

TD 4

Le but de ce TD est de mettre en place une structure de données pour coder les rationnels dans une base b , ainsi qu'une collection d'opérations pour les manipuler. Pour ça, on abordera progressivement le cas des entiers naturels, puis des entiers relatifs et enfin celui des rationnels.

Pour stocker un entier naturel, on utilise la structure suivante :

```
Const N = 100 ;
Const Base = 12 ;
type Tchiffre = 0..Base-1 ;
type Tnaturel = enregistrement
    debut,fin : entier ;
    tab : tableau (1..N) de Tchiffre ;
    fin enregistrement ;
```

1. Préliminaires

Soit n un entier naturel. On rappelle que la représentation de n en base b est l'unique suite finie (a_0, \dots, a_p) d'éléments de $\{0 ; \dots ; b-1\}$ telle que $n = a_0b^0 + a_1b^1 + \dots + a_pb^p$. Avec ces notations, on dit que a_0 est le *chiffre de poids faible*, et que a_p est le *chiffre de poids fort* de la représentation de n en base b .

- a) Ecrire une fonction `Naturel(n : entier) : Tnaturel` qui renvoie le nombre correspondant à n . On conviendra que *debut* marque le chiffre de poids faible et *fin* le chiffre de poids fort. On écrira 2 versions de cette fonction : une itérative, et une récursive.
- b) Ecrire les fonctions `EgalZero(n : Tnaturel) : boolean`, et `EgalUn(n : Tnaturel) : boolean`, `Egal(n1,n2 : Tnaturel) : boolean`, et `Sup(n1,n2 : Tnaturel) : Boolean` (vrai si $n1 > n2$)

2. Opérations élémentaires

- a) L'addition
 - i) Ecrire une fonction `Add (n1,n2 : Tnaturel) : Tnaturel` qui renvoie la somme de $n1$ et $n2$.

- ii) Ecrire une fonction $\text{Dec} (n : \mathbb{Tnaturel}) : \mathbb{Tnaturel}$ qui ôte 1 à n et renvoie le résultat et une fonction $\text{Inc} (n : \mathbb{Tnaturel}) : \mathbb{Tnaturel}$ qui ajoute 1 à n . En déduire une version récursive de Add . Commenter cette version. Est elle plus efficace ? pourquoi ?
- b) La soustraction
- i) Ecrire une fonction $\text{Sub}(n1, n2 : \mathbb{Tnaturel}) : \mathbb{Tnaturel}$ itérative.
 - ii) Déduire de a) ii) une version récursive de cette fonction. Commenter son efficacité.
- c) La multiplication
- i) En écrire une version récursive qui fait intervenir Add . Laquelle de ces 2 fonctions est la plus efficace ? la plus simple à écrire ? Conclure sur l'intérêt de la récursivité.
- d) Ecrire une fonction $\text{Divi} (n1, n2 : \mathbb{Tnaturel}) : \mathbb{Tnaturel}$ qui renvoie le quotient dans la division euclidienne de $n1$ par $n2$. Cette fonction sera récursive. De même, écrire une version récursive de la fonction $\text{Modulo} (n1, n2 : \mathbb{Tnaturel}) : \mathbb{Tnaturel}$ qui renvoie le reste de la division euclidienne de $n1$ par $n2$.

3. factorielle, puissance

- a) Ecrire une version récursive de $\text{fact}(n : \mathbb{Tnaturel}) : \mathbb{Tnaturel}$ qui renvoie $n!$. En écrire une version itérative.
- b) Ecrire une version itérative de puissance $(n, p : \mathbb{Tnaturel}) : \mathbb{Tnaturel}$ qui renvoie n^p . En écrire une version récursive. Comment modifier cette dernière version pour limiter le nombre d'appels récursifs ?
*Indication : remarquer que si $p=2k$, $n^p = n^{2k} = n^k * n^k$, et si $p=2k+1$, $n^p = n^{2k+1} = n^k * n^k * n$.*
- c) Dérouler les 2 versions récursives de puissance avec $n=2$ et $p=8$. Que remarque on ?

4. Les entiers relatifs

On code les entiers relatifs de la façon suivante :

```
type Tsigne = (plus,moins) ;
type Trelatif = enregistrement
    signe : Tsigne ;
    va : Tnaturel ; {pour valeur absolue}
fin enregistrement
```

Ecrire une fonction Relatif(z : entier) : Trelatif, qui renvoie le relatif correspondant à z . Réécrire les fonctions Add, Sub, Mul, Divi, et Modulo Sur Trelatif. **On réutilisera les fonctions précédentes.**

5. Les rationnels

Les rationnels seront codés de la façon suivante :

```
type Trationnel = enregistrement
    a,b : Trelatif ; {pour a/b}
fin enregistrement
```

- a) Ecrire une fonction Rationnel (a,b : entier) : Trationnel, **en utilisant la fonction du 4.**
- b) Ecrire une fonction pgcd (a,b : Trelatif) : Trelatif, en déduire une fonction Simplifier (r : Trationnel) : Trationnel, qui écrit $r=a/b$, avec a et b minimaux.
- c) En utilisant b) et 4., Ecrire les fonctions d'addition, soustraction, multiplication et division sur les rationnels.
- d) On souhaite avoir un début d'écriture décimale d'un rationnel.
 - i)
 - ii) On s'intéresse à la partie flottante (ie $(a \bmod b)/b$). On la note p/q . Montrer que son premier chiffre est $[p*Base] \text{ div } q$.
 - iii) Déduire de i) et ii) une procédure Afficher (r : Trationnel ; precision :entier) qui affiche l'écriture décimale de r avec *precision* chiffres après la virgule.

6. Une application

On définit la suite u par $u_n = 1/(0!) + 1/(1!) + 1/(2!) + 1/(3!) + \dots + 1/(n!)$, où n est un entier naturel. On montre que u converge vers e .

- a) Ecrire une fonction $\text{terme}(n : \text{Tnaturel}) : \text{Trationnel}$, qui renvoie $1/(n!)$.
- b) Ecrire une fonction $U(n : \text{Tnaturel}) : \text{Trationnel}$, qui renvoie u_n .
- c) En utilisant 5. d) iii), écrire une procédure $E(n : \text{Tnaturel})$ qui affiche l'écriture décimale du $n^{\text{ième}}$ terme de u .