Etude d'une marche aléatoire sur un arbre muni de résistances aléatoires

A. E. Koudou (Université de Lorraine, Institut Elie Cartan, Nancy)

Journées ALEA
Luminy, Mars 2012

Outline

La loi gaussienne inverse généralisée

Résistance équivalente d'un réseau électrique arborescent de résistances gaussiennes inverses

Quelques questions à propos d'une marche aléatoire sur un arbre muni de résistances gaussiennes inverses

La loi gaussienne inverse généralisée (GIG)

Loi GIG de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $b > 0$:

$$GIG(\mu; a, b)(dx) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\mu} \frac{x^{\mu-1}}{2K_\mu(ab)} e^{-\frac{1}{2}(a^2x^{-1}+b^2x)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx$$

où K_μ est la fonction spéciale de McDonald. On peut avoir $a = 0$ si $\mu > 0$ ou $b = 0$ si $\mu < 0$.

- Si $\mu = -\frac{1}{2}$, alors $GIG(\mu; a, b)$ est la loi gaussienne inverse classique :

$$IG(a, b)(dx) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{ab} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(a^2x^{-1}+b^2x)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx.$$

- Si $\mu = \frac{1}{2}$, on a la *loi gaussienne inverse réciproque*

$$RIG(a, b)(dx) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} e^{ab} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(a^2x^{-1}+b^2x)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx.$$

$RIG(0, b)$ est une loi gamma.

Quelques remarques :

- $X \sim IG(a, b) \iff X^{-1} \sim RIG(b, a)$
- $IG(a_1, b) * IG(a_2, b) = IG(a_1 + a_2, b)$
- $IG(a_1, b) * RIG(a_2, b) = RIG(a_1 + a_2, b)$
- $IG(a, b)$ et $RIG(a, b)$ sont respectivement la loi du premier et du dernier temps de passage au niveau a d'un mouvement brownien de drift b.
- La loi IG permet de modéliser des données en démographie, finance, hydrologie, pharmacocinétique etc. Voir par exemple Chhikara & Folks (1989), Seshadri (1999).

- Les lois GIG peuvent être considérées sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives, le cas $a = 0$ définissant les matrices de Wishart (Letac & Wesołowski, 2000).
- La formule de Black-Scholes en finance peut être exprimée à l'aide de la fonction de répartition de la loi GIG (Madan, Roynette & Yor, 2008).

La propriété d'indépendance de Matsumoto-Yor

Soit $\mu > 0$, $a > 0$ *et* $b > 0$. *Considérons des variables aléatoires indépendantes* X *et* Y *telles que* $X \sim \mathrm{GIG}(-\mu, a, b)$ *et* $Y \sim \mathrm{GIG}(\mu, 0, b)$.
Alors $U = \frac{1}{X+Y}$ *et* $V = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+Y}$ *sont indépendantes.*

- Preuve par Matsumoto & Yor (2001) dans le cas $a = b$, et par Letac & Wesołowski (*Ann. of Prob.* , 2000) pour $a \neq b$, qui ont par ailleurs prouvé que cette propriété caractérise les lois GIG.
- Interprétation de cette propriété à l'aide du mouvement brownien : Matsumoto & Yor (2003).
- Une version "arbre" de cette propriété existe (Massam & Wesołowski, 2004).

- Si on considère $U = f(X+Y)$ et $V = f(X) - f(X+Y)$, alors, sous des hypothèses de régularité, il y a essentiellement quatre fonctions possibles qui assurent l'existence de X, Y telles que U et V soient indépendantes. On établit ainsi d'autres propriétés d'indépendance, concernant notamment la loi de Kummer de densité proportionnelle à :

$$x^{a-1}(1+x)^{-a-b}e^{-cx}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)dx.$$

Voir K. & Vallois (2011, 2012).
Extension au cas des matrices aléatoires suivant les lois de Kummer et Wishart (K. 2011).

Loi de la résistance équivalente d'un réseau électrique particulier

Soit un réseau électrique consistant en un arbre fini dont chaque arête e est munie d'une résistance aléatoire R_e indépendamment des autres arêtes. On suppose que

- si e est une arête terminale, alors $R_e \sim \mathrm{RIG}(a_e, b_e)$;
- si e n'est pas une arête terminale, alors $R_e \sim \mathrm{IG}(a_e, b_e)$;
- la somme des paramètres a_e pour toutes les arêtes d'un chemin reliant la racine à une feuille de l'arbre ne dépend pas du chemin; soit a cette somme;
- pour chaque arête e, $b_e = \sum_{e' \in F_e} b_{e'}$, où F_e est l'ensemble des arêtes terminales reliées à e.

Barndorff-Nielsen & K. (1998) : La résistance équivalente du réseau suit la loi $RIG(a, b)$, où b est la somme des b_e pour toutes les arêtes terminales de l'arbre.
De plus, conditionnellement à la résistance équivalente R, les variables

$$U = \left(\sum_{e \in E} \frac{a_e^2}{R_e} \right) - \frac{a^2}{R}, \quad V = \left(\sum_{e \in E} b_e^2 R_e \right) - b^2 R$$

sont indépendantes, et cela implique la propriété de Matsumoto-Yor dans le cas $\mu = -1/2$ (K., 2006).

Notre problème

- **Doyle & Snell :** Sur tout réseau électrique, on peut considérer une marche aléatoire qui passe du sommet x à un sommet voisin y avec probabilité C_{xy}/C_x, où C_{xy} est la conductance de l'arête xy et $C_x = \sum_{y \sim x} C_{xy}$. Il existe une interprétation du courant à l'aide de cette marche.
- Notre problème : Considérons cette marche sur notre réseau électrique à résistances aléatoires de lois gaussiennes inverses.

Quelles sont les propriétés de cette marche aléatoire en milieu aléatoire ?
Considérons en particulier la probabilité, appelée *escape probability* dans le livre de Doyle & Snell, pour une particule partant de la racine x, d'atteindre le bord de l'arbre avant de retourner à la racine. D'après Doyle & Snell, cette probabilité, pour des résistances déterministes, est

$$p_{esc} = \frac{C_{equiv}}{C_x}.$$

Dans le cas de résistances aléatoires, cette probabilité est aléatoire et les propriétés de la marche sont liées à la loi de p_{esc}.

Résistances en série

Pour une suite de résistances $R_1, R_2, \ldots, R_n$ en série, les conditions énoncées plus haut font que $R_i \sim IG(a_i, b)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ et $R_n \sim RIG(a_n, b)$.
On a, dans ce cas,

$$p_{esc} = \frac{C_{equiv}}{C_x} = \frac{R_1}{R_{equiv}}.$$

Cette variable aléatoire a pour densité $(0 < u < 1)$

$$f_p(u) = \frac{a_1 b}{\pi} \exp(b \sum_{i=1}^{n} a_i) u^{-3/2} (1-u)^{-1/2} \times$$

$$\times K_0 \left(b \sqrt{\frac{a_1^2}{u} + \frac{(a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2}{1-u}} \right).$$

Deux résistances en série et une en parallèle

Si R_1 et R_3 sont en série et R_2 en parallèle avec la série R_1, R_3, alors

$$\begin{aligned} p_{esc} = \frac{C_{equiv}}{C_x} &= \frac{1}{C_x R_{equiv}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \left(\frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned}$$

La densité de probabilité de p_{esc} s'écrit alors $(0 < u < 1)$

$$f_p(u) = \frac{a_1 b_2 b_3}{(2\pi)^{3/2}} \exp(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) u^{-3/2} (1-u)^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{(0,\infty)^2} v w^{-3/2} (v+w)^{1/2} \exp -\frac{1}{2} \left(a_1^2 \frac{v+w}{u} + (a_3^2 + 2a_1 a_3) w \right) \times$$

$$\times \exp -\frac{1}{2} \left(a_3^2 v + a_3^2 \frac{u v^2}{(v+w)(1-u)} + \frac{b_1^2}{v} + \frac{b_2^2}{w} \right) dv\, dw.$$

Travail à faire

- Utiliser les propriétés de K_0 pour déterminer la probabilité de sortie (non conditionnée au milieu).
- Quel est, en fonction des paramètres, le comportement asymptotique de cette probabilité lorsque la taille de l'arbre tend vers l'infini ?
- Conditionnellement à la sortie, quel est le nombre moyen d'arêtes parcourues avant la sortie ?
- Si on définit un tel modèle pour un arbre infini, quelles sont les conditions sur les paramètres pour que la marche soit récurrente ? transiente ?

References

- Barndorff-Nielsen, O. E. and Koudou, A. E. (1998). Trees with random conductivities and the (reciprocal) inverse Gaussian distribution. *Adv. Appl. Probab.* **30**, 409-424.
- Chhikara, R. S., and Folks, J. L. (1989). *The Inverse Gaussian Distribution*. Marcel Dekker, New York.
- Doyle, P. G., and Snell, J. L. (1984). *Random Walks and Electrical Networks*. The Carus Mathematical Monographs **22**, USA.
- Koudou, A. E. (2006). A link between the Matsumoto-Yor property and an independence property on trees. *Stat. and Probab. Letters* **76**, 1097-1101.
- Koudou (2011). A Matsumoto-Yor property for Kummer and Wishart random matrices. Soumis
- Koudou & Vallois (2011). Which distributions have the Matsumoto-Yor property ? *Elect. Comm. in Prob.* **16**, 556–566.

Letac, G. and Wesołowski, J. (2000). An independence property for the product of GIG and gamma laws. *Annals of Probability* **28**, 1371-1383.

Madan, D., Roynette, B. and Yor, M. (2008). Unifying Black-Scholes type formulae which involve Brownian last passage times up to a finite horizon. *Asia-Pacific Finan. Markets* **15**, 97-115.

Massam, H. and Wesołowski, J. (2004). The Matsumoto-Yor property on trees. *Bernouilli* **10**(4), 685-700.

Matsumoto, H. and Yor, M. (2001). An analogue of Pitman's $2M - X$ theorem for exponential Wiener functional, Part II: the role of the generalized inverse Gaussian laws. *Nagoya Math. J.* **162**, 65-86.

Matsumoto, H. and Yor, M. (2003). Interpretation via Brownian motion of some independence properties between GIG and gamma variables. *Stat. and Probab. Letters* **61**, 253-259.

Seshadri, V. (1999). *The Inverse Gaussian Distribution: Statistical Theory and Applications*. Springer, New York.