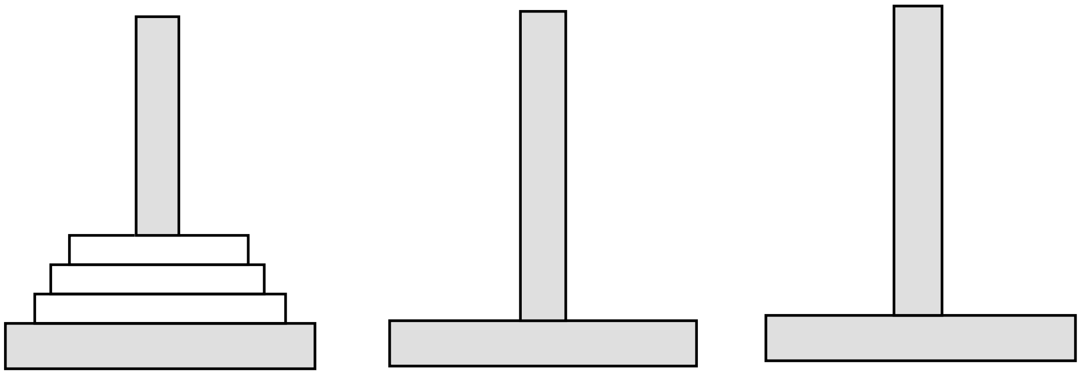
Hanoi

Les tours de Hanoï.
On dispose de trois socles A, B, C tels que figurés ci-dessous :



Socle A Socle B Socle C

Sur le socle A sont empilés n disques (pour l'exemple n=3) de diamètres diminuant de bas en haut. Le problème est de déplacer ces n disques de A vers B - à l'aide éventuellement du socle intermédiaire C - en respectant les règles suivantes :

1- on ne peut déplacer qu'un disque à la fois ;
2- on ne peut déplacer un disque d'un socle vers un autre socle que si le dernier est vide ou si son disque le plus élevé - son sommet - est plus grand que le disque déplacé.

Par exemple, en notant U -> V le déplacement du disque occupant le sommet du socle U sur le sommet du socle V, pour n=2, on a la solution :

A -> C, A -> B, C -> B.

a- Donner une solution pour n=3.
b- Écrire une procédure récursive donnant la marche à suivre pour résoudre le problème avec n, le nombre de disques initial, quelconque.
On appellera la procédure Hanoï(), et les paramètres seront :
k : le nombre de disques ;
X : le socle de départ ;
Y : le socle d'arrivée ;
Z : le socle intermédiaire.
Initialement, on a k=n, X=A, Y=B, Z=C.
c- Simuler l'appel de Hanoï(3, A, B, C).
d- Calculer le nombre de déplacements de disques.

a-.

Pour n=3, il suffit d'abord de déplacer les deux disques supérieurs de A vers C, puis le dernier de A vers B avant de ramener les deux disques sauvegardés en C vers B. Mais la première et la dernière de ces opérations consistent chacune à résoudre le problème pour deux disques : dans le cas de la première, en échangeant les rôles de B et C et pour la seconde, ceux de A et C. Compte tenu de la solution pour n=2 donnée ci-dessus, la première opération s'écrit donc :

A -> B, A -> C, B -> C

la seconde s'écrit :

C -> A, C -> B, A -> B

puis en intercalant le déplacement A -> B on obtient pour n = 3 :

A -> B, A -> C, B -> C, A -> B, C -> A, C -> B, A -> B.

b-

D'une manière générale, pour déplacer n disques de A vers B, on voit qu'il suffit de savoir en déplacer n-1 : on déplace alors les n-1 plus élevés de A vers C (avec B comme socle intermédiaire), il en reste un sur A que l'on déplace en B avant de ramener en B, ceux posés en C (avec A comme socle intermédiaire).

```
Procédure hanoi (k : entier; X : caractère; Y : caractère; Z : caractère)
        debut
        Si k > 0 Alors
                hanoi(k-1, X, Z, Y)
                writeln(X, ' ->', Y)
                hanoi(k-1, Z, Y, X)
        FinSi
        fin
FinProcédure
```

c-

```
{Hanoï(3, 'A', 'B', 'C').}
        {k=3, X='A', Y='B', Z='C'}
        {hanoi(3-1, 'A', 'C', 'B')
                {k=2, X='A', Y='C', Z='B'}
                {hanoi(2-1, 'A', 'B', 'C')
                        {k=1, X='A', Y='B', Z='C'}
                        {hanoi(1-1, 'A', 'C', 'B')}
                                {k=0, X='A', Y='C', Z='B'}
                                {}
                        {affichage A ->B}
                        {hanoi(1-1, 'C', 'B', 'A')}
                                {k=0, X='C', Y='B', Z='A'}
                                {}
                        {}
                {affichage A ->C}
                {hanoi(2-1, 'B', 'C', 'A')
```

```
            {k=1, X=‘B’, Y=‘C’, Z=‘A’}
            {hanoi(1-1, ‘B’, ‘A’, ‘C’)}
                {k=0, X=‘B’, Y=‘A’, Z=‘C’}
                {}
            {affichage B ->C}
            {hanoi(1-1, ‘A’, ‘C’, ‘B’)}
                {k=0, X=‘A’, Y=‘C’, Z=‘B’}
                {}
            {}
        {}
    {affichage A->B}
    {hanoi(3-1, ‘C’, ‘B’, ‘A’)
        {k=2, X=‘C’, Y=‘B’, Z=‘A’}
        {hanoi(2-1, ‘C’, ‘A’, ‘B’)
            {k=1, X=‘C’, Y=‘A’, Z=‘B’}
            {hanoi(1-1, ‘C’, ‘B’, ‘A’)}
                {k=0, X=‘C’, Y=‘A’, Z=‘B’}
                {}
            {affichage C ->A}
            {hanoi(1-1, ‘B’, ‘A’, ‘C’)}
                {k=0, X=‘B’, Y=‘A’, Z=‘C’}
                {}
            {}
        {affichage C ->B}
        {hanoi(2-1, ‘A’, ‘B’, ‘C’)
            {k=1, X=‘A’, Y=‘B’, Z=‘C’}
            {hanoi(1-1, ‘A’, ‘C’, ‘B’)}
                {k=0, X=‘A’, Y=‘C’, Z=‘B’}
                {}
            {affichage A ->B}
            {hanoi(1-1, ‘A’, ‘C’, ‘B’)}
                {k=0, X=‘A’, Y=‘C’, Z=‘B’}
                {}
            {}
        {}
    {}
{}
```

d-

Si on note Xn le nombre de déplacements nécessaires pour n disques, on a l’équation :

$X_n = 2 \times X_{n-1} + 1$, $X_0 = 0$.
C’est une équation de récurrence dont la solution est $X_n = 2^n - 1$.

on peut le retrouver par récurrence en remarquant:

pour n = 0, $X_n = 0$.
pour n = 1, $X_n = 1$.
pour n = 2, $X_n = 3 = 2^2 - 1$.
pour n = 3, $X_n = 7 = 2^3 - 1$.

On a donc montré la solution pour n=0,

en supposant que pour i >0, on ait $X_i = 2^i - 1$ alors

pour i+1 on a $X_{i+1} = 2 \times (2^i - 1) + 1 = 2^{i+1} - 2 + 1 = 2^{i+1} - 1$.

donc pour tout n>0 on a $X_n = 2^n - 1$.

-