Un théorème différentiel

Matthieu Deneufchâtel et G. H. E. Duchamp

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord,
Université Paris 13

18 septembre 2012

- Cadre : polylogarithmes (intégrales itérées des formes différentielles $\dfrac{dz}{z}$ et $\dfrac{dz}{1-z}$).
- Question : indépendance linéaire ? Sur quel(s) corps ?
- Via la combinatoire algébrique, pour les hyperlogarithmes, sans monodromie.

Résultats précédents :

- indépendance linéaire des polylogarithmes sur $\mathbb{C}$ (Wechsung, 1991 ?) ;
- indépendance linéaire des polylogarithmes sur $\mathbb{C}\left[z, \dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{1-z}\right]$ (Minh H.N., Petitot,van der Hoeven, 2000) ;
- indépendance linéaire des polylogarithmes colorés sur $\mathbb{C}\left[z, \dfrac{1}{z}, \left(\dfrac{1}{\rho_i^{-1} - z}\right)_{i=0,\ldots,n-1}\right]$ (où les ρ_i sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 ; Minh H. N., 2004).

Idée générale

- Encoder les hyper / poly - logarithmes par des mots
  $\rightarrow$ Série génératrice non-commutative.
- Équation différentielle non-commutative.
- Étude des propriétés des solutions de ce type d'équations différentielles et de leurs coefficients.
- Utilisation de corps de fonctions : nécessité d'inverser des fonctions avec domaines de définition différents
  $\rightarrow$ corps de fonctions *à domaine variable*
  $\rightarrow$ Utilisation de corps de germes de fonctions analytiques.

Ingrédients

- Séries (génératrices) non-commutatives à coefficients fonctionnels dans $\mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle$ où :
  - k-Algèbre différentielle $(\mathscr{A}, \mathrm{d})$ avec $\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}(a)\, b + a\, \mathrm{d}(b)$;
  - Dérivation des séries : $\mathbf{d}(S) = \sum \mathrm{d}(\langle S|w\rangle)w$.

- Équation différentielle non commutative de la forme $\mathbf{d}(S) = MS$ où
  - $\mathscr{C}$: sous-corps différentiel de $\mathscr{A}$: $\mathrm{d}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$ (par exemple : fractions rationnelles, fonctions méromorphes...) ;
  - Multiplicateur $M = \sum_{x\in X} u_x x$, $u_x \in \mathscr{C}$.
- On a besoin de la condition $\ker(\mathrm{d}) = k$.

Théorème général [DDMS, 2011] [1]

Soit $S \in \mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle$ une solution de l'équation différentielle

$$\mathbf{d}(S) = MS \ ; \ \langle S|1_{X^*}\rangle = 1.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

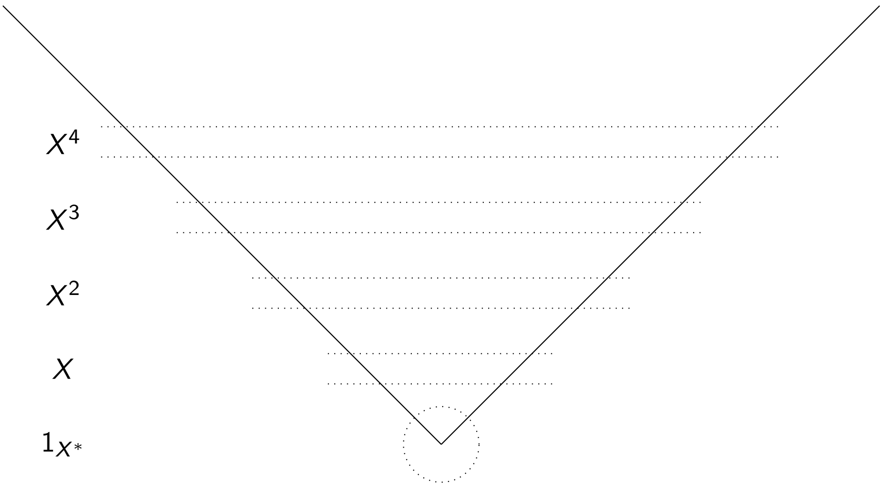
i) la famille $(\langle S|w\rangle)_{w\in X^*}$ des coefficients de S est linéairement indépendante sur $\mathscr{C}$.

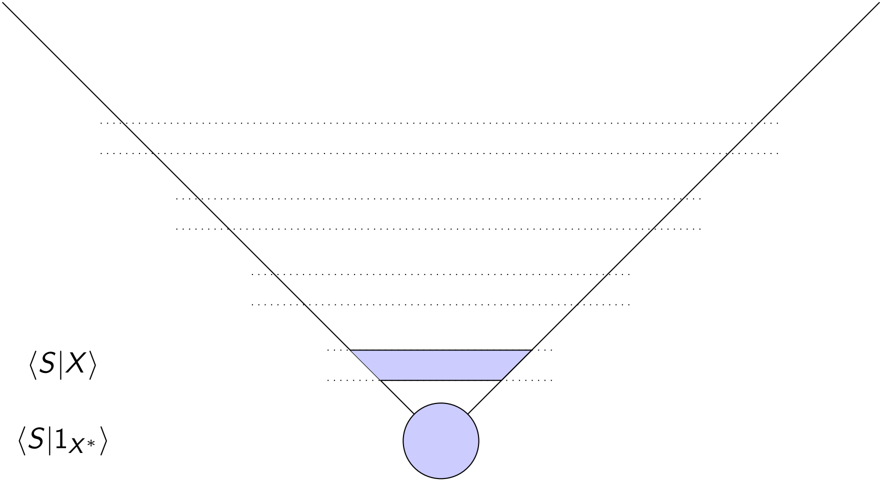
ii) la famille des coefficients $(\langle S|x\rangle)_{x\in X\cup\{1_{X^*}\}}$ est linéairement indépendante sur $\mathscr{C}$.

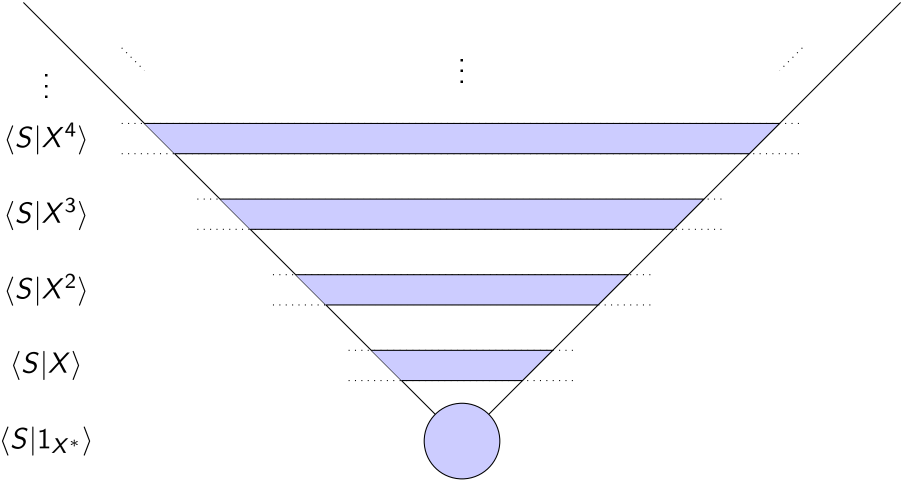
iii) la famille $(u_x)_{x\in X}$ est telle que, pour $f \in \mathscr{C}$ et $\alpha_x \in k$

$$\mathrm{d}(f) = \sum_{x\in X} \alpha_x u_x \Longrightarrow (\forall x \in X)(\alpha_x = 0).$$

1. *Independence of Hyperlogarithms over Function Fields via Algebraic Combinatorics*, MD, G. H. E. Duchamp V. Hoang Ngoc Minh and A. I. Solomon, 4th International Conference on Algebraic Informatics, Linz (2011). Proceedings, Lecture Notes in Computer Science, 6742, Springer.


X^4
X^3
X^2
X
1_{X^*}


$\langle S|X\rangle$
$\langle S|1_{X^*}\rangle$



$\langle S|X^4\rangle$
$\langle S|X^3\rangle$
$\langle S|X^2\rangle$
$\langle S|X\rangle$
$\langle S|1_{X^*}\rangle$

Soit S une solution régulière de $\mathbf{d}(S) = MS$.

Montrons que $(ii) \Longrightarrow (iii)$.

On suppose que les coefficients $\langle S|x\rangle$, $x \in X^*$ et $\langle S|1_{X^*}\rangle$ forment une famille linéairement indépendante sur $\mathscr{C}$.

Supposons maintenant que $f \in \mathscr{C}$ soit telle que

$$\mathrm{d}(f) = \sum_{x \in X} \alpha_x u_x, \quad \alpha_x \in k.$$

Démontrons que les α_x sont tous nuls.

Soit $P := -f 1_{X^*} + \sum_{x \in X} \alpha_x x$.

$$\mathbf{d}(P) = -\mathrm{d}(f) 1_{X^*}$$

car $\alpha_x \in k$ et (règle de Leibniz)

$$\mathrm{d}(\langle S | P \rangle) = \langle \mathbf{d}(S) | P \rangle + \langle S | \mathbf{d}(P) \rangle.$$

De plus, $\mathbf{d}(S) = MS$ donc

$$\mathrm{d}(\langle S | P \rangle) = \langle MS | P \rangle - \mathrm{d}(f) \langle S | 1_{X^*} \rangle.$$

Or, puisque M est homogène de degré 1,

$$\langle MS|P\rangle = -f\langle MS|1_{X^*}\rangle + \sum_{x\in X}\alpha_x\langle MS|x\rangle = 0 + \sum_{x\in X}\alpha_x u_x$$

donc

$$\mathrm{d}(\langle S|P\rangle) = (\sum_{x\in X}\alpha_x u_x) - \mathrm{d}(f) = 0.$$

$\langle S|P\rangle$ est une constante notée $\lambda \in k$.
Notons $Q = P - \lambda.1_{X^*}$;

$$\mathrm{supp}(Q) \subset X \cup \{1_{X^*}\}$$

et

$$\langle S|Q\rangle = \langle S|P\rangle - \lambda\langle S|1_{X^*}\rangle = \langle S|P\rangle - \lambda = 0.$$

$(\langle S|y\rangle)_{y\in X\cup\{1_{X^*}\}}$ est libre donc $Q=0$ et, puisque

$$Q=-(f+\lambda)1_{X^*}+\sum_{x\in X}\alpha_x x,$$

tous les α_x sont nuls.

Remarque

Soit

$$\sum_{w} \alpha_w \langle S|w\rangle = 0$$

une *relation de liaison* entre les coefficients de S.

Posons

$$P = \sum_{w} \alpha_w w.$$

La relation de liaison est équivalente à l'annulation de $\langle S|P\rangle$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$

Supposons que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}$ telle que $\mathrm{d}(f) = \sum_{x \in X} \alpha_x x$ avec $\alpha_x \in k$, tous les α_x sont nuls.

Montrons que les coefficients de S forment une famille linéairement indépendante.

Soit $\mathcal{K}$ le noyau de $P \mapsto \langle S|P\rangle$, c'est-à-dire

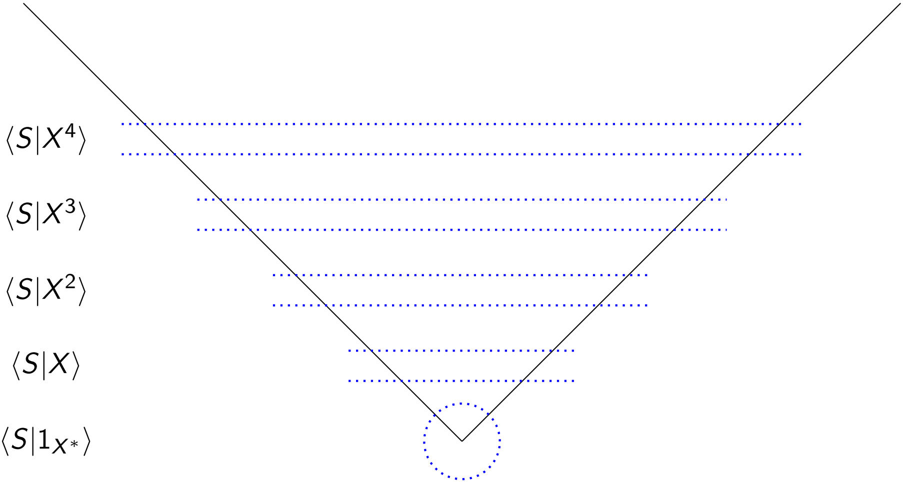
$$\mathcal{K} = \{P \in \mathscr{C}\langle X\rangle, \quad \langle S|P\rangle = 0\}.$$

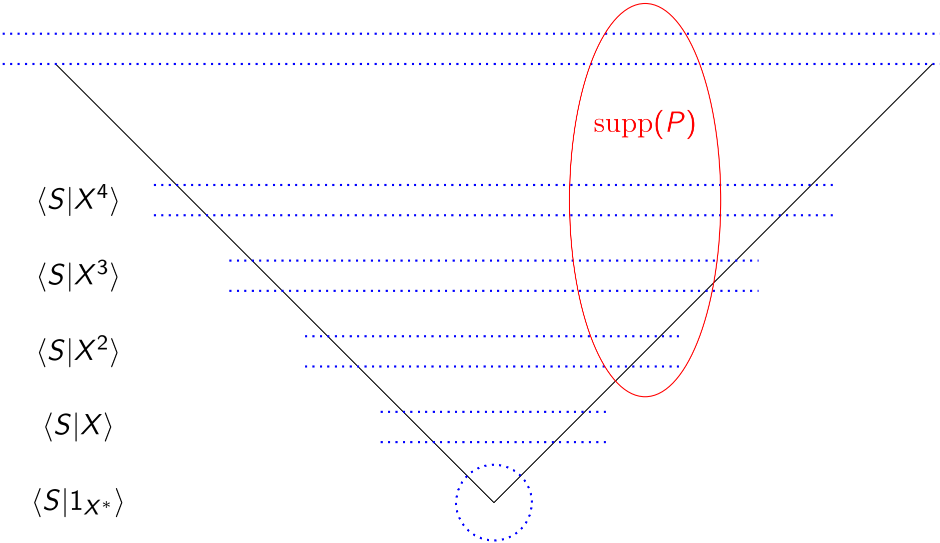
La propriété (i) est équivalente à $\mathcal{K} = \{0\}$.

Supposons que $\mathcal{K} \neq \{0\}$.

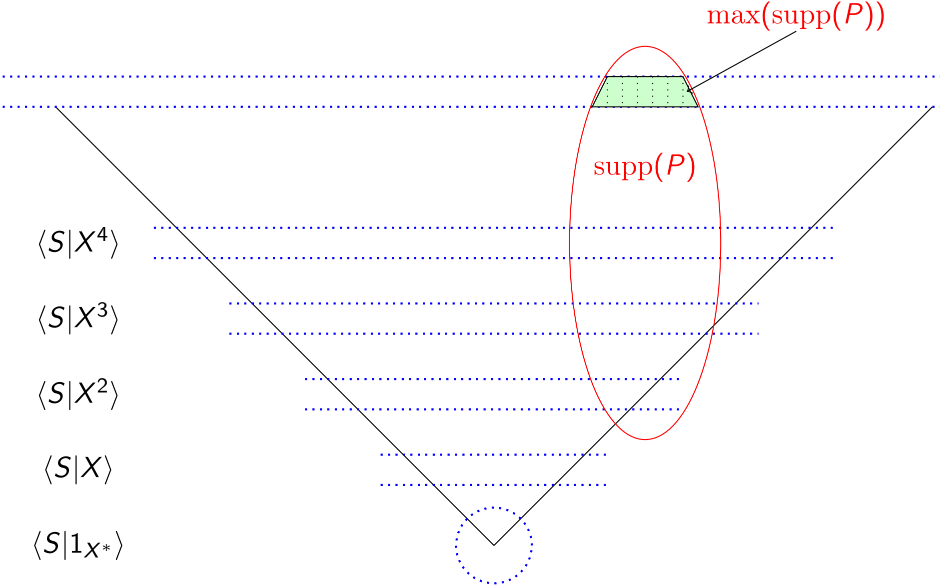
Pour tout P non nul, $\max_{\prec}(P)$ désigne son monôme dominant (le plus grand élément de son support $\mathrm{supp}(P)$, ordre lexicographique par longueur) ;

$$\deg(P) = |\max_{\prec}(P)|.$$


$\langle S|X^4\rangle$
$\langle S|X^3\rangle$
$\langle S|X^2\rangle$
$\langle S|X\rangle$
$\langle S|1_{X^*}\rangle$



supp(P)
$\langle S | X^4 \rangle$
$\langle S | X^3 \rangle$
$\langle S | X^2 \rangle$
$\langle S | X \rangle$
$\langle S | 1_{X^*} \rangle$


$\max(\mathrm{supp}(P))$
$\mathrm{supp}(P)$
$\langle S|X^4\rangle$
$\langle S|X^3\rangle$
$\langle S|X^2\rangle$
$\langle S|X\rangle$
$\langle S|1_{X^*}\rangle$

Puisque $\mathcal{R} = \mathcal{K} - \{0\} \neq \emptyset$, notons

$$w_0 = \min\left(\max_{\prec}(T)\right)_{T \in \mathcal{R}}$$

(le plus petit des monômes dominants des polynômes qui annulent S).

Choisissons $P \in \mathcal{R}$ tel que $\max_{\prec}(P) = w_0$. Alors

$$P = f w_0 + \sum_{u \prec w_0} \langle P|u\rangle u \ ; \ f \in \mathscr{C}\backslash\{0\}.$$

$Q = \dfrac{1}{f} P$ est bien défini, appartient à $\mathcal{R}$ et

$$Q = w_0 + \sum_{u \prec w_0} \langle Q|u\rangle u.$$

Introduisons

$$x^\dagger v = \begin{cases} 0 \text{ si } v \text{ ne commence pas par } x\ ; \\ u \text{ si } v = xu. \end{cases}$$

Alors puisque $\langle S|Q\rangle = 0$

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}(\langle S|Q\rangle) &= \langle \mathbf{d}(S)|Q\rangle + \langle S|\mathbf{d}(Q)\rangle \\ &= \langle MS|Q\rangle + \langle S|\mathbf{d}(Q)\rangle \\ &= \langle S|M^\dagger Q\rangle + \langle S|\mathbf{d}(Q)\rangle \\ &= \langle S|M^\dagger Q + \mathbf{d}(Q)\rangle \end{aligned}$$

avec

$$M^\dagger Q + \mathbf{d}(Q) = \sum_{x\in X} u_x(x^\dagger Q) + \sum_{u \prec w_0} \mathrm{d}(\langle Q|u\rangle)u \in \mathscr{C}\langle X\rangle.$$

Il n'est pas possible que

$$M^{\dagger}Q + \mathbf{d}(Q) \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$$

parce que son monôme dominant est strictement plus petit que w_0 ; nécessairement,

$$M^{\dagger}Q + \mathbf{d}(Q) = 0.$$

C'est équivalent à la relation de récurrence suivante :

$$\mathrm{d}(\langle Q|w\rangle) = M^{\dagger}Q = -\sum_{x \in X} u_x \langle Q|xw\rangle, \text{ pour } w \in X^*.$$

Ainsi

$$\langle Q|w\rangle \in k$$

pour tout w de longueur $\deg(Q)$.

Puisque $\langle S|1_{X^*}\rangle = 1$,

$$\deg(Q) > 0$$

(sinon, $Q = 1_{X^*}$ et $\langle S|Q\rangle = 1$ et non 0).

Comme $|w_0| = \deg(Q) > 1$, nous pouvons écrire $w_0 = x_0 v$. Alors :

$$\mathrm{d}(\langle Q|v\rangle) = -\sum_{x\in X} u_x\langle Q|xv\rangle = -u_{x_0}\langle Q|x_0 v\rangle - \sum_{x\neq x_0} u_x\langle Q|xv\rangle$$

Puisque $|xv| = \deg(Q)$ pour tout $x \in X$, ce que l'on a montré précédemment implique que les $-\langle Q|xv\rangle$ sont dans k.

Tous les coefficients $\langle Q|xv\rangle$ sont nuls par hypothèse ; en particulier, comme $\langle Q|x_0 v\rangle = 1$, nous obtenons une contradiction.

Ceci prouve que $\mathcal{K} = \{0\}$.

Applications : généralisation aux hyperlogarithmes.

Formes différentielles $\dfrac{dz}{z-a_i}$, $a_i \in \mathbb{C}$.

$$L(a_{i_0},\ldots,a_{i_n}|z_0 \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} z) = \int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{s_n}\cdots\int_{z_0}^{s_1}\frac{ds_0}{s_0-a_{i_0}}\cdots\frac{ds_n}{s_n-a_{i_n}}$$

Indépendance linéaire de ces fonctions sur des corps de fonctions.

Problème des singularités : classes d'équivalence (germes) de fonctions définies sur des éléments d'une base de filtre.

Merci de votre attention !