Université Paris 13 | Sup Galilée INFO2
Institut Galilée | Année 2011-2012

Algorithmique de Graphes

TD7 : Connexité

Exercice 1

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté quelconque. Démontrer qui si on ajoute une arête à G, alors deux cas sont possibles :

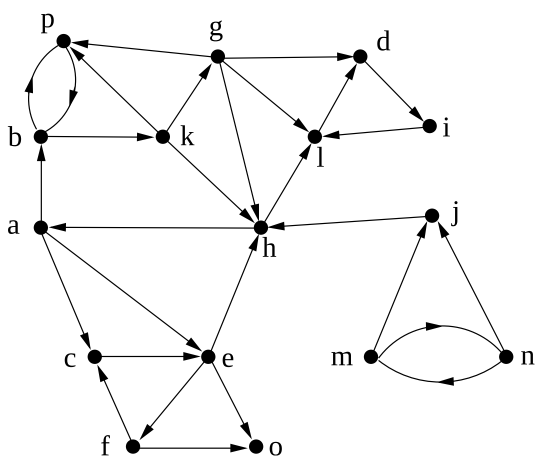
1. soit le nombre de composantes connexes diminue de 1,
2. soit le nombre de composantes connexes reste inchangé.

Exercice 2

On considère un graphe simple $G = (X, E)$. Montrez les implications suivantes :

1. $\delta(G) \geq k \geq 2 \Rightarrow$ il existe une chaîne de longueur k.
   indication : considérez la plus longue chaîne de G.
2. $\delta(G) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow G$ connexe.
   indication : montrez qu'il ne peut exister qu'une composante connexe.
3. $(\forall x, y \in X, d(x) + d(y) \geq n - 1) \Rightarrow G$ connexe.

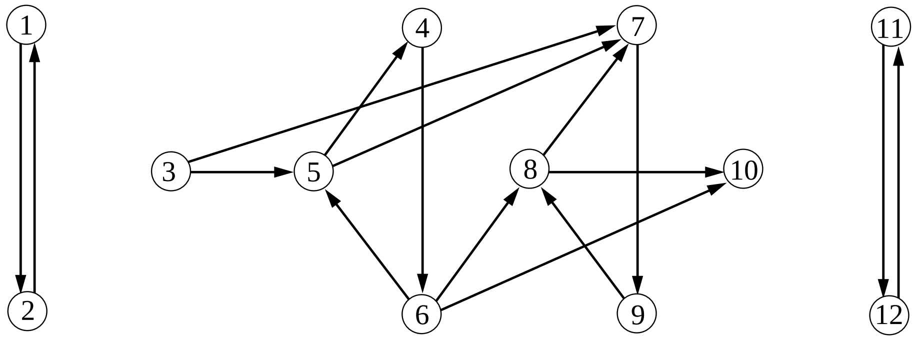
Exercice 3



1. (a) Tracer les arborescences et indiquer la numérotation des sommets obtenues lors d'une exploration en largeur du graphe G à partir du sommet a.
   (b) Utiliser cette exploration en largeur pour trouver la distance de a à chacun des sommets du graphe G.
2. Déterminer les composantes fortement connexes de G en utilisant l'algorithme donné dans le cours.

Exercice 4

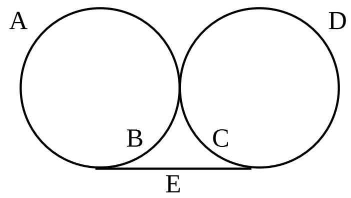
1. Faire un parcours en profondeur d'abord (DFS) à partir du sommet 1 dans le graphe représenté ci-dessous en cherchant à atteindre prioritairement les sommets de plus petits numéros.



2. Lister les arcs de types avant, arrière et croisé.
3. Donner les numérotations préfixe et suffixe de chacun des sommets.
4. Déterminer les composantes fortement connexes avec l'algorithme de Kosaraju-Shamir.
5. Donner le graphe réduit associé.

Exercice 5

Laurent possède un train électrique dont le schéma est le suivant :

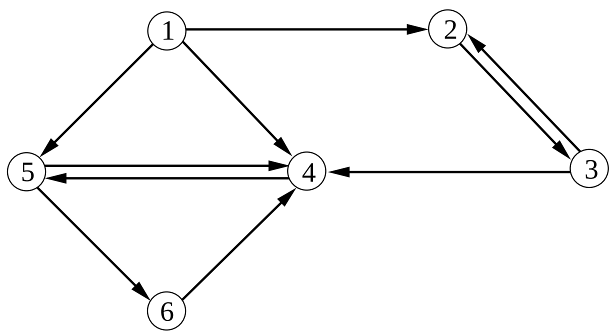


Laurent a remarqué qu'au bout d'un certain temps et quelle que soit la position initiale du train, il n'empruntait plus jamais la portion E. Pouvez-vous lui expliquer pourquoi ?
Vous construirez un graphe orienté à 10 sommets dont chaque sommet correspondra à un tronçon du réseau, muni d'un sens de parcours.

Exercice 6

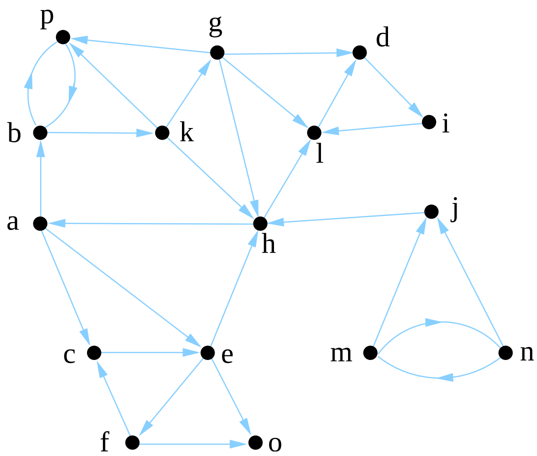
Fermeture transitive

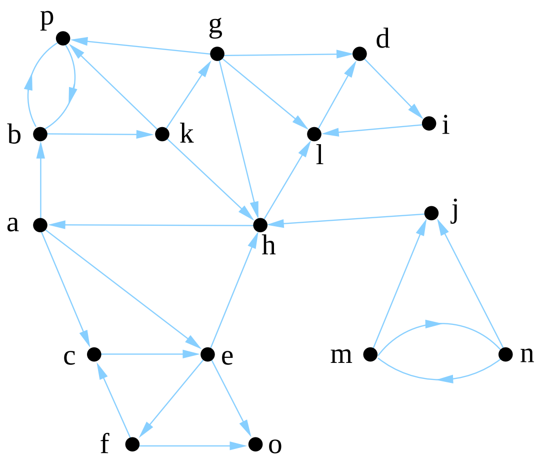
1. Donner la fermeture transitive du graphe $G = (X, U)$ de la figure ci-dessous en utilisant l'algorithme trivial (en $\mathrm{O}(n^4)$).
2. Sur ce même graphe et dans le même objectif, utiliser maintenant l'algorithme de Warshall (en $\mathrm{O}(n^3)$).

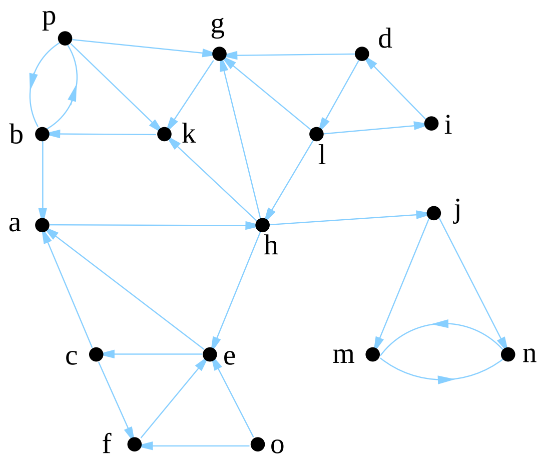


Algorithmique de Graphes

TD7 : Connexité







Université Paris 13 — Sup Galilée INFO2
Institut Galilée — Année 2011-2012

Algorithmique de Graphes
TD7 : Connexité