Sommes harmoniques et polylogarithmes en les multiindices negatifs

Les auteurs : G.H.E.Duchamp - Hoang Ngoc Minh - Ngo Quoc Hoan

Thématique : Algorithmique & Combinatoire

Équipe : *Combinatoire, algorithmique et interactions* (CALIN).

Résumé

L'objectif de cette étude est, en appliquant la combinatoire des algèbres (de Hopf) de shuffle et de stuffle, de trouver toutes les relations (image et noyau) entre les sommes harmoniques et les polylogarithmes en les multiindices negatifs. Ces sommes sont indexèes par des mots $y_{s_1}\ldots y_{s_r}$ dans un monoide (ce monoide est généré par l'alphabet $\{y_k\}_{k\geq 1}$),

$$\mathrm{H}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}}(N) = \sum_{N\geq n_1>\ldots>n_r>0} n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r}, \tag{1}$$

$$\mathrm{Li}^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}}(z) = \sum_{n_1>n_2>\ldots>n_r>0} n_1^{s_1}\ldots n_r^{s_r} z^{n_1}, \tag{2}$$

où $r, N \in \mathbb{N}_+$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|< 1$.

1. **D'abord**, nous avons trouvé que les sommes harmoniques satisfont à $\mathrm{H}^-_{u \,\text{ш}\!\!\text{ш}\, v} = \mathrm{H}^-_u \mathrm{H}^-_v$ où $u, v \in Y^*$. Si on note $\mathrm{P}^-_w(z) = \sum_{N\geq 0} \mathrm{H}^-_w(N) z^N$ alors les $\mathrm{P}^-_\bullet$ sont des caractères de $(k\langle Y\rangle, \,\text{ш}\!\!\text{ш}\,, 1)$ à valeurs dans l'algèbre de Hadamard $\mathbb{C}[[z]]$.
2. **Ensuite**, nous donnons des résultats sur les polylogarithmes de cette famille. Nous construisons un produit $\top : k\langle Y\rangle \otimes k\langle Y\rangle \to kY$ $(k = \mathbb{Q})$ tel que

$$\mathrm{Li}^-_u \,\mathrm{Li}^-_v = \mathrm{Li}^-_{u\top v}; u, v \in Y^*. \tag{3}$$

   En particulier, nous construisons une forme générale de polynômes Eulériens $\{A^-_{y_s}(z) := A_s(z)\}_{s\geq 0}$), telle que pour chaque $w := y_{s_1}...y_{s_r} \in Y^*$, $A^-_w(z)$ soit défini par

$$A^-_{y_{s_1}\ldots y_{s_r}}(z) := \sum_{i=0}^{s_1} \binom{s_1}{i} A^-_{y_i}(z) A^-_{y_{(s_1+s_2-i)}y_{s_3}\ldots y_{s_r}}(z).$$

3. **Enfin**, poursuivant cet objectif, nous construisons les morphismes

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^-_\bullet &: (\mathbb{C}\langle Y\rangle \,\text{ш}\!\!\text{ш}\,) \to (\mathbb{C}\{\mathrm{H}^-_w\}_{w\in Y^*}, \times), && w \mapsto \mathrm{H}^-_w,\\
\mathrm{P}^-_\bullet &: (\mathbb{C}\langle Y\rangle, \,\text{ш}\!\!\text{ш}\,) \to (\mathbb{C}\{\mathrm{P}^-_w\}_{w\in Y^*}, \odot), && w \mapsto \mathrm{P}^-_w,\\
\mathrm{Li}^-_\bullet &: (\mathbb{C}\langle Y\rangle, \top) \to (\mathbb{C}\{\mathrm{Li}^-_w\}_{w\in Y^*}, \times), && w \mapsto \mathrm{Li}^-_w,\\
A^-_\bullet &: (\mathbb{C}\langle Y\rangle, \top) \to (\mathbb{C}\{A^-_w\}_{w\in Y^*}, \times), && w \mapsto A^-_w.
\end{aligned}$$

   où $\ker(\mathrm{H}^-_\bullet) = \ker(\mathrm{Li}^-_\bullet) = \ker(\mathrm{A}^-_\bullet) = \ker(\mathrm{P}^-_\bullet)$. De plus, par la définition de $\top$ et un lemme très général sur les projecteurs, on peut conclure que

$$\{w - w\top 1^*_Y\}_{|w|\geq 2}$$

   est une base de $\ker \mathrm{Li}^-_\bullet$.

Références

[1] JOLHANN FAULHABER, Darinnen die miraculosische Inventiones zu den hochsten Cossen weiters continuirt und profitiert werden, Academia Algebrae(1631).

[2] C.COSTERMANS, HOANG NGOC MINH, Some results à l'Abel obtained by use of techniques à la Hopf, in Global Integrability of Field Theories (Daresbury, UK, 2006), J. Calmet et. al. (eds.), Universitätsverlag Karlsruhe, 2006, pp. 63-83.

[3] C.COSTERMANS, HOANG NGOC MINH, Noncommutative algebra, multiple harmonic sums and applications in discrete probability, Journal of Symbolic Computation (2009), pp. 801-817.

[4] D. FOATA, MARCEL-P. SCHUTZENBERGER, , Theorie Geometrique des Polynomes Euleriens, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1970), 138(45 pp).

[5] GERARD.H.E. DUCHAMP, V. HOANG NGOC MINH, A.I. SOLOMON, S. GOODENOUGH, An interface between physics and number theory, in Journal of Physics (2011), 284(1), pp 012 - 023.

[6] GÉRARD.H.E. DUCHAMP,L. POINSOT, A.I. SOLOMON, K.A. PENSON, P. BLASIAK, A. HORZELA, Ladder Operators and Endomorphisms in Combinatorial Physics, in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol 12 :2, 23-46 (2010).

[7] HOANG NGOC MINH.– Differential Galois groups and noncommutative generating series of polylogarithms, in 7th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and informatics, Orlando, FL. pp. 128-135.

[8] HOANG NGOC MINH, Finite polyzetas, Poly- Bernoulli numbers, identities of polyzetas and noncommutative rational power series, in Proceedings of 4^{th} International Conference on Words, pp. 232- 250, Sept., 10-13, 2003 Turku, Finland.

[9] HOANG NGOC MINH, On a conjecture by Pierre Cartier about a group of associators, in Acta Mathematica Vietnamica, Vol. 3, (2013).

[10] R.L. HUDSON, Sticky shuffle Hopf algebras and their stochastic representations, in New trends in stochastic analysis and related topics, A volume in honour of K.D.Elworthy, Ed.H.Zhao and A.Truman, World Scientific(2012).

[11] P. CARTIER, Fonctions polylogarithmes, nombres polyzetas et groupes pro-unipotents, Sém BOURBAKI, $53^{\text{ème}}$ (2000-2001), $n°885$.

[12] D. ZAGIER, Values of zeta functions and their applications, in "First European Congress of Mathematics", vol. 2, pp. 497-512, Birkhäuser (1994).

[13] C.REUTENAUER, Free Lie Algebras, London Math. Soc. Monographs, New Series-7, Oxford Sc. Pub. (1993).

[14] EL WARDI.– Mémoire de DEA, Lille, 1999.