Intervalles étiquetés dans le treillis de Tamari

Guillaume Chapuy, LIAFA (Paris)

avec

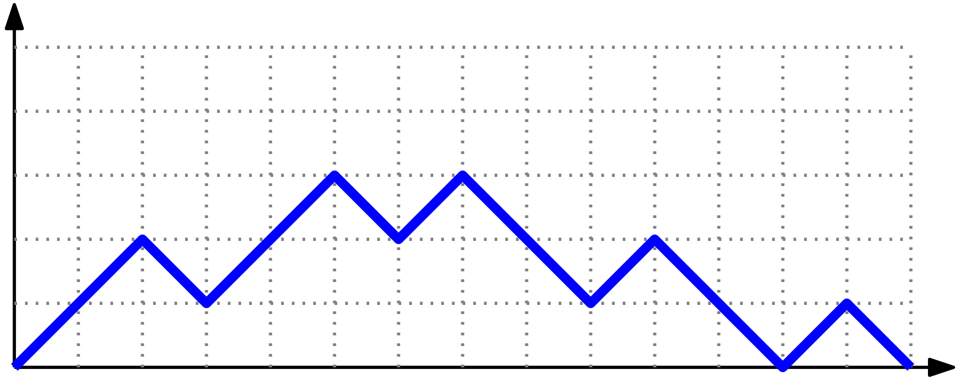
Mireille Bousquet-Mélou, LaBRI (Bordeaux)

Louis-François Préville-Ratelle, LACIM (Montréal)

Journées Aléa 2012

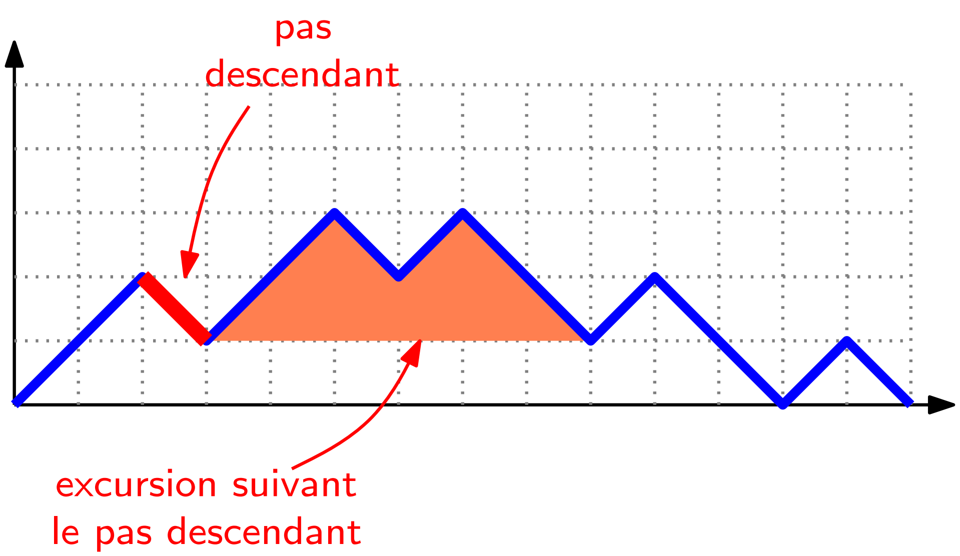
Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck : pas ± 1, va de 0 à 0, reste ≥ 0, longueur : $2n$.

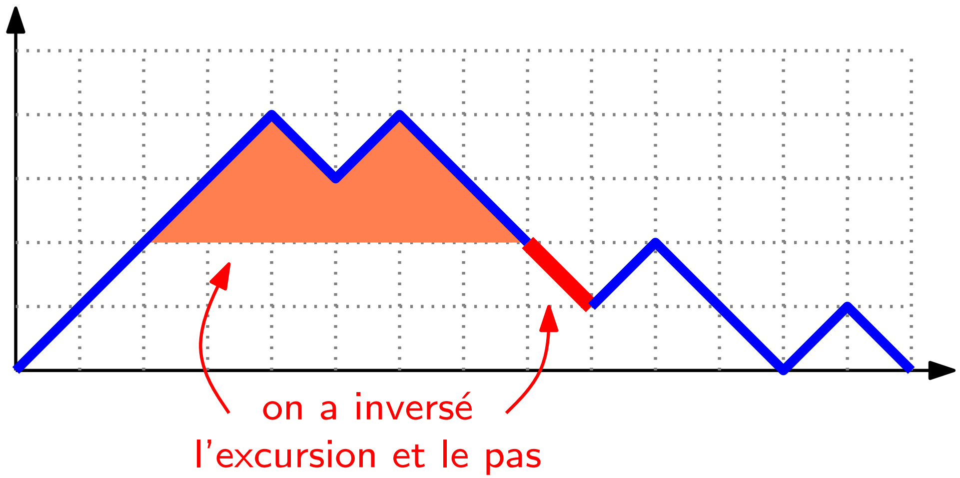


Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck : pas ± 1, va de 0 à 0, reste ≥ 0, longueur : $2n$.
- Relation d'ordre de Tamari :

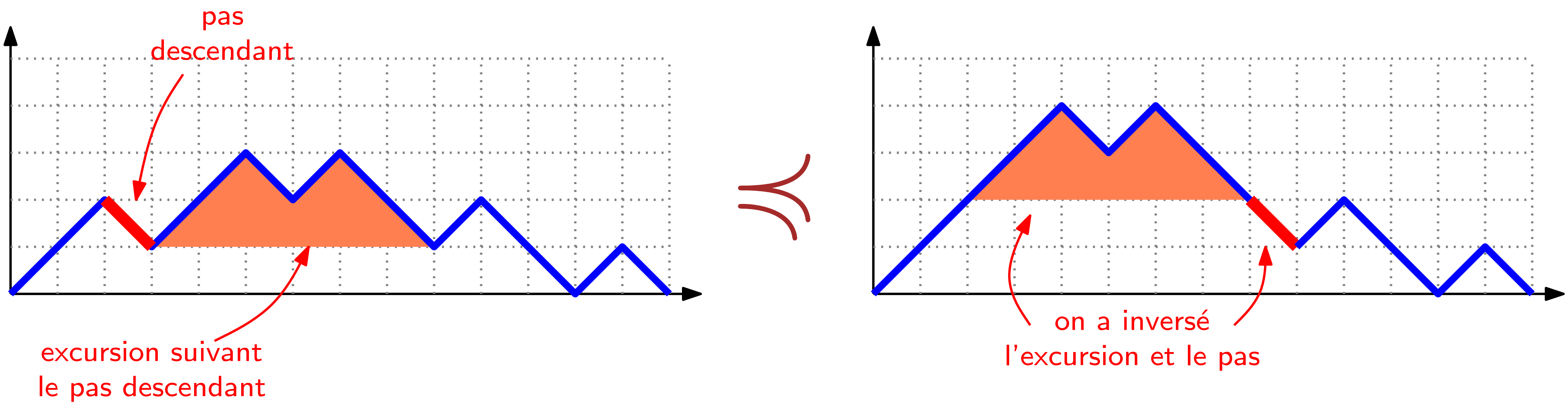


$\preccurlyeq$

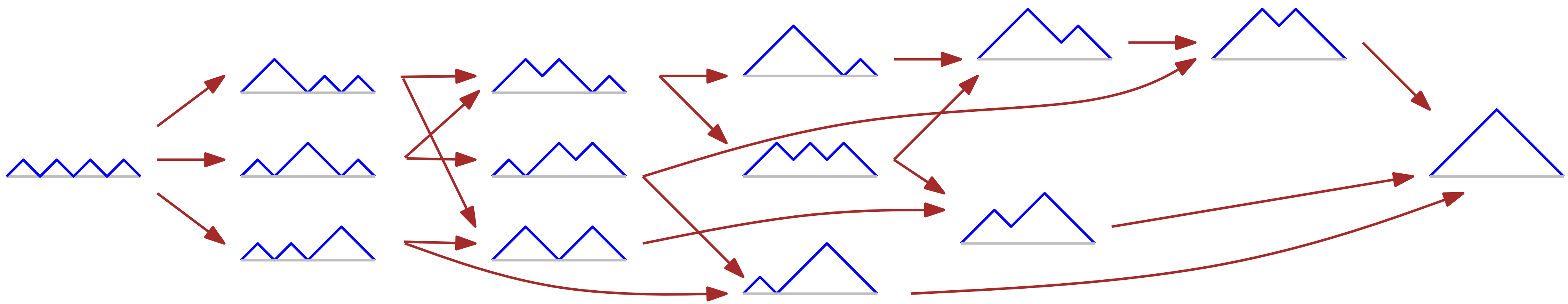


Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck : pas ± 1, va de 0 à 0, reste ≥ 0, longueur : $2n$.
- Relation d'ordre de Tamari :

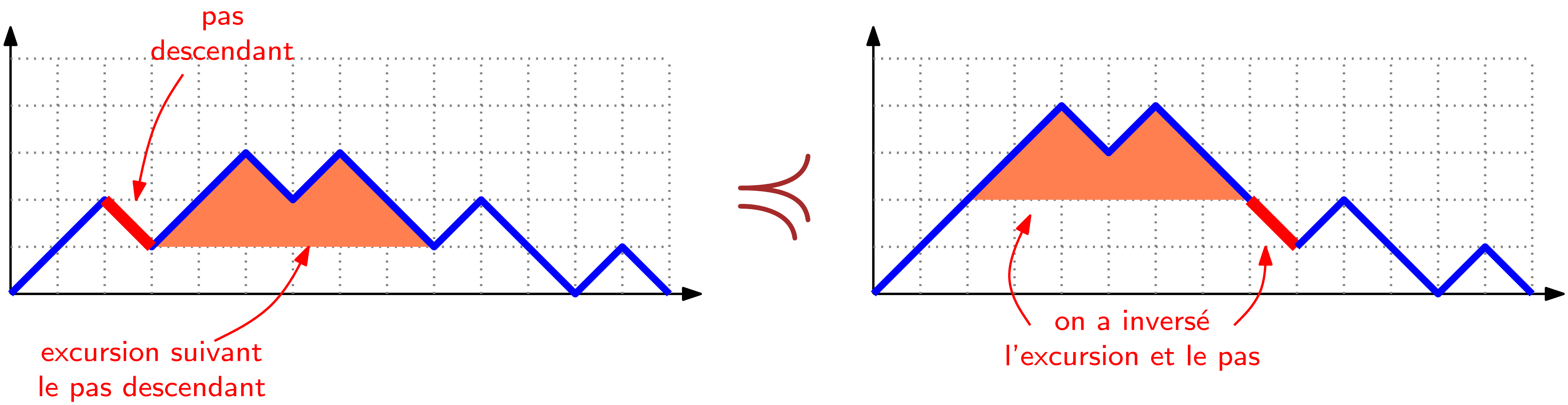


- C'est le fameux ordre de Tamari

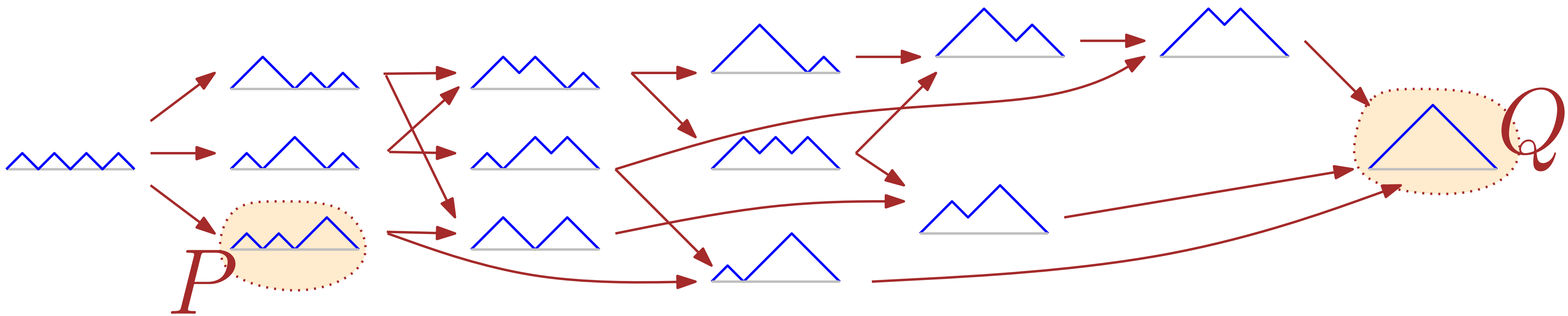


Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck : pas ± 1, va de 0 à 0, reste ≥ 0, longueur : $2n$.
- Relation d'ordre de Tamari :

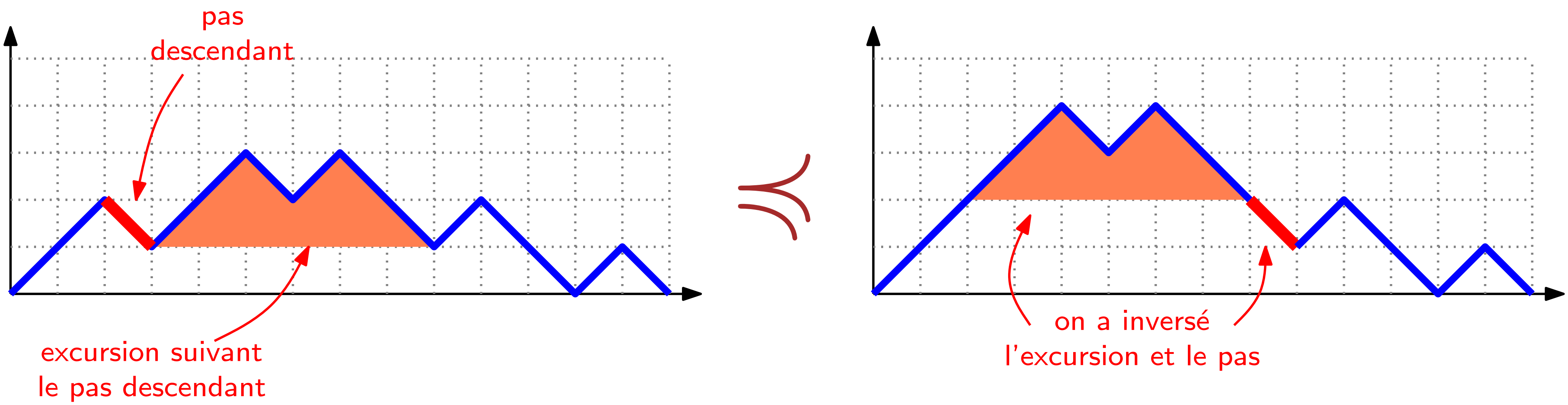


- C'est le fameux ordre de Tamari

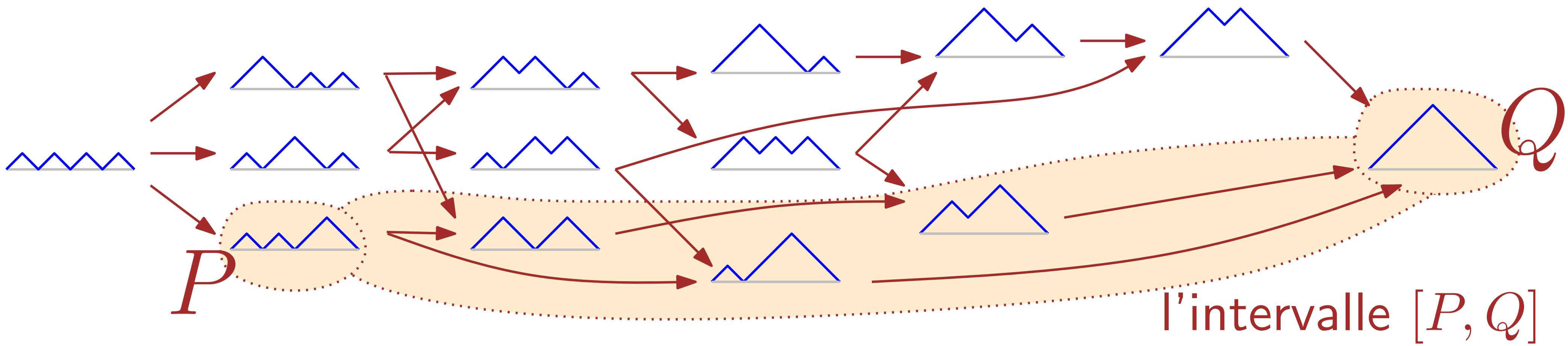


Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck : pas ± 1, va de 0 à 0, reste ≥ 0, longueur : $2n$.
- Relation d'ordre de Tamari :

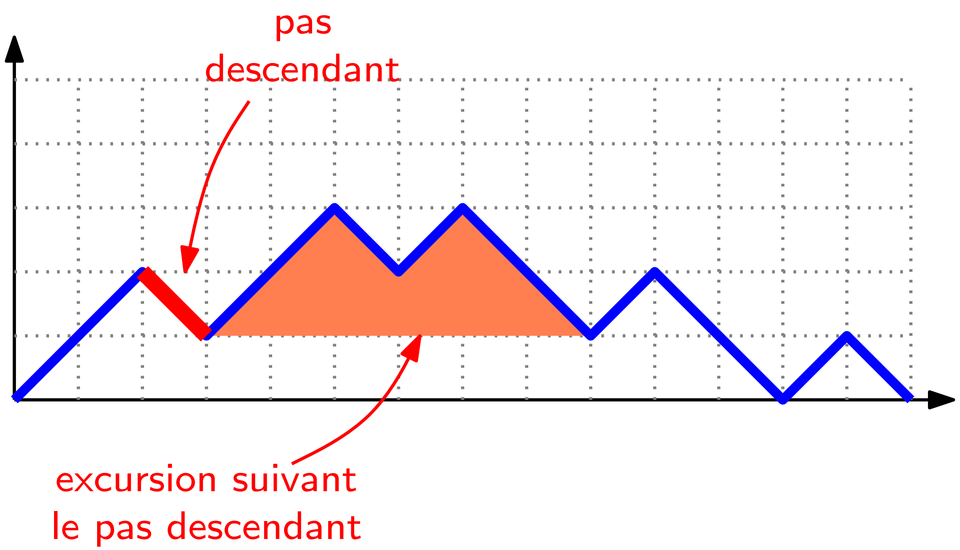


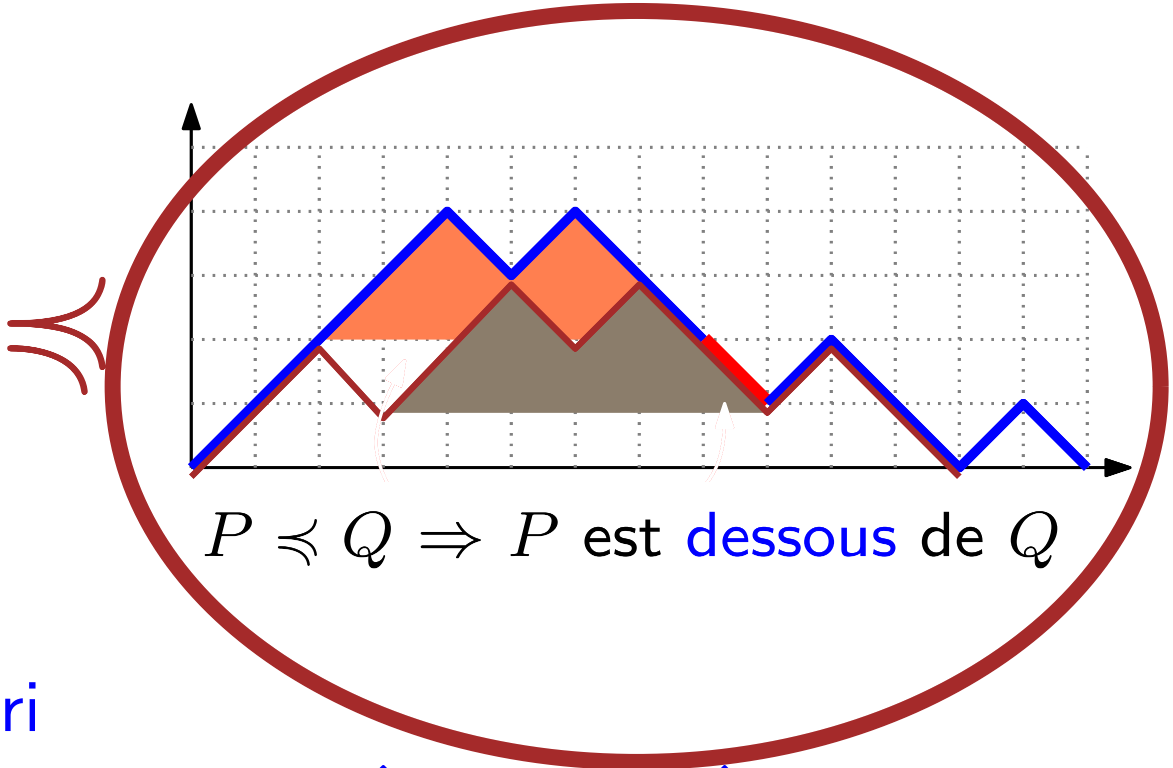
- C'est le fameux ordre de Tamari



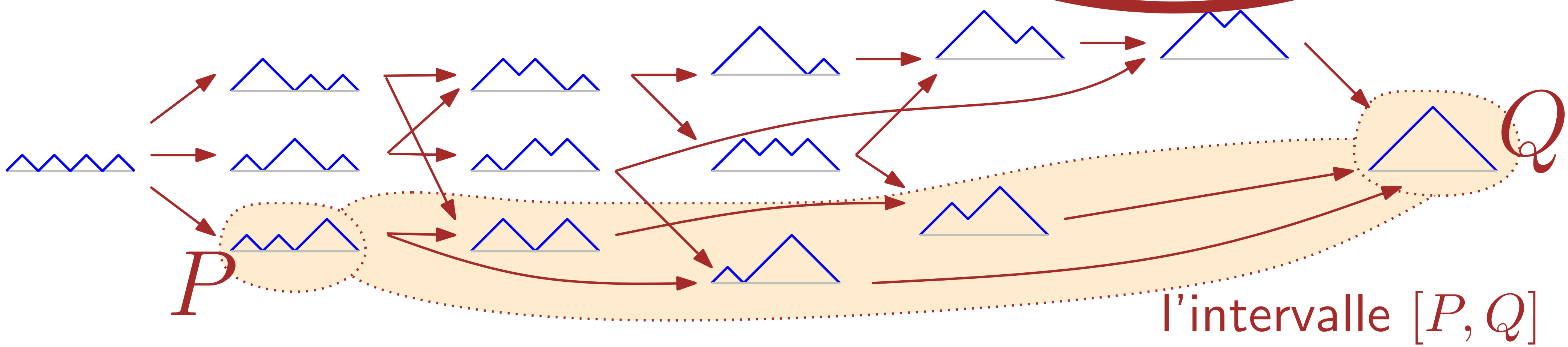
Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck : pas ± 1, va de 0 à 0, reste ≥ 0, longueur : $2n$.
- Relation d'ordre de Tamari :





- C'est le fameux ordre de Tamari



Énumération d'intervalles

- [Chapoton 06] Le nombre de paires $[P, Q]$ telles que $P \preccurlyeq Q$ est :

$$I_n = \frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}.$$

Énumération d'intervalles

• [Chapoton 06] Le nombre de paires $[P, Q]$ telles que $P \preccurlyeq Q$ est :

$$I_n = \frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}.$$

• ... c'est joli. C'est aussi le nombre de triangulations planaires 3-connexes à $m+2$ sommets [Tutte 62, Bernardi-Bonichon 09]

• Même sans aller jusque là, si on connaît, ça ressemble à un nombre de cartes planaires (exposant asymtotique $n^{-5/2}$).

• généralisation récente aux m-Dyck par [MBM-Éric Fusy-LFPR 11]

Énumération d'intervalles

- [Chapoton 06] Le nombre de paires $[P, Q]$ telles que $P \preccurlyeq Q$ est :

$$I_n = \frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}.$$

- ... c'est joli. C'est aussi le nombre de triangulations planaires 3-connexes à $n+2$ sommets [Tutte 62, Bernardi-Bonichon 09]

- Même sans aller jusque là, si on connaît, ça ressemble à un nombre de cartes planaires (exposant asymtotique $n^{-5/2}$).

- généralisation récente aux m-Dyck par [MBM-Éric Fusy-LFPR 11]

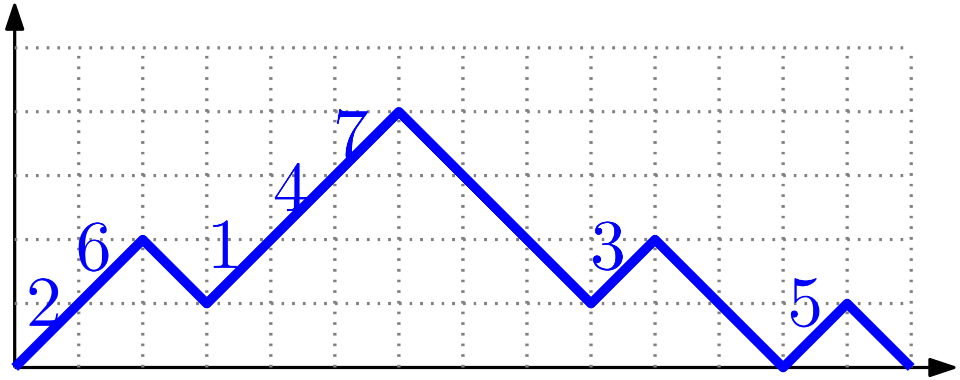
Très bientôt...

- je vais expliquer d'où ça vient (équation catalytique non linéaire)

- mais d'abord je vais parler un peu de nos résultats

Énumération d'intervalles étiquetés (I)

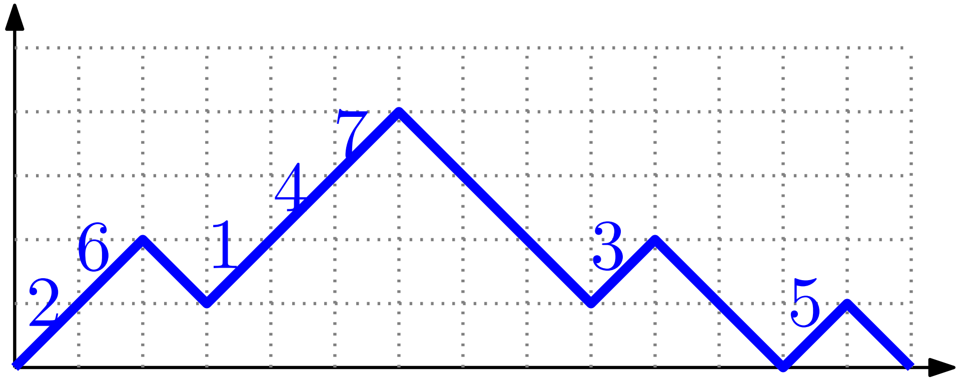
- Un chemin de Dyck étiqueté :



$=$ pas montants étiquetés de 1 à n de manière croissante sur chaque montée

Énumération d'intervalles étiquetés (I)

- Un chemin de Dyck étiqueté :



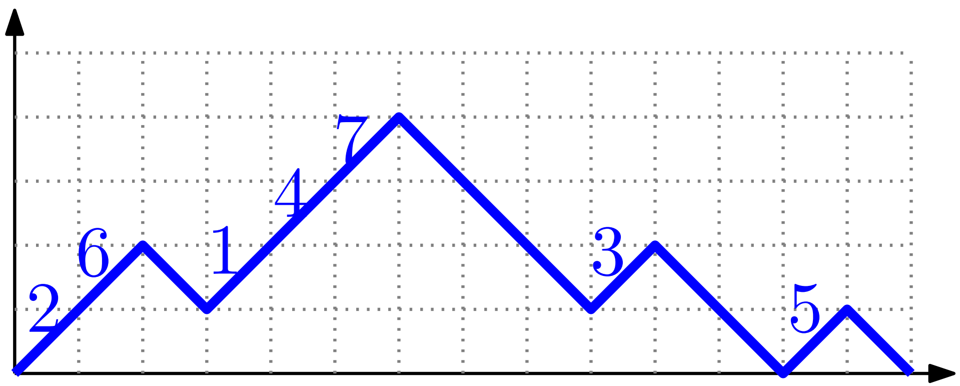
$=$ pas montants étiquetés de 1 à n de manière croissante sur chaque montée

- Nombre de chemins de Dyck étiquetés $= (n+1)^{n-1}$

NOTE : Un Dyck donné a $\dfrac{n!}{\prod \text{montées!}}$ étiquetages différents

Énumération d'intervalles étiquetés (I)

- Un chemin de Dyck étiqueté :

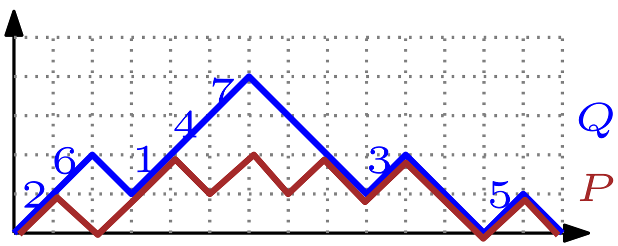


$=$ pas montants étiquetés de 1 à n de manière croissante sur chaque montée

- Nombre de chemins de Dyck étiquetés $= (n+1)^{n-1}$

NOTE : Un Dyck donné a $\dfrac{n!}{\prod \text{montées!}}$ étiquetages différents

- Un intervalle de Tamari étiqueté est une paire $[P, Q]$ où
  - P est un chemin de Dyck
  - Q est un chemin de Dyck étiqueté
  - $P \preccurlyeq Q$ au sens de Tamari



Énumération d'intervalles étiquetés (II)

• Soit L_n le nombre d'intervalles de Tamari étiquetés,
autrement dit le nombre de paires de chemins de Dyck $[P, Q]$ telles que $P \preccurlyeq Q$ comptées autant de fois que Q a d'étiquetages.

• Théorème [MBM+GC+LFPR 11 ; conj. Bergeron 10]

$$L_n = 2^n (n+1)^{n-2}$$

Énumération d'intervalles étiquetés (II)

• Soit L_n le nombre d'intervalles de Tamari étiquetés, autrement dit le nombre de paires de chemins de Dyck $[P, Q]$ telles que $P \preccurlyeq Q$ comptées autant de fois que Q a d'étiquetages.

• Théorème [MBM+GC+LFPR 11 ; conj. Bergeron 10]

$$L_n = 2^n (n+1)^{n-2}$$

Énumération d'intervalles étiquetés (II)

• Soit L_n le nombre d'intervalles de Tamari étiquetés, autrement dit le nombre de paires de chemins de Dyck $[P, Q]$ telles que $P \preccurlyeq Q$ comptées autant de fois que Q a d'étiquetages.

• Théorème [MBM+GC+LFPR 11 ; conj. Bergeron 10]

$$L_n = 2^n (n+1)^{n-2}$$

Pourquoi s'intéresser à un truc pareil ?

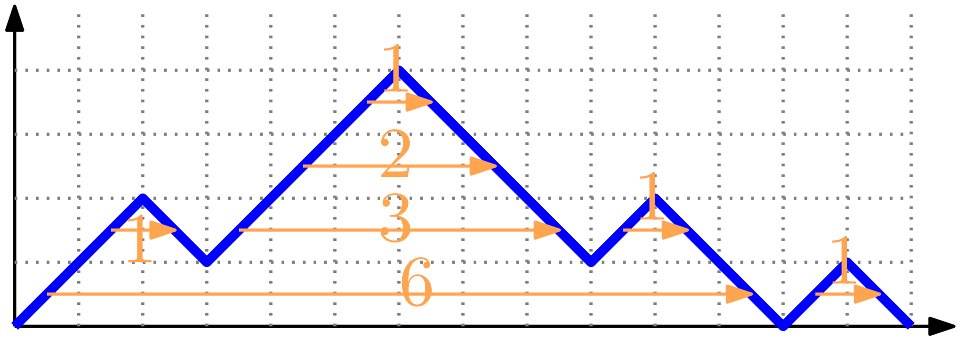
• Les algébristes pensent que ce nombre donne la dimension d'un certain module (les coinvariants en 3 jeux de variables) et plus généralement que les intervalles étiquetés donnent une "description combinatoire" de ce module (mais c'est très très dur semble-t-il).

• Pour nous c'est l'occasion de résoudre une drôle d'équation d'un type qu'on n'avait jamais rencontré auparavant : une équation à la fois catalytique et différentielle.

Décomposition et équation catalytique (I)

[MBM + Éric Fusy + LFPR]

• La fonction de distance d'un chemin de Dyck P est le vecteur $\mathcal{L}(P) = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ où $2l_i =$ horizon du $i$ème pas montant

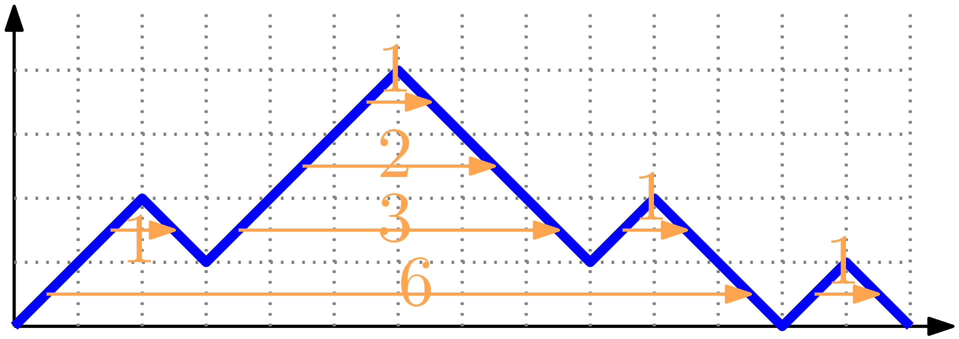


$$\mathcal{L}(P) = (6, 1, 3, 2, 1, 1, 1)$$

Décomposition et équation catalytique (I)

[MBM + Éric Fusy + LFPR]

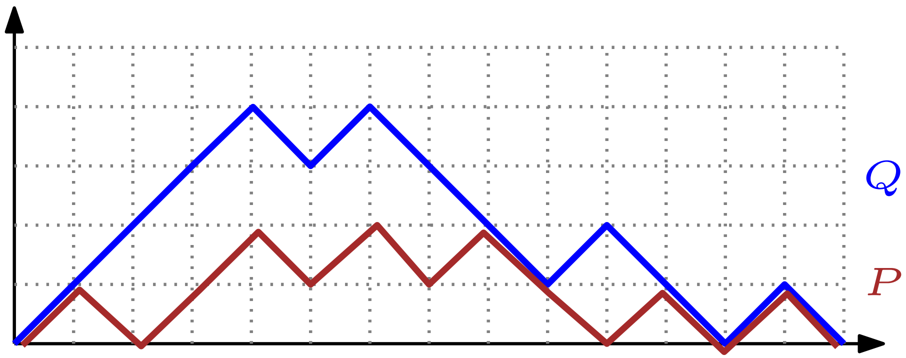
• La fonction de distance d'un chemin de Dyck P est le vecteur $\mathcal{L}(P) = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ où $2l_i =$ horizon du $i$ème pas montant



$$\mathcal{L}(P) = (6, 1, 3, 2, 1, 1, 1)$$

Fait : On a $P \preccurlyeq Q$ ssi $\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(Q)$ coordonnée par coordonnée.

Exemple :



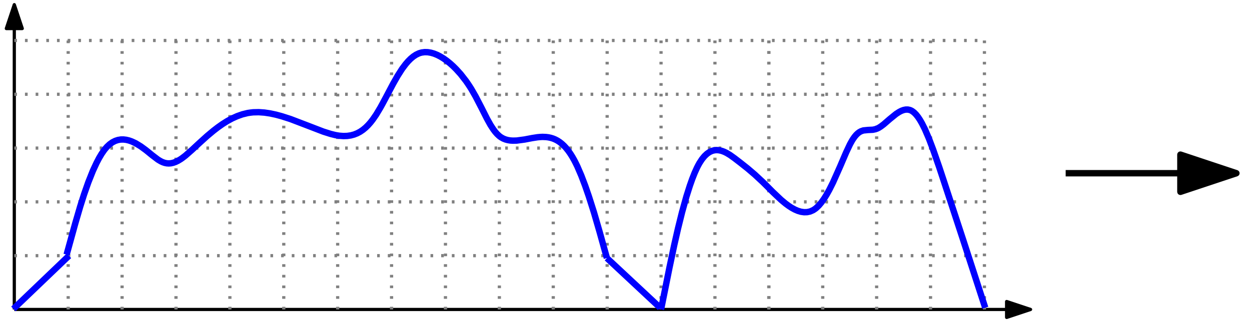
$$\mathcal{L}(Q) = (6, 4, 3, 1, 1, 1, 1)$$
$$\mathcal{L}(P) = (1, 4, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\longrightarrow P \preccurlyeq Q$$

Décomposition et équation catalytique (II) [MBM + Éric Fusy + LFPR]

Rappel : On a $P \preccurlyeq Q$ ssi $\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(Q)$ coordonnée par coordonnée.

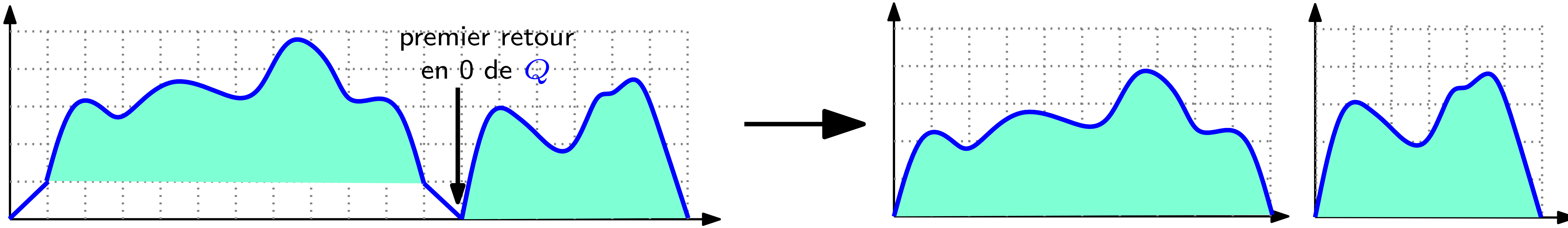
Corollaire : On a une décomposition récursive des intervalles de Tamari.



Décomposition et équation catalytique (II) [MBM + Éric Fusy + LFPR]

Rappel : On a $P \preccurlyeq Q$ ssi $\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(Q)$ coordonnée par coordonnée.

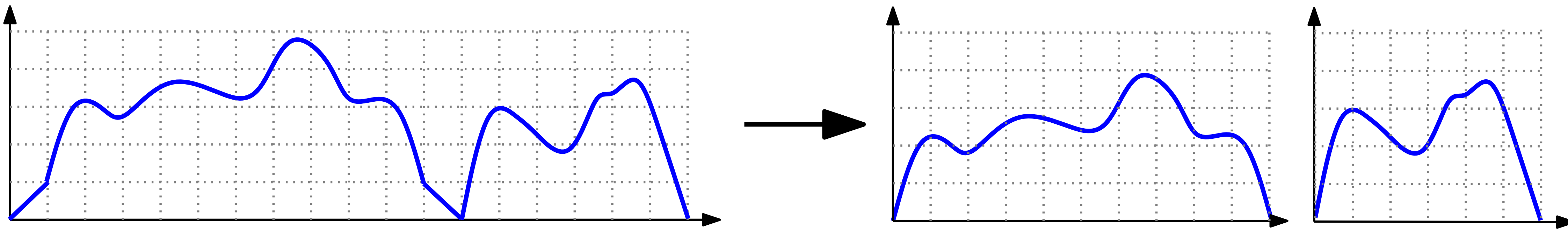
Corollaire : On a une décomposition récursive des intervalles de Tamari.



Décomposition et équation catalytique (II) [MBM + Éric Fusy + LFPR]

Rappel : On a $P \preccurlyeq Q$ ssi $\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(Q)$ coordonnée par coordonnée.

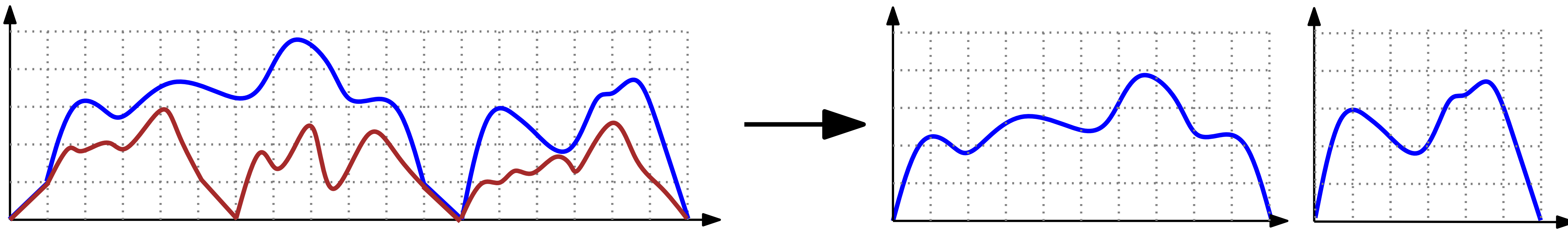
Corollaire : On a une décomposition récursive des intervalles de Tamari.



Décomposition et équation catalytique (II) [MBM + Éric Fusy + LFPR]

Rappel : On a $P \preccurlyeq Q$ ssi $\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(Q)$ coordonnée par coordonnée.

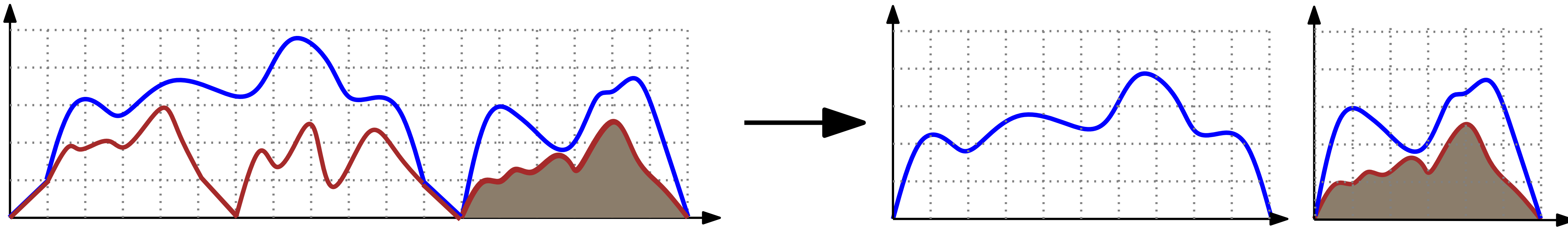
Corollaire : On a une décomposition récursive des intervalles de Tamari.



Décomposition et équation catalytique (II) [MBM + Éric Fusy + LFPR]

Rappel : On a $P \preccurlyeq Q$ ssi $\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(Q)$ coordonnée par coordonnée.

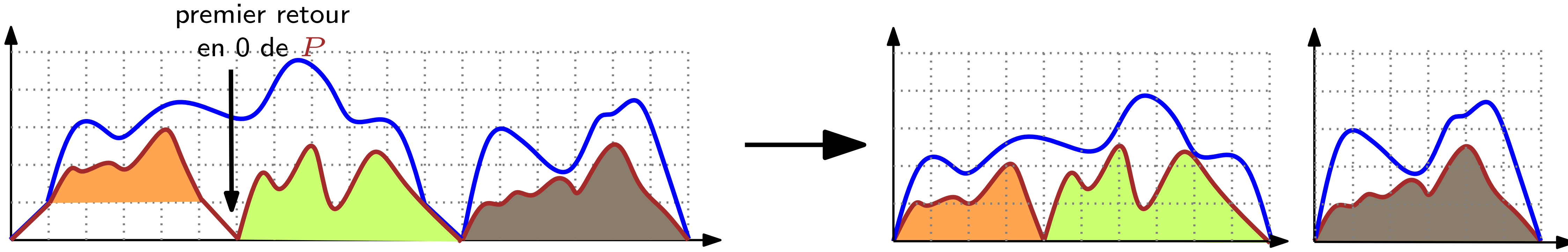
Corollaire : On a une décomposition récursive des intervalles de Tamari.



Décomposition et équation catalytique (II) [MBM + Éric Fusy + LFPR]

Rappel : On a $P \preccurlyeq Q$ ssi $\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(Q)$ coordonnée par coordonnée.

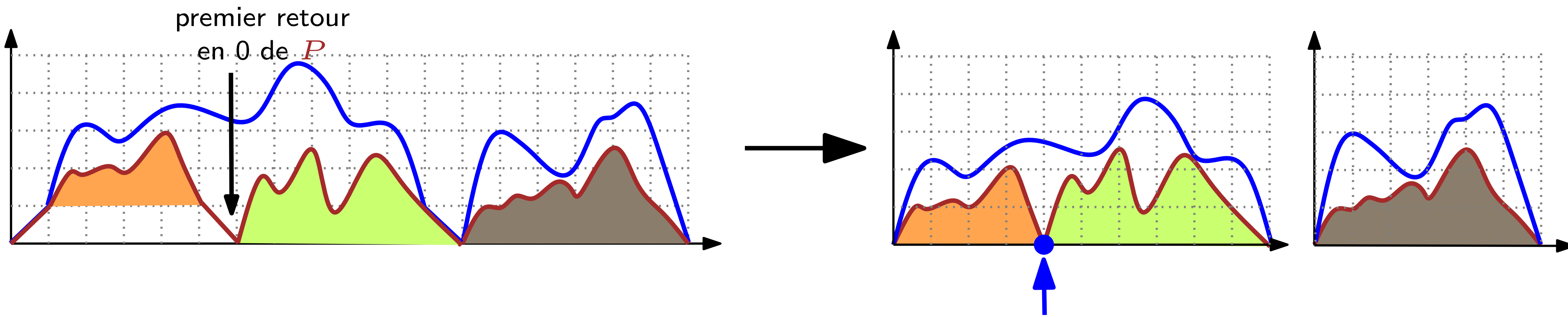
Corollaire : On a une décomposition récursive des intervalles de Tamari.



Décomposition et équation catalytique (II) [MBM + Éric Fusy + LFPR]

Rappel : On a $P \preccurlyeq Q$ ssi $\mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(Q)$ coordonnée par coordonnée.

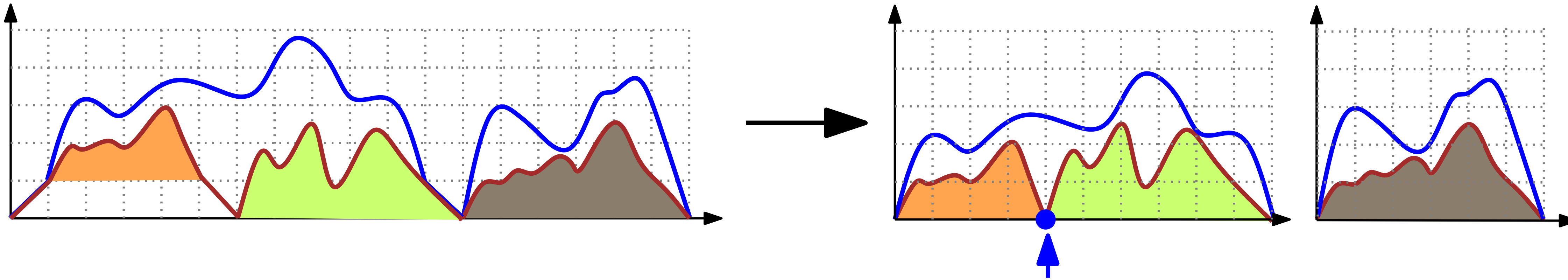
Corollaire : On a une décomposition récursive des intervalles de Tamari.



intervalle de Tamari → intervalle de Tamari avec un zéro du chemin du bas pointé | intervalle de Tamari

... c'est une bijection !

Décomposition et équation catalytique (III) [MBM + Éric Fusy + LFPR]



Série des intervalles : $F(t;x)$

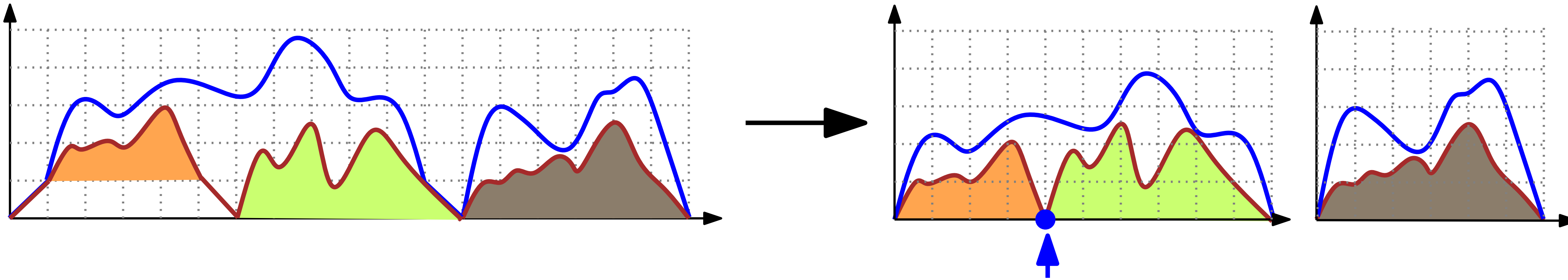
t : taille

x : nombre de zéros du chemin du bas

$$F(t;x) =: \sum_{i\geq 0} F_i(t)x^i$$

Décomposition et équation catalytique (III)

[MBM + Éric Fusy + LFPR]



Série des intervalles :

$$F(t;x) = x + t\sum_{i\geq 1} F_i(t)\left(x + x^2 + \cdots + x^i\right) F(t,x)$$

$$= x + tx\sum_{i\geq 1} F_i(t)\frac{x^i - 1}{x-1} F(t,x)$$

$$= x + tx\frac{F(t,x) - F(t,1)}{x-1} F(t,x)$$

t : taille

x : nombre de zéros du chemin du bas

$$F(t;x) =: \sum_{i\geq 0} F_i(t) x^i$$

Décomposition et équation catalytique (IV)

[MBM + Éric Fusy + LFPR]

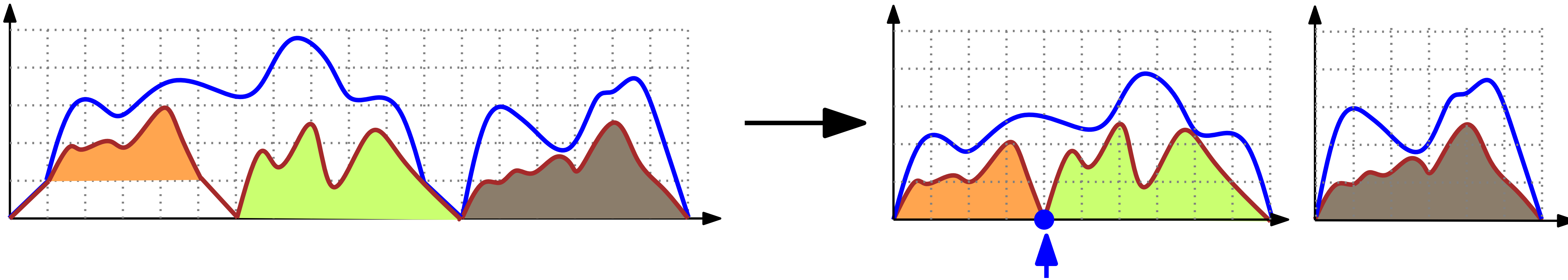
$$\boxed{F(t,x) = x + tx\frac{F(t,x) - F(t,1)}{x-1}F(t,x)}$$

- C'est une équation polynomiale à une variable catalytique.
- Il y a une théorie pour ça qui vient de l'énumération de cartes.
- Exemples de méthodes pour résoudre :

  - préhistoire (Tutte) : deviner $F(t,1)$, résoudre pour trouver $F(t,x)$, et vérifier.

  - XXIème siècle (Bousquet-Mélou/Jehanne) : théorème général, la solution d'une telle équation est toujours une série algébrique, et c'est effectif (i.e. Maple fait tout le boulot).

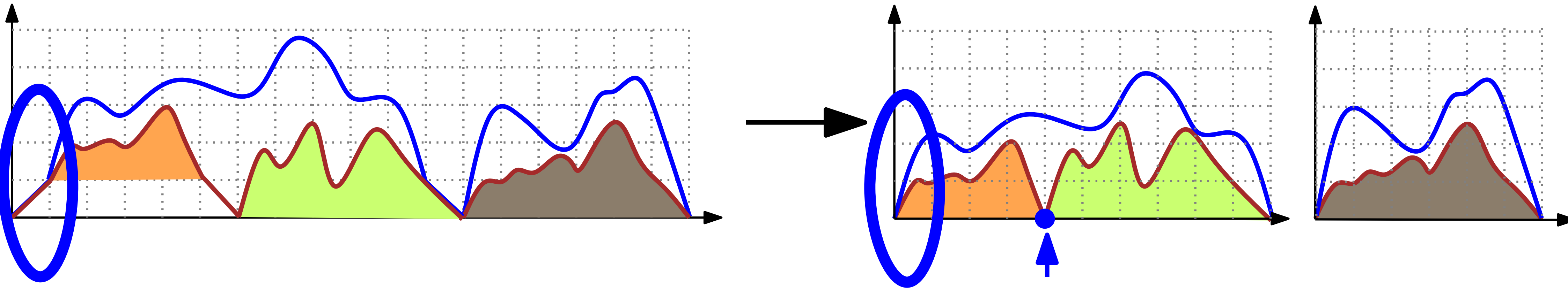
Les intervalles ÉTIQUETÉS (I)



• Rappel : Intervalle étiqueté $=$ intervalle non étiqueté $[P, Q]$ compté avec poids $\frac{n!}{\prod(montees\ de\ Q)!}$

• Dans notre décomposition on ne change pas la taille des montées... sauf la première !

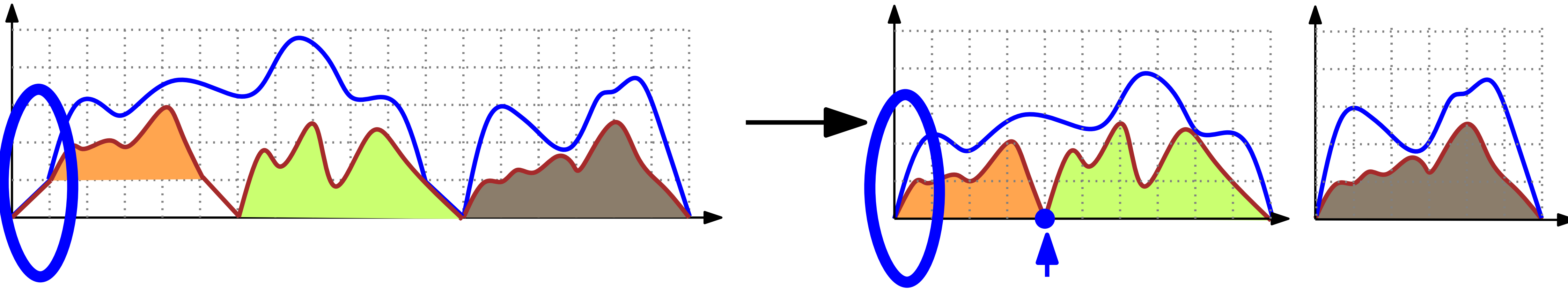
Les intervalles ÉTIQUETÉS (I)



• Rappel : Intervalle étiqueté = intervalle non étiqueté $[P, Q]$ compté avec poids $\frac{n!}{\prod(montees\ de\ Q)!}$

• Dans notre décomposition on ne change pas la taille des montées... sauf la première !

Les intervalles ÉTIQUETÉS (I)



• Rappel : Intervalle étiqueté = intervalle non étiqueté $[P, Q]$ compté avec poids $\frac{n!}{\prod(montees\ de\ Q)!}$

• Dans notre décomposition on ne change pas la taille des montées... sauf la première !

• On rajoute une variable de plus y pour la première montée de Q.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}F(t,x,y) = x + tx\frac{F(t,x;y)-F(t,1;y)}{x-1}F(t,x;1)}$$

car : $\frac{\partial}{\partial y}y^k = ky^{k-1}$

$\rightarrow$ le facteur $k = \frac{k!}{(k-1)!}$ compense la perte du premier pas montant

Les intervalles ÉTIQUETÉS (II)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} F(t,x,y) = x + tx \frac{F(t,x;y) - F(t,1;y)}{x-1} F(t,x;1)}$$

• Inconnu au bataillon ! (deux variables catalytiques, une "standard", une "différentielle").

Les intervalles ÉTIQUETÉS (II)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} F(t,x,y) = x + tx \frac{F(t,x;y) - F(t,1;y)}{x-1} F(t,x;1)}$$

• Inconnu au bataillon ! (deux variables catalytiques, une “standard”, une “différentielle”).

• Retour à la préhistoire :

1. on devine $F(t,x,1)$ (“que” deux variables).
2. on résout l'équa-diff en y
3. on vérifie !

Les intervalles ÉTIQUETÉS (II)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} F(t,x,y) = x + tx \frac{F(t,x;y) - F(t,1;y)}{x-1} F(t,x;1)}$$

• Inconnu au bataillon ! (deux variables catalytiques, une “standard”, une “différentielle”).

• Retour à la préhistoire :

1. on devine $F(t,x,1)$ (“que” deux variables).
2. on résout l'équa-diff en y
3. on vérifie !

Les étapes 1 et 3 ne sont pas faciles !

Le calcul complet (des formules pour celles et ceux qui aiment ça)

On devine la fonction en $y = 1$:

$$F(t, x; 1) = (1+u)e^{2z}\left(1 - \frac{e^{zu} - 1}{u}\right) \text{ où } \begin{cases} t = ze^{-2z} \\ x = (1+u)e^{-zu} \end{cases}$$

Le calcul complet (des formules pour celles et ceux qui aiment ça)

On devine la fonction en $y = 1$:

$$F(t, x; 1) = (1 + u)e^{2z} \left(1 - \frac{e^{zu} - 1}{u}\right) \text{ où } \begin{cases} t = ze^{-2z} \\ x = (1 + u)e^{-zu} \end{cases}$$

L'équation sur $F(t, x, y) \equiv G(z, u, y)$ devient :

$$\frac{\partial}{\partial y} G(z, u, y) = z(1 + u)(1 + u^{-1})\Big(G(z, u, y) - G(z, 0, y)\Big).$$

Le calcul complet (des formules pour celles et ceux qui aiment ça)

On devine la fonction en $y = 1$:

$$F(t, x; 1) = (1+u)e^{2z}\left(1 - \frac{e^{zu} - 1}{u}\right) \text{ où } \begin{cases} t = ze^{-2z} \\ x = (1+u)e^{-zu} \end{cases}$$

L'équation sur $F(t, x, y) \equiv G(z, u, y)$ devient :

$$\frac{\partial}{\partial y} G(z, u, y) = z(1+u)(1+u^{-1})\Big(G(z, u, y) - G(z, 0, y)\Big).$$

On pose $H(z, u, y) = G(z, u, y) - G(z, u^{-1}, y)$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial y} H(z, u, y) = z(1+u)(1+u^{-1})H(z, u, y)$$

Le calcul complet (des formules pour celles et ceux qui aiment ça)

On devine la fonction en $y = 1$:

$$F(t, x; 1) = (1+u)e^{2z}\left(1 - \frac{e^{zu} - 1}{u}\right) \text{ où } \begin{cases} t = ze^{-2z} \\ x = (1+u)e^{-zu} \end{cases}$$

L'équation sur $F(t, x, y) \equiv G(z, u, y)$ devient :

$$\frac{\partial}{\partial y} G(z, u, y) = z(1+u)(1+u^{-1})\Big(G(z, u, y) - G(z, 0, y)\Big).$$

On pose $H(z, u, y) = G(z, u, y) - G(z, u^{-1}, y)$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial y} H(z, u, y) = z(1+u)(1+u^{-1})H(z, u, y)$$

On résout :

$$H(z, u, y) = e^{yz(1+u)(1+u^{-1})}\left(e^{-zu} - u^{-1}e^{-zu^{-1}}\right)$$

puis $G(z, u, y) = (1+u)[u^{\geq 0}]e^{yz(1+u)(1+u^{-1})}\left(e^{-zu} - u^{-1}e^{-zu^{-1}}\right)$

On vérifie que pour $y = 1$ on retrouve la valeur de départ.

Conclusion

- En fait on peut le faire en contrôlant la taille de toutes les montées :

$$\text{fix}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) = (n+1)^{l-2} \prod_{i=1}^{l} \binom{2\lambda_i}{\lambda_i},$$

nombre d'intervalles étiquetés dont la partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sous-jacente est stabilisée par une permutation de type cyclique λ.

- et on peut aussi généraliser aux m-Dyck.
- une théorie pour les équations difféo-catalytiques **?**

d'autres exemples **?**