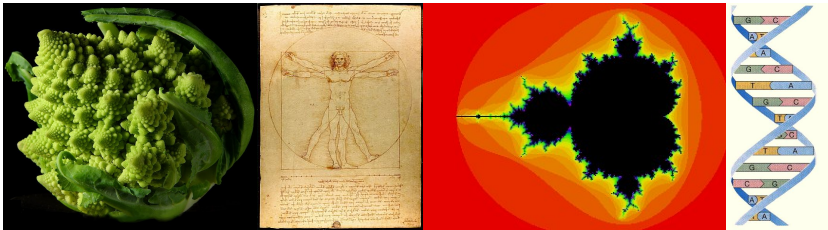


# Les impossibles en math et en informatique

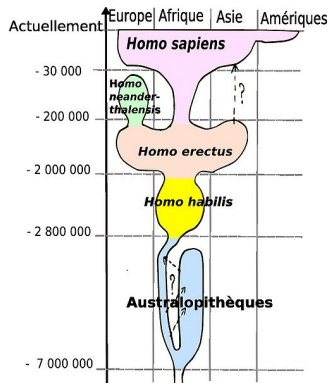
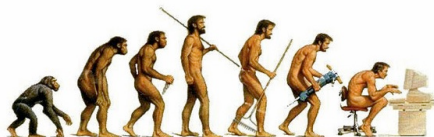
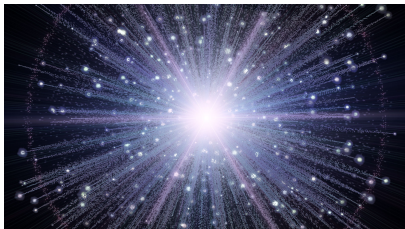
Cyril Banderier (CNRS / Univ. Paris Nord)

Cycle de conférences mathématiques,  
INSA Lyon, 15 novembre 2016.

Transparents disponibles : <http://lipn.fr/~banderier/>



# Est-ce qu'on faisait des maths à la préhistoire ?



13,7 milliards d'années : big bang

4,6 milliards d'années : système solaire, Terre (croûte, océans, Lune)

65 millions d'années : catastrophe (météorite, éruptions volcaniques), fin des dinosaures

7 millions : hominidés (Toumaï au Tchad)

3 millions : australopithèque (Lucie)

... homo habilis (pierres taillées)

... homo erectus (feu)

-200 000 ans : homo sapiens (nous !)

# Est-ce qu'on faisait des maths à la préhistoire ?

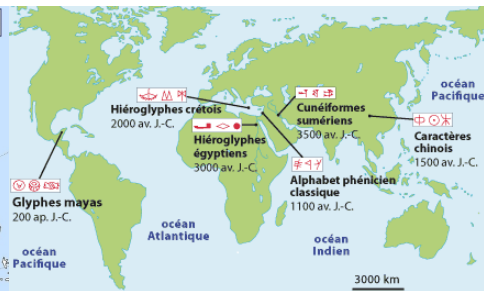
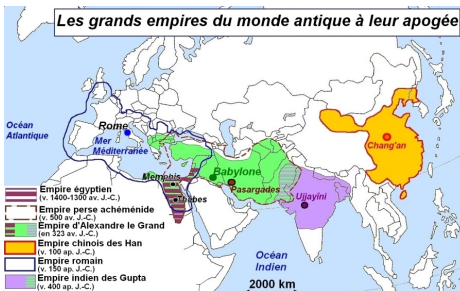


- 200 000 ans : homo sapiens (nous !)
- 18 000 : Lascaux, les os d'Ishango
- 10 000 : cuivre, sédentarisation, Mésopotamie
- 4 000 : premières grandes citées, roue

Leurs mathématiques : compter "en base 1" (vote des délégués de classe !)

Base 10, base 2 (ordinateur), base 20 (Gaulois), base 60 (Babyloniens).

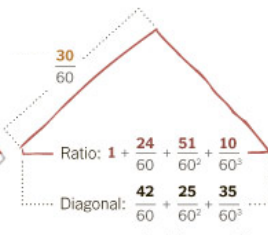
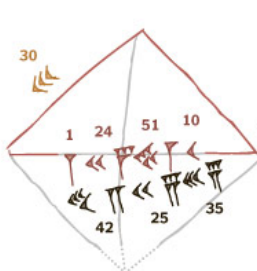
# Est-ce qu'on faisait des maths durant l'Antiquité ?



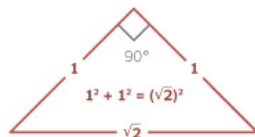
Oui, oui, oui !  
Des jolies mathématiques !  
Pour : calendrier, astronomie,  
géométrie (mesure de la terre),  
architecture, impôts, héritages... .



1 2 3 4 5 6 7 8 9  
 10 20 30 40 50 e.g. 42



Diagonal: **0.7071065**



Diagonal:  $0.5 \times \sqrt{2} = \mathbf{0.7071068}$

Tablette (datant de -1800, à Babylone), en **écriture "cunéiforme"** = en forme de coin



Pythagore (-569, -475) :  
"Tout est **harmonie**, tout est *rapport*,  
tout est fraction."

(musique / géométrie / nombres)



Pythagore (-569, -475) :  
"Tout est **harmonie**, tout est *rappor*t,  
tout est fraction."

(musique / géométrie / nombres)

Scandale : la diagonale du carré n'est pas un rapport (pas une "fraction") !

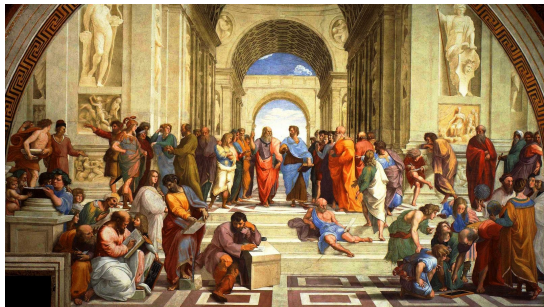
**Théorème** :  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

**Preuve** (Euclide  $\approx$  -300, "reductio ad absurdum") : On **suppose**  $\sqrt{2} = p/q$  (irréductible)

$$\sqrt{2} = p/q \quad \Rightarrow 2 = p^2/q^2 \quad \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 = (2p')^2 \quad \Rightarrow q^2 = 2p'^2 \quad \Rightarrow q \text{ est aussi pair}$$

$\Rightarrow$  impossible car  $p/q$  était irréductible, donc la **supposition était fausse** ! CQFD.



Pythagore (-569, -475) :  
"Tout est **harmonie**, tout est *rapport*,  
tout est fraction."

(musique / géométrie / nombres)

Scandale : la diagonale du carré n'est pas un rapport (pas une "fraction") !

**Théorème** :  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

**Preuve (Euclide  $\approx$  -300, "reductio ad absurdum")**: On **suppose**  $\sqrt{2} = p/q$  (irréductible)

$$\sqrt{2} = p/q \quad \Rightarrow \quad 2 = p^2/q^2 \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 = (2p')^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2p'^2 \quad \Rightarrow \quad q \text{ est aussi pair}$$

$\Rightarrow$  impossible car  $p/q$  était irréductible, donc la **supposition était fausse** ! CQFD.

Hippase de Métaponte : tué (ou noyé ?) pour avoir divulgué ce secret !





Trouver tous les entiers qui vérifient  $a^2 + b^2 = c^2$ .  $(3^2 + 4^2 = 5^2, 6^2 + 8^2 = 10^2,$



Trouver tous les entiers qui vérifient  $a^2 + b^2 = c^2$ . ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ,  $6^2 + 8^2 = 10^2$ ,  $5^2 + 12^2 = 13^2$ , ...)

Réponse :  $a = p^2 - q^2$ ,  $b = 2pq$ ,  $c = p^2 + q^2$

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient  $a^3 = b^3 + c^3$ .



Trouver tous les entiers qui vérifient  $a^2 + b^2 = c^2$ . ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ,  $6^2 + 8^2 = 10^2$ ,  $5^2 + 12^2 = 13^2$ , ...)

Réponse :  $a = p^2 - q^2$ ,  $b = 2pq$ ,  $c = p^2 + q^2$

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient  $a^3 = b^3 + c^3$ .

Réponse : il n'y en a pas !!!

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient  $a^n = b^n + c^n$ .



Trouver tous les entiers qui vérifient  $a^2 + b^2 = c^2$ . ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ,  $6^2 + 8^2 = 10^2$ ,  $5^2 + 12^2 = 13^2$ , ...)

Réponse :  $a = p^2 - q^2$ ,  $b = 2pq$ ,  $c = p^2 + q^2$

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient  $a^3 = b^3 + c^3$ .

Réponse : il n'y en a pas !!!

Trouver tous les entiers (non nuls) qui vérifient  $a^n = b^n + c^n$ .

Réponse : (conjecture de Fermat : il n'y en a pas !!!)

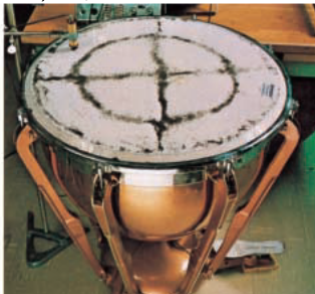
"Graal" des mathématiciens, finalement prouvé par Wiles en 1994.

Aucune application directe, mais a obligé à créer de nouvelles mathématiques, elles, fondamentales (théorie des anneaux, courbes elliptiques) qui ont une application pour les codes secrets !

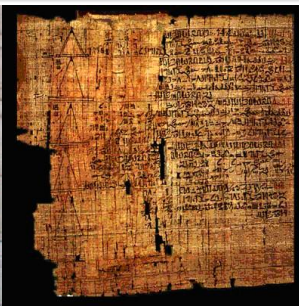


Lettre de Gauss (1777-1855) à monsieur Leblanc

Travaux de Sophie Germain (1776-1831) : "peut-on entendre la forme d'un tambour ?"

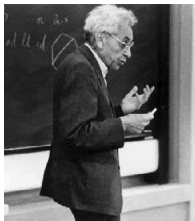


# Est-ce qu'on faisait des maths en Égypte ?



Scribe Ahmès ( $\approx -1540$ ) et son papyrus "Rhind" : multiplication, division, arpentage.

$$\frac{\overline{nnn}}{\overline{nni}} = \frac{1}{331}$$

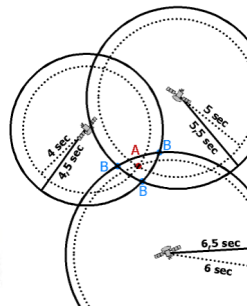
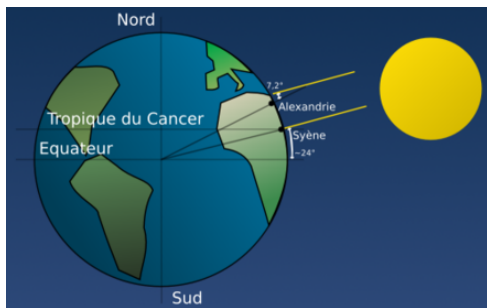


**Conjecture** des fractions égyptiennes :

on peut toujours trouver 3 entiers  $a, b, c$  tels que

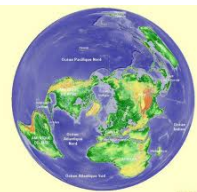
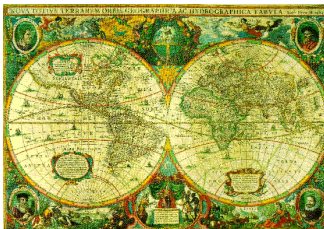
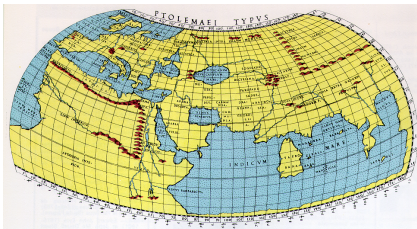
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Paul Erdős (1913-1996), 1500 articles !  
(réseau sociaux : distance d'Erdős).



Ératosthène (-276, -194) : conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie, précepteur du pharaon. Il se laissa mourir de faim, parce que, devenu aveugle, il ne pouvait plus admirer les étoiles.

- crible d'Ératosthène pour les nombres premiers (2,3,5,7,11,13,17,19, ...).
- problème déliaque (peste à Délos : doubler la taille de l'autel)
- circonférence de la Terre :  $787,5 \text{ km} \times 50 = 39\,375 \text{ km}$   
(valeur très proche de la réalité : 1,7% d'écart !)



Cartes de géographie (Ptolémée, Mercator)

distances en avion : 9 381 km, 10 300 km, 11 900 km

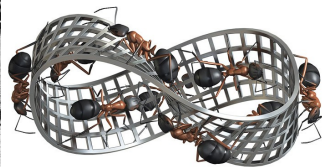
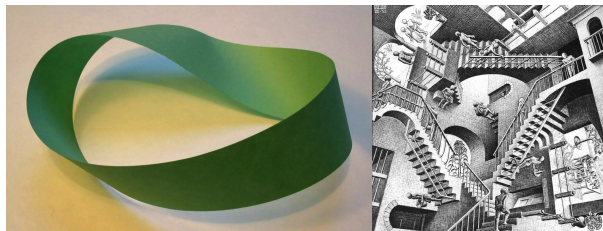
géométrie "non-euclidienne" (deux droites parallèles se croisent!)

plus que  $> 3$  dimensions... (théorie des cordes), <http://images.math.cnrs.fr/>



Peut-on avoir un objet avec une seule face ?

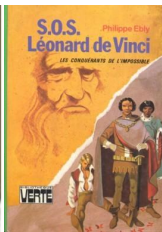
Peut-on avoir un objet avec une seule face ?



Oui ! Le ruban de Möbius (1790-1868)  
Maurits Cornelis Escher (1898-1972)

Le pape Grégoire XIII change le calendrier !

- début de l'année au premier janvier (son jour d'anniversaire!) [octobre, novembre, décembre]
- Le 9 décembre 1582 est suivi par le 20 décembre 1582.
- bissextile :  $n \bmod 4$ , **sauf  $n \bmod 100$  sauf  $n \bmod 400$**   $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365,2425$  jours
- La Révolution d'Octobre a eu lieu en novembre !  
(car réforme adoptée tardivement en Russie, en 1918)



Sun Zi (Chine, vers l'an 300) : "théorèmes des restes chinois"

Combien l'armée comporte-t-elle de soldats si,  
rangés par 3 colonnes, il reste deux soldats,  
rangés par 5 colonnes, il reste trois soldats et,  
rangés par 7 colonnes, il reste deux soldats ?

$$\begin{cases} n \bmod 3 = 2 \\ n \bmod 5 = 3 \\ n \bmod 7 = 2 \end{cases}$$

réponse :  $n = 23$  modulo 105



Chaque jour le volume d'un nénufar double sur l'étang, il occupe la moitié de l'étang en 10 jours.  
Au bout de combien de jours occupe-t-il tout l'étang ?

Réponse : ...



Chaque jour le volume d'un nénufar double sur l'étang, il occupe la moitié de l'étang en 10 jours.  
Au bout de combien de jours occupe-t-il tout l'étang ?

Réponse : ... 11 jours.

On a mis 10 000 ans à épuiser la moitié des ressources de notre planète.  
Chaque année, notre besoin double.

Il nous reste des ressources pour combien d'années ?

Réponse :



Chaque jour le volume d'un nénufar double sur l'étang, il occupe la moitié de l'étang en 10 jours.  
Au bout de combien de jours occupe-t-il tout l'étang ?

Réponse : ... 11 jours.

On a mis 10 000 ans à épuiser la moitié des ressources de notre planète.

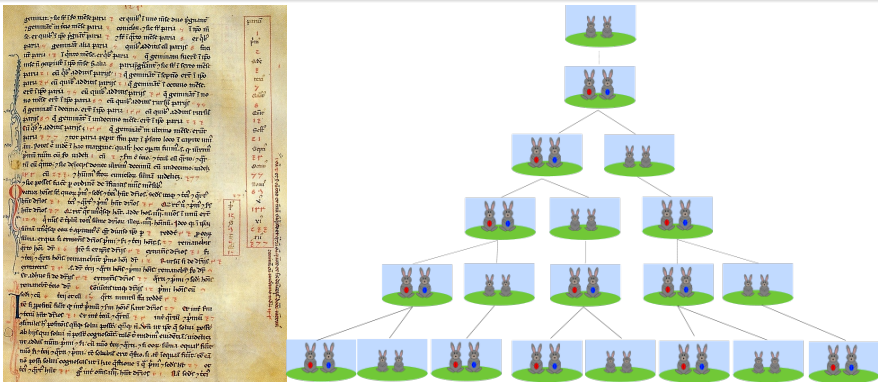
Chaque année, notre besoin double.

Il nous reste des ressources pour combien d'années ?

Réponse : 1 seule année !

On parle de **croissance "exponentielle"** (ça double à chaque fois), ça va très vite !

# La suite de Fibonacci et le nombre d'or



Leonardo Fibonacci (1175-1250) dans son *Livre des abaques* (calculs)

popularise les chiffres arabes < cifra < al sifr = vide = le zéro.

**Problème :** Les lapins deviennent adultes en un mois, et ont alors chaque mois un couple de bébé.

Combien de couples de lapins au bout de 2 ans ?

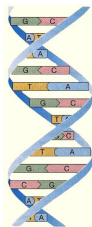
$f_n$  = le nombre de couples après  $n$  mois ;  $f_0 = 1, f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, \dots$

réurrence :  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , lien avec le **nombre d'or** :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

$$f_n = \frac{\phi^{n+1} + 1/\phi^{n+1}}{\sqrt{5}} \approx 1,61^n$$

exemple de calculs efficaces sous Maple puis [Film de Cristóbal Vila](#)



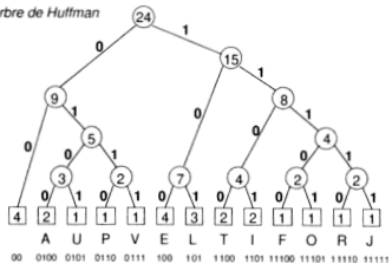
Phrase

"La jolie petite fleur va"

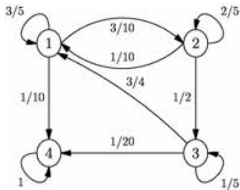
Fréquence des lettres

E	L	A	T	I	P	R	U	F	O	V	J
4	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1

Arbre de Huffman



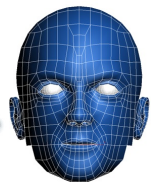
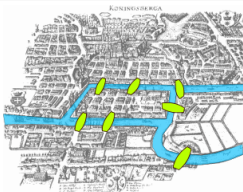
La **compression des fichiers** (.zip, .rar, .mp3, .pdf), le **séquençage de l'ADN**, le dépistage de maladie génétique, la **recherche d'un mot** dans un texte reposent sur des modèles proches.



Les **chaînes de Markov** (Markov, 1906) permettent de modéliser de nombreuses dépendances, apparentes ou cachées.

Les automates cellulaires sont une généralisation qui semblent pouvoir coder des colonies de bactéries. [\[vidéo\]](#)

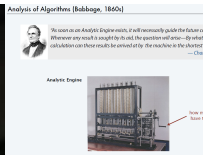




- problème des 7 ponts de Königsberg [Leonhard Euler (1707-1783)]
- théorème des 4 couleurs (1976) : toute carte peut être coloriée avec 4 couleurs
- problème du graphe sans liens qui se croisent (eau / gaz / électricité)
- problème du voyageur de commerce (plus court chemin : 1 million de dollars "P=NP?")

<http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/puzzles/>

Applications : optimisation du trafic ferroviaire, phénomène petit monde (Milgram 1967), réseaux sociaux (facebook), téléphones portables, internet, google : ordre des liens, jeux vidéos (images de synthèse)



- **la Pascaline** (1645) : Blaise Pascal (1623-1662) pour aider papa, puis crée la théorie des probabilité [avec Jérôme Cardan (1501-1576)]
- **automates** : canard qui fait caca de Jacques de Vaucanson (1709-1782)
- **orgues de barbarie** ( $\approx$  1690)
- **métier Jacquard** (tissage 1801, révolte des canuts en 1831)
- **machine de Babbage** (1849)



Le premier programmeur du monde... était une femme !  
Ada Lovelace (1815-1852, fille de Lord Byron) calcule les nombres de Bernoulli

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = b_n \pi^{2n}$$

# Turing : père de l'informatique et de l'intelligence artificielle

## Analysis of Algorithms (Turing (I), 1940s)



"It is convenient to have a measure of the amount of work involved in a computing process, even though it be a very crude one. We may count up the number of times that various elementary operations are applied in the whole process..."  
— Alan Turing (1947)

### ROUNDING-OFF ERRORS IN MATRIX PROCESSES

By A. M. TURING

(National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex)

(Received 4 November 1947)

#### SUMMARY

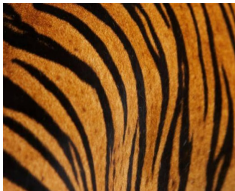
A number of methods of solving sets of linear equations and inverting matrices are discussed. The theory of the rounding-off errors involved is investigated for some of the methods. In all cases examined, including the well-known 'Gauss elimination process', it is found that the errors are generally quite moderate; no exceptional build-up can occur.



Duell Kasparow gegen Deep Blue (1997): Demütigende Niederlage

## Alan Turing (1912-1954) :

- 1936 : machines de Turing, indécidabilité de l'arrêt,
- guerre : casse le code secret des Nazis (Enigma), premiers ordinateurs
- 1949 : construction d'un des premiers ordinateurs, preuve de correction de programmes
- 1950 : test de Turing pour définir l'intelligence artificielle
- 1952 : programme de jeu d'échecs
- 1952 : morphogénèse
- 1954 : suicide (suite à son procès pour homosexualité) en mangeant une pomme empoisonnée au cyanure







Les clients ayant acheté cet article ont également acheté



Algèbre, chapitres 1 à 3  
> Nicolas Bourbaki  
★★★★☆ (1)  
Broché



Théorie des ensembles  
N Bourbaki  
★★★★☆ (2)  
Broché  
EUR 48,17



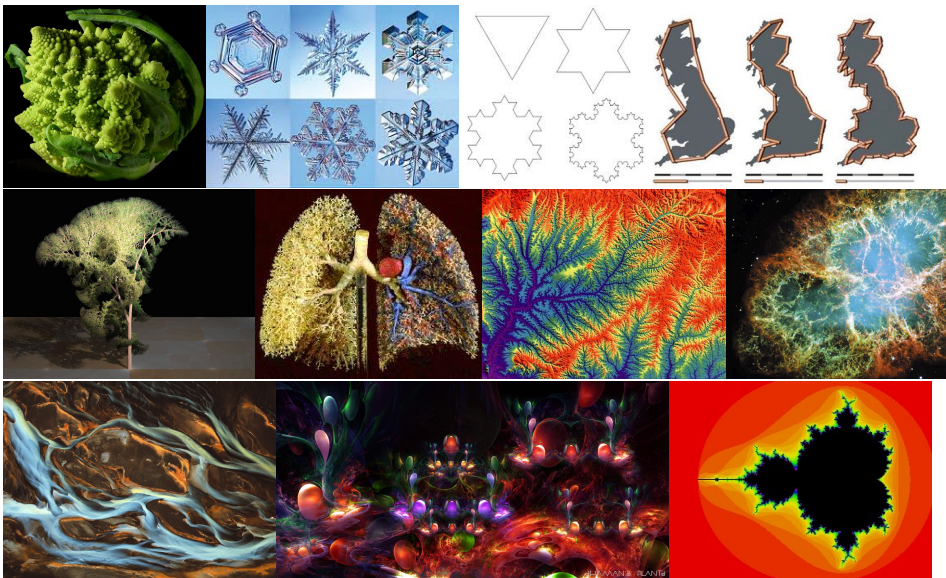
Topologie Générale,  
chapitres 1 à 4  
> Nicolas Bourbaki  
★★★★☆ (1)  
Broché  
EUR 48,17



Une histoire des  
mathématiques : Routes ...  
Amy Dahan-Dalmédico  
★★★★☆ (6)  
Poche  
EUR 7,69

Méthodes d'apprentissage (par "essai et erreur") pour :  
reconnaissance faciale, filtrer les spams, jeu de go, marketing, ...

# Fractales et diversité des formes dans la nature



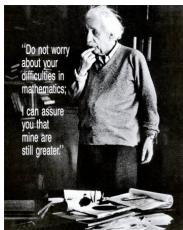
fractales = pas lisse + propriétés d'auto-similarité [voir exemples google Earth]  
Applications : Mandelbrot  $y_{n+1} = y_n^2 + z$  donne la hauteur des arbres binaires  $B = B^2 + z$  (Flajolet)

# Déterminisme et liberté : le monde en équation ?



Diderot (1784) : Jacques le fataliste. « Si tout est écrit là-haut, où est notre choix ? »

Laplace (1814) : « Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. »

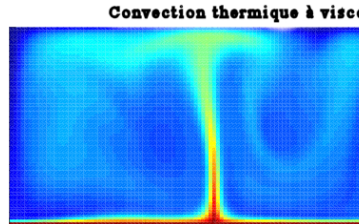
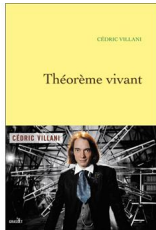


Principe d'incertitude d'Heisenberg (1927) :

« Y'a des probas en physique des particules ! »

Albert Einstein : « Dieu ne joue pas aux dés. »

Niels Bohr : « Einstein, cessez de dire à Dieu ce qu'il doit faire ! »



De Newton à Pierre-Louis Lions et son étudiant en thèse Cédric Villani (médailles Fields 1994 & 2010) : équations avec des dérivées de fonctions à plusieurs variables (fondamentales en physique, mouvement des fluides)

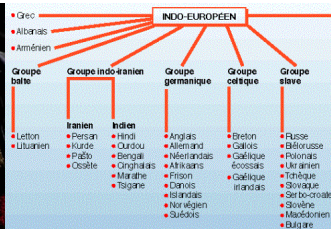
équations souvent "impossibles" à résoudre : comportement à "long terme"?, simulations numériques (méthode Monte-Carlo de Von Neumann pour la bombe atomique en 1945)



stabilité du système solaire (problème des 3 corps)  
sensibilité aux conditions initiales, théorie du chaos, météo (effet papillon)

Eugene Wigner (1902-1995) : "La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles"





Structuralisme : Bourbaki en maths, Lévy-Strauss en ethnologie.

Aborigènes en Australie : "Tout homme peut épouser la fille du frère de sa mère" (permutations, théorie des groupes)

Oulipo (ouvroir de littérature potentielle) : on joue avec une contrainte pour produire un texte

"La vie mode d'emploi" de Georges Perec (1932-1982)

"La disparition" (roman sans "e")

Noam Chomsky (1928-) et Marcel-Paul Schützenberger (1920-1996)

théorie des langages humain :  $P \rightarrow$  Sujet Verbe Complément

langage informatique :  $P \rightarrow$  begin if A then B else C end

Questions, discussions. . .

