction
2. 2. Bases de la Programmation Semidéfinie
3. Application à l'optimisation combinatoire
4. Utilisations avancées de la PSD
   - Convexification de problèmes quadratiques
   - Contrainte sphérique
   - Programmation co-positive

Amélioration des relaxations Quadratiques Convexes

Programme Quadratique en variables 0-1 soumis à des contraintes linéaires

$$(\mathrm{QL}) \begin{cases} \min & x^T Q x + c^T x \\ \text{s.c.} & Ax = b \\ & x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

Q est quelconque donc problème non convexe même en relâchant les contraintes 0-1

Idée de départ: "Capter" la qualité des bornes semidéfinies dans une relaxation quadratique convexe (très rapide à résoudre)

Principe de l'approche:

1. Ajouter un terme quadratique à la fonction pour la convexifier puis relaxation continue ($x \in [0,1]^n$)
2. On peut obtenir le "meilleur" terme possible en résolvant un programme semidéfini

Convexification d'un programme quadratique (1)

Première idée : ajouter $K\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - x_i\right)$ à la fonction $x^TQx + c^Tx$ avec K "assez grand" : fonction nulle pour x admissible (donc vérifiant $x \in \{0,1\}^n$)

- Fonction convexe : $Q + KI_n \succcurlyeq 0$
- On prend $K \geqslant -\min_j \lambda_j(Q)$
- On obtient une relaxation quadratique convexe en relâchant $x \in \{0,1\}^n$ en $x \in [0,1]^n$
- Amélioration possible : ajouter $\sum_{i=1}^{n} K_i \left(x_i^2 - x_i\right)$
- En fait, on peut considérer une approche encore plus générale en utilisant également les contraintes $Ax = b$!

Convexification d'un programme quadratique (2)

Amélioration de l'approche :

$\Rightarrow$ Ajouter une combinaison linéaire des fonctions $h_i(x) = x_i^2 - x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) et $g_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k x_i - b_j x_i$ ($j = 1, \ldots, p$ et $i = 1, \ldots, n$) à la fonction $x^T Q x + c^T x$: fonction nulle pour x admissible (vérifiant $x \in \{0,1\}^n$ et $Ax = b$)

$\Rightarrow$ On reconnaît les contraintes "produit" de l'approche linéaire d'Adams-Sharali et qui jouent également un rôle important dans la formulation semidéfinie de la relaxation Lagrangienne partielle de (QL) !

Trouver la meilleure combinaison linéaire ?

$$\sup_{\alpha,\beta} \inf_{x \in [0,1]^n \cap \{x : Ax = b\}} \quad \begin{array}{l} x^T Q x + c^T x + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(x_i^2 - x_i\right) \\ + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \beta_{ij} \left(\sum_{k=1}^n A_{jk} x_k x_i - b_j x_i\right) \end{array}$$

Le dual d'une formulation équivalente de ce problème peut s'interpréter comme un programme semidéfini !

Convexification d'un programme quadratique (3)

$$\sup_{\alpha,\beta} \inf_{x \in [0,1]^n \cap \{x : Ax = b\}} \quad x^T Q x + c^T x + \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(x_i^2 - x_i\right) + \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \beta_{ij} \left(\sum_{k=1}^n A_{jk} x_k x_i - b_j x_i\right)$$

On remplace $x \in [0,1]^n$ par les contraintes convexes $x_i^2 - x_i \leqslant 0$

$$(SDP_P) \left\{ \begin{array}{lll} \min & Q \bullet X + c^T x & \\ \text{s.c.} & Ax = b & \\ & \sum_{k=1}^n A_{jk} X_{ki} - b_j x_i = 0 & i \in \{1, \ldots, n\}\ j \in \{1, \ldots, p\} \\ & X_{ii} = x_i & (i \in \{1, \ldots, n\}) \\ & \begin{bmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 & \end{array} \right.$$

Convexification d'un programme quadratique (4)

- Conséquence : Le programme quadratique convexe obtenu a la même valeur que le programme semidéfini (SDP_P)
- Intérêt : Utiliser ce programme quadratique convexe dans une méthode de séparation/évaluation (Branch&Bound) à la place de la PSD !
- Résolution d'un seul PSD : on a "capté" (à la racine de l'arbre de recherche) la qualité de l'approche semidéfinie dans une approche quadratique convexe.

La contrainte sphérique

Programme Quadratique en variables bivalentes :

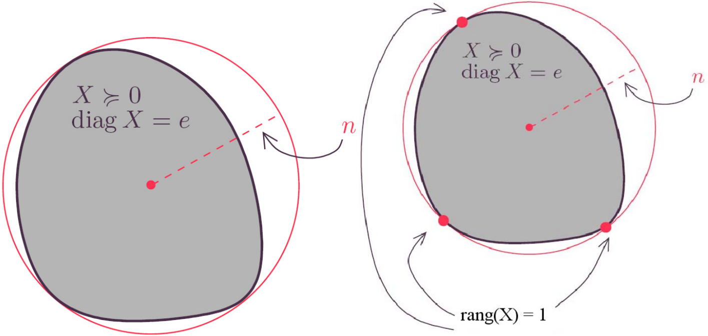
$$(Q) \quad \begin{cases} \max & Q \bullet X \\ \text{s.c.} & Q_i \bullet X \geqslant 0 \qquad i \in I = \{1, \ldots, m\} \\ & x_i \in \{-1, 1\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ & X = xx^T \end{cases}$$

X est de rang 1 et appartient à
$\mathcal{C} = \{X \in S_n \,:\, X \succcurlyeq 0, X_{jj} = 1 \forall j \in \{1, \ldots, n\}\}$

La contrainte sphérique

Théorème

$X \in \mathcal{C}$ *est de rang* 1 *est équivalent à* $|X|^2 = X \bullet X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2 = n^2$



- X appartient donc à la sphère de centre 0 et de rayon n (au sens de la norme associée à $\bullet$)

Dualiser la Contrainte Sphérique

- Idée : remplacer $X = xx^T$ par $\mid X \mid^2 = n^2$ dans (Q) puis dualiser cette dernière contrainte
- α : le multiplicateur de Lagrange associé
- Pour $\alpha = 0$, on retrouve la relaxation semidéfinie de base
- Pour $\alpha \neq 0$ Le Lagrangien vaut: $L(X, \alpha) = Q \bullet X + \frac{\alpha}{2}\left(n^2 - X \bullet X\right)$
$= \frac{\alpha}{2} n^2 + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{Q \bullet Q}{\alpha^2} - \left(X - \frac{Q}{\alpha}\right) \bullet \left(X - \frac{Q}{\alpha}\right)\right)$
$= \frac{\alpha}{2} n^2 + \frac{1}{2\alpha} \mid Q \mid^2 - \frac{\alpha}{2} \mid X - \frac{Q}{\alpha} \mid^2$
- Pour $\alpha < 0$ résoudre le problème dual est NP-difficile (concavité).
- Pour $\alpha > 0$: Soit $\aleph = \{X \,:\, Q_i \bullet X \geqslant 0 \, \forall i\} \cap \{X \succcurlyeq 0,\, X_{jj} = 1 \, \forall j\}$. Le programme dual $\inf_\alpha \sup_{X \in \aleph} L(X, \alpha)$ est équivalent à un Problème semidéfini de moindres carrés : projection de $\frac{Q}{\alpha}$ sur $\aleph$
- La borne obtenue est moins bonne que celle de la PSD standard, mais ces problèmes peuvent être résolus plus efficacement que les PSDs : échange temps de calcul contre qualité de la borne

Contrainte Sphérique : un exemple

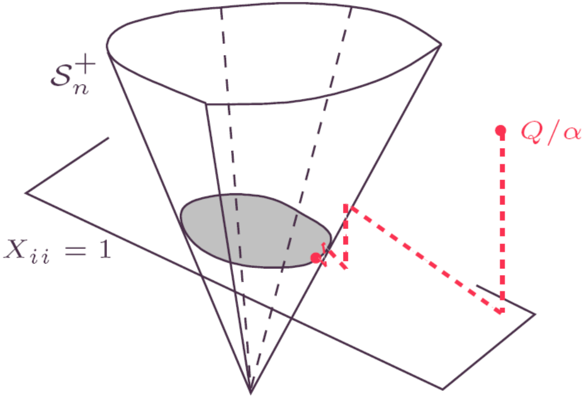
Pour le problème max-cut :

$$(MC)\ \begin{cases} \max & Q \bullet X \\ \text{s.c.} & X_{ii} = 1 \qquad\qquad\qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ & X = xx^T (\text{ou}\, X \bullet X = n^2) \end{cases}$$

On obtient pour $\alpha > 0$:

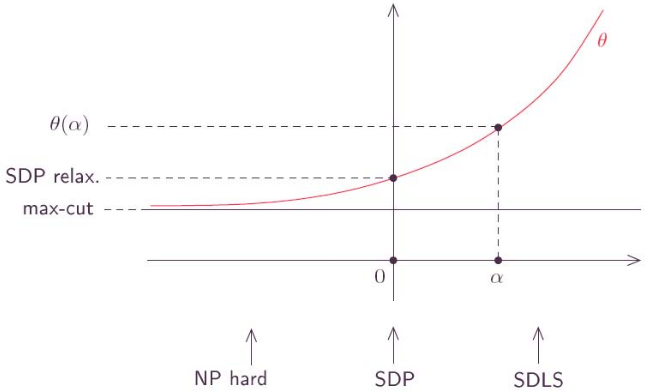
$$(SDPLS(\alpha))\ \begin{cases} \min & |\, X - \frac{Q}{\alpha}\, | \\ \text{s.c.} & X_{ii} = 1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ & X \succcurlyeq 0 \end{cases}$$

Problème semidéfini



Projection de la matrice $\frac{Q}{\alpha}$ sur l'intersection du cône des matrices positives et d'un espace affine

Détériorer la qualité de la borne contre du temps de calcul



Lorsque α tend vers 0 on retrouve la valeur de la relaxation semidéfinie de base de max-cut

Optimisation Co-Positive

Idée : obtenir de meilleures relaxations en considérant un cône plus petit que S_n^+

Cônes C_n et Co-P

- Cône des matrices complètement positives
  $C_n = \{X \in S_n \,|\, X = \sum_{i=1}^{k} y_i y_i^T \text{avec } y_i \geqslant 0\}$
- Mauvaise nouvelle : savoir si une matrice X est dans C_n est co-NP-complet
- De plus C_n n'est pas son propre cône dual !
- Cône des matrices copositives $C_n^* = \{X \in S_n | y^T X y \geqslant 0 \ \forall y \geqslant 0\}$

$$\boxed{(P) \ : \ \min C \bullet xx^T + b^T x \text{ s.c. } Ax = b, \ x \in \{0,1\}^n}$$

est équivalent à

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{minimiser} & C \bullet X + b^T x \\ \text{sous contraintes} & Ax = b \\ & X_{jj} = x_j, \ \ j = 1, \dots, n \\ & A_i A_i^T \bullet X = b_i^2 \quad i = 1, \dots, m \\ & \begin{bmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{bmatrix} \in C_{n+1} \end{array}}$$

Optimisation co-positive pour le QAP

Problème de l'affectation quadratique (QAP):

$$(QAP)\begin{cases} \min & \sum_{i,j,k,l} C_{ijkl}\, x_{ij}x_{kl} & \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1,\dots,n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1,\dots,n \\ & x \in \{0,1\}^{n^2} & \end{cases}$$

- Affectation de n objets à n emplacements : $x_{ij} = 1$ l'objet i est affecté à l'emplacement j
- C_{ijkl} : coût lorsque l'objet i est en j et l'objet k est en l

Exemple : modélisation du QAP par un PCP

$$(QAP_{CP}) \left\{ \begin{array}{lll} \min & \sum_{i,j,k,l} C_{ijkl} Y_{ijkl} & \\ \text{s.c.} & \sum_{i=1}^{n} Y^{ii} = I_n & i = 1, \ldots, n \\ & I_n \bullet Y^{ij} = \delta_{ij} & \forall i, j \\ & \sum_{i,j,k,l} Y_{ijkl} = n^2 & \\ & Y \in C^*_{n^2} & \end{array} \right.$$

Y^{ij} : matrice $n \times n$ telle que $Y^{ij}_{kl} = Y_{ijkl}$

Théorème

Y est admissible pour (QAP_{CP}) si seulement si Y est dans l'enveloppe convexe de $\{xx^T \ : \ x \text{ admissible pour } (QAP)\}$

Relaxation semidéfinie possible de (QAP_{CP}) : remplacer $Y \in C^*_{n^2}$ par $Y \succcurlyeq 0$ et telle que $Y_{ij} \geqslant 0$ pour tout i, j.

Optimisation Co-Positive pour le nombre de stabilité

Nombre de stabilité et C_n

- A_G : matrice d'adjacence d'un graphe G.
- $\alpha(G) = \max\{ee^T \bullet X \; s.c. \; (A_G + I) \bullet X = 1, \; X \in C_n\}$
- Relaxation "naturelle" du problème précédent : remplacer le cône C_n par $S_n^+ \cap N_n$, où N_n est l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ à entrées positives
- Soit le cône $K_n^{(r)}$ des matrices M telles que $P_M^{(r)}(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^r \left(\sum_{i,j} M_{ij} x_i^2 x_j^2\right)$ peut être écrit comme la somme de carrés de polynômes.
- Pour $r = 0$ on retrouve la relaxation "naturelle". $K_n^{(1)}$ est caractérisé.
- Hiérarchie : l'intérieur de C_n est la réunion des cônes $K_n^{(r)}$
- On peut optimiser sur les cônes $K_n^{(r)}$: trouver une décomposition en somme de carrés d'un polynôme de degré $2d$ peut être formulé comme la résolution d'un SDP contenant $O(n^{2d})$ variables
- Conjecture : on obtient $\alpha(G)$ pour $r \geqslant \alpha(G) - 1$