Adjonction d'unité, aspect catégorique

Laurent Poinsot

LIPN UMR 7030 - Université Paris 13 - Institut Galilée

CIP

Sommaire de la présentation

1. Introduction
2. Coproduit catégorique
3. Catégories monoïdales
4. Semi-groupes et monoïdes internes
5. Adjonction de l'unité

Sommaire de la présentation

1. Introduction
2. Coproduit catégorique
3. Catégories monoïdales
4. Semi-groupes et monoïdes internes
5. Adjonction de l'unité

Sommaire de la présentation

1. Introduction
2. Coproduit catégorique
3. Catégories monoïdales
4. Semi-groupes et monoïdes internes
5. Adjonction de l'unité

Sommaire de la présentation

1. Introduction
2. Coproduit catégorique
3. Catégories monoïdales
4. Semi-groupes et monoïdes internes
5. Adjonction de l'unité

Sommaire de la présentation

1 Introduction

2 Coproduit catégorique

3 Catégories monoïdales

4 Semi-groupes et monoïdes internes

5 Adjonction de l'unité

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m,x)(n,y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1,0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1,0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z,x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flêches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flèches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flèches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flèches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flèches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flêches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flêches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flèches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flêches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flêches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flêches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flêches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

1. Soit S un semigroupe, $1 \notin S$, alors $S \sqcup \{1\}$ devient un monoïde de façon évidente ;
2. Soit R un pseudo-anneau (*i.e.* un anneau sans nécessairement d'unité ; on dira simplement « anneau »), alors $\mathbb{Z} \times R$ avec la multiplication $(m, x)(n, y) = (mn, xy + nx + my)$ est un anneau unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
3. Plus généralement, soit R un anneau unitaire commutatif, et A une R-algèbre (sans nécessairement d'unité). Alors $R \times A$ devient une R-algèbre unitaire avec $(1, 0)$ comme unité ;
4. Soit B une algèbre de Banach complexe, sans nécessairement d'unité, alors $\mathbb{C} \times B$ est une algèbre de Banach unitaire (avec $\|(z, x)\| = |z| + \|x\|$) ;
5. Soit A une C^*-algèbre...
6. Soit S une semi-catégorie (*i.e.* une catégorie sans nécessairement les flêches identiques). On peut lui adjoindre des identités pour chaque objet afin qu'elle devienne une catégorie.

Objectif

Nous allons voir que toutes ces différentes sortes d'adjonctions d'unité proviennent d'un même procédé de construction général : il s'agit de l'existence d'un adjoint à gauche pour le morphisme d'oubli de l'unité.

Objectif

Nous allons voir que toutes ces différentes sortes d'adjonctions d'unité proviennent d'un même procédé de construction général : il s'agit de l'existence d'un adjoint à gauche pour le morphisme d'oubli de l'unité.

Ingrédients de base

Il y a trois ingrédients de base qui nous permettent d'aboutir à la construction recherchée :

1. Coproduit (ou somme disjointe) ;
2. Catégorie monoïdale (ou catégorie avec produit tensoriel) ;
3. Semi-groupes et monoïdes internes à une catégorie monoïdale.

Ingrédients de base

Il y a trois ingrédients de base qui nous permettent d'aboutir à la construction recherchée :

1. Coproduit (ou somme disjointe) ;
2. Catégorie monoïdale (ou catégorie avec produit tensoriel) ;
3. Semi-groupes et monoïdes internes à une catégorie monoïdale.

Ingrédients de base

Il y a trois ingrédients de base qui nous permettent d'aboutir à la construction recherchée :

1. Coproduit (ou somme disjointe) ;
2. Catégorie monoïdale (ou catégorie avec produit tensoriel) ;
3. Semi-groupes et monoïdes internes à une catégorie monoïdale.

Ingrédients de base

Il y a trois ingrédients de base qui nous permettent d'aboutir à la construction recherchée :

1. Coproduit (ou somme disjointe) ;
2. Catégorie monoïdale (ou catégorie avec produit tensoriel) ;
3. Semi-groupes et monoïdes internes à une catégorie monoïdale.

Ingrédients de base

Il y a trois ingrédients de base qui nous permettent d'aboutir à la construction recherchée :

1. Coproduit (ou somme disjointe) ;
2. Catégorie monoïdale (ou catégorie avec produit tensoriel) ;
3. Semi-groupes et monoïdes internes à une catégorie monoïdale.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et A, B deux objets de cette catégorie. Le coproduit $A + B$ est un objet de C avec deux flêches $q_A : A \rightarrow A + B$, $q_B : B \rightarrow A + B$, appelées *injections naturelles*, tels que quelles que soient les flêches $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$, il existe une unique flêche $h : A + B \rightarrow C$ telle que $h \circ q_A = f$, $h \circ q_B = g$. L'application h est parfois notée (f, g).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et A, B deux objets de cette catégorie. Le coproduit $A + B$ est un objet de C avec deux flêches $q_A : A \longrightarrow A + B$, $q_B : B \longrightarrow A + B$, appelées *injections naturelles*, tels que quelles que soient les flêches $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$, il existe une unique flêche $h : A + B \longrightarrow C$ telle que $h \circ q_A = f$, $h \circ q_B = g$. L'application h est parfois notée (f, g).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et A, B deux objets de cette catégorie. Le coproduit $A + B$ est un objet de C avec deux flêches $q_A : A \longrightarrow A + B$, $q_B : B \longrightarrow A + B$, appelées *injections naturelles*, tels que quelles que soient les flêches $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$, il existe une unique flêche $h : A + B \longrightarrow C$ telle que $h \circ q_A = f$, $h \circ q_B = g$. L'application h est parfois notée (f, g).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et A, B deux objets de cette catégorie. Le coproduit $A + B$ est un objet de C avec deux flêches $q_A : A \longrightarrow A + B$, $q_B : B \longrightarrow A + B$, appelées *injections naturelles*, tels que quelles que soient les flêches $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$, il existe une unique flêche $h : A + B \longrightarrow C$ telle que $h \circ q_A = f$, $h \circ q_B = g$. L'application h est parfois notée (f, g).

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie $\mathcal{C}$) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flèches (f, g), $f : A_1 \to A_2$, $g : B_1 \to B_2$ en la flèche $f + g : A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie $\mathcal{C}$) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flèches (f, g), $f \colon A_1 \to A_2$, $g \colon B_1 \to B_2$ en la flèche $f + g \colon A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie $\mathcal{C}$) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flèches (f, g), $f : A_1 \to A_2$, $g : B_1 \to B_2$ en la flèche $f + g : A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A+(B+C) \cong (A+B)+C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A+B$, et un couple de flèches (f, g), $f\colon A_1 \to A_2$, $g\colon B_1 \to B_2$ en la flèche $f+g\colon A_1+B_1 \to B_1+B_2$ définie par $(f+g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f+g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i+A \cong A \cong A+i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flèches (f, g), $f \colon A_1 \to A_2$, $g \colon B_1 \to B_2$ en la flèche $f + g \colon A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie $\mathcal{C}$) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flèches (f, g), $f \colon A_1 \to A_2$, $g \colon B_1 \to B_2$ en la flèche $f + g \colon A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flèches (f, g), $f \colon A_1 \to A_2$, $g \colon B_1 \to B_2$ en la flèche $f + g \colon A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie $\mathcal{C}$) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flèches $(f, g), f \colon A_1 \to A_2, g \colon B_1 \to B_2$ en la flèche $f + g \colon A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A+(B+C) \cong (A+B)+C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A,B) en $A+B$, et un couple de flêches (f,g), $f : A_1 \to A_2$, $g : B_1 \to B_2$ en la flêche $f+g : A_1+B_1 \to B_1+B_2$ définie par $(f+g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f+g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i+A \cong A \cong A+i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flêches (f, g), $f \colon A_1 \to A_2$, $g \colon B_1 \to B_2$ en la flêche $f + g \colon A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flêches (f, g), $f \colon A_1 \to A_2$, $g \colon B_1 \to B_2$ en la flêche $f + g \colon A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flêches $(f, g), f \colon A_1 \to A_2, g \colon B_1 \to B_2$ en la flêche $f + g \colon A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flêches $(f, g), f : A_1 \to A_2, g : B_1 \to B_2$ en la flêche $f + g : A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Quelques propriétés

1. Comme toute construction universelle, un coproduit est unique à un isomorphisme (de la catégorie C) près. Par abus, on dit « le coproduit » ;
2. Le coproduit est « associatif » au sens où $A + (B + C) \cong (A + B) + C$ (isomorphisme naturel). L'associativité peut être appliquée sur des « mots » bien parenthésés de plus de trois objets ;
3. Le coproduit est un bifoncteur $+ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Il transforme un couple d'objets (A, B) en $A + B$, et un couple de flêches $(f, g), f : A_1 \to A_2, g : B_1 \to B_2$ en la flêche $f + g : A_1 + B_1 \to B_1 + B_2$ définie par $(f + g) \circ q_{A_1} = q_{A_2} \circ f$, $(f + g) \circ q_{B_1} = q_{B_2} \circ g$;
4. Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet initial i, alors i joue le rôle d'un élément neutre pour $+$, *c'est-à-dire*, $i + A \cong A \cong A + i$ (isomorphismes naturels) ;
5. Si une catégorie admet tous les coproduits finis, alors le coproduit à zéro objet est un objet initial.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si C est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à C est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans C).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles, la somme disjointe est le coproduit ;
2. Dans la catégorie des ensembles partiellement ordonnés, la somme cardinale est le coproduit ;
3. Dans la catégorie des groupes abéliens, des R-modules, des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, le coproduit est la somme directe ;
4. Dans la catégorie des $\mathbb{K}$-cogèbres, c'est aussi la somme directe ;
5. Dans la catégorie des anneaux commutatifs, c'est le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$;
6. Dans la catégorie des R-algèbres commutatives, c'est le produit tensoriel $\otimes_R$ sur R ;
7. Dans la catégorie des groupes, des monoïdes, des anneaux, des R-algèbres, c'est le produit libre (ou somme monoïdale).
8. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produit, alors la catégorie opposée à $\mathcal{C}$ est une catégorie avec coproduit (le coproduit est alors le produit dans $\mathcal{C}$).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
    1. $\alpha : A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
    2. $\lambda = \lambda_A : I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
    3. $\rho = \rho_A : A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

    soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
   1. $\alpha : A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
   2. $\lambda = \lambda_A : I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
   3. $\rho = \rho_A : A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

   soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
   1. $\alpha \colon A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
   2. $\lambda = \lambda_A \colon I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
   3. $\rho = \rho_A \colon A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

   soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
   1. $\alpha \colon A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
   2. $\lambda = \lambda_A \colon I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
   3. $\rho = \rho_A \colon A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

   soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
    1. $\alpha\colon A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
    2. $\lambda = \lambda_A\colon I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
    3. $\rho = \rho_A\colon A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

    soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
   1. $\alpha \colon A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
   2. $\lambda = \lambda_A \colon I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
   3. $\rho = \rho_A \colon A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

   soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
   1. $\alpha \colon A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
   2. $\lambda = \lambda_A \colon I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
   3. $\rho = \rho_A \colon A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

   soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
    1. $\alpha \colon A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
    2. $\lambda = \lambda_A \colon I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
    3. $\rho = \rho_A \colon A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Une catégorie monoïdale est la donnée de $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ où

1. $\mathcal{C}$ est une catégorie ;
2. $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est un bifoncteur ;
3. I est un objet de $\mathcal{C}$;
4. α, λ, ρ sont des isomorphismes (naturels) de la catégorie $\mathcal{C}$ tels que
   1. $\alpha \colon A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$ (associativité) ;
   2. $\lambda = \lambda_A \colon I \otimes A \cong A$ (unité à gauche) ;
   3. $\rho = \rho_A \colon A \otimes I \cong A$ (unité à droite)

   soumis à des axiomes (pentagone et triangle).

Exemples

1. La catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$;
2. Toute catégorie avec les produits (resp. coproduits) finis est une catégorie monoïdale avec le produit (resp. coproduit) comme tenseur et un objet terminal (resp. initial) comme unité ;
3. La catégorie des groupes abéliens (ou des $\mathbb{Z}$-modules) avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$;
4. La catégorie des R-modules (resp. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) avec $\otimes_R$ (resp. $\otimes_{\mathbb{K}}$), et R (resp. $\mathbb{K}$) ;
5. La catégorie opposée à une catégorie monoïdale ;
6. La catégorie des multi-graphes (orientés) de sommets $\mathcal{O}$ avec $\times_{\mathcal{O}}$ (produit fibré sur $\mathcal{O}$) et $\mathcal{O}$;
7. La catégorie de tous les endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale avec la composition des foncteurs pour tenseur, et le foncteur identique comme unité.

Exemples

1. La catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$;
2. Toute catégorie avec les produits (resp. coproduits) finis est une catégorie monoïdale avec le produit (resp. coproduit) comme tenseur et un objet terminal (resp. initial) comme unité ;
3. La catégorie des groupes abéliens (ou des $\mathbb{Z}$-modules) avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$;
4. La catégorie des R-modules (resp. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) avec $\otimes_R$ (resp. $\otimes_{\mathbb{K}}$), et R (resp. $\mathbb{K}$) ;
5. La catégorie opposée à une catégorie monoïdale ;
6. La catégorie des multi-graphes (orientés) de sommets $\mathcal{O}$ avec $\times_{\mathcal{O}}$ (produit fibré sur $\mathcal{O}$) et $\mathcal{O}$;
7. La catégorie de tous les endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale avec la composition des foncteurs pour tenseur, et le foncteur identique comme unité.

Exemples

1. La catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$;
2. Toute catégorie avec les produits (resp. coproduits) finis est une catégorie monoïdale avec le produit (resp. coproduit) comme tenseur et un objet terminal (resp. initial) comme unité ;
3. La catégorie des groupes abéliens (ou des $\mathbb{Z}$-modules) avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$;
4. La catégorie des R-modules (resp. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) avec $\otimes_R$ (resp. $\otimes_{\mathbb{K}}$), et R (resp. $\mathbb{K}$) ;
5. La catégorie opposée à une catégorie monoïdale ;
6. La catégorie des multi-graphes (orientés) de sommets $\mathcal{O}$ avec $\times_{\mathcal{O}}$ (produit fibré sur $\mathcal{O}$) et $\mathcal{O}$;
7. La catégorie de tous les endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale avec la composition des foncteurs pour tenseur, et le foncteur identique comme unité.

Exemples

1. La catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$;
2. Toute catégorie avec les produits (resp. coproduits) finis est une catégorie monoïdale avec le produit (resp. coproduit) comme tenseur et un objet terminal (resp. initial) comme unité ;
3. La catégorie des groupes abéliens (ou des $\mathbb{Z}$-modules) avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$;
4. La catégorie des R-modules (resp. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) avec $\otimes_R$ (resp. $\otimes_{\mathbb{K}}$), et R (resp. $\mathbb{K}$) ;
5. La catégorie opposée à une catégorie monoïdale ;
6. La catégorie des multi-graphes (orientés) de sommets $\mathcal{O}$ avec $\times_{\mathcal{O}}$ (produit fibré sur $\mathcal{O}$) et $\mathcal{O}$;
7. La catégorie de tous les endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale avec la composition des foncteurs pour tenseur, et le foncteur identique comme unité.

Exemples

1. La catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$;
2. Toute catégorie avec les produits (resp. coproduits) finis est une catégorie monoïdale avec le produit (resp. coproduit) comme tenseur et un objet terminal (resp. initial) comme unité ;
3. La catégorie des groupes abéliens (ou des $\mathbb{Z}$-modules) avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$;
4. La catégorie des R-modules (resp. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) avec $\otimes_R$ (resp. $\otimes_{\mathbb{K}}$), et R (resp. $\mathbb{K}$) ;
5. La catégorie opposée à une catégorie monoïdale ;
6. La catégorie des multi-graphes (orientés) de sommets $\mathcal{O}$ avec $\times_{\mathcal{O}}$ (produit fibré sur $\mathcal{O}$) et $\mathcal{O}$;
7. La catégorie de tous les endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale avec la composition des foncteurs pour tenseur, et le foncteur identique comme unité.

Exemples

1. La catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$;
2. Toute catégorie avec les produits (resp. coproduits) finis est une catégorie monoïdale avec le produit (resp. coproduit) comme tenseur et un objet terminal (resp. initial) comme unité ;
3. La catégorie des groupes abéliens (ou des $\mathbb{Z}$-modules) avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$;
4. La catégorie des R-modules (resp. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) avec $\otimes_R$ (resp. $\otimes_{\mathbb{K}}$), et R (resp. $\mathbb{K}$) ;
5. La catégorie opposée à une catégorie monoïdale ;
6. La catégorie des multi-graphes (orientés) de sommets $\mathcal{O}$ avec $\times_{\mathcal{O}}$ (produit fibré sur $\mathcal{O}$) et $\mathcal{O}$;
7. La catégorie de tous les endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale avec la composition des foncteurs pour tenseur, et le foncteur identique comme unité.

Exemples

1. La catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$;
2. Toute catégorie avec les produits (resp. coproduits) finis est une catégorie monoïdale avec le produit (resp. coproduit) comme tenseur et un objet terminal (resp. initial) comme unité ;
3. La catégorie des groupes abéliens (ou des $\mathbb{Z}$-modules) avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$;
4. La catégorie des R-modules (resp. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) avec $\otimes_R$ (resp. $\otimes_{\mathbb{K}}$), et R (resp. $\mathbb{K}$) ;
5. La catégorie opposée à une catégorie monoïdale ;
6. La catégorie des multi-graphes (orientés) de sommets $\mathcal{O}$ avec $\times_{\mathcal{O}}$ (produit fibré sur $\mathcal{O}$) et $\mathcal{O}$;
7. La catégorie de tous les endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale avec la composition des foncteurs pour tenseur, et le foncteur identique comme unité.

Exemples

1. La catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$;
2. Toute catégorie avec les produits (resp. coproduits) finis est une catégorie monoïdale avec le produit (resp. coproduit) comme tenseur et un objet terminal (resp. initial) comme unité ;
3. La catégorie des groupes abéliens (ou des $\mathbb{Z}$-modules) avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$;
4. La catégorie des R-modules (resp. $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) avec $\otimes_R$ (resp. $\otimes_{\mathbb{K}}$), et R (resp. $\mathbb{K}$) ;
5. La catégorie opposée à une catégorie monoïdale ;
6. La catégorie des multi-graphes (orientés) de sommets $\mathcal{O}$ avec $\times_{\mathcal{O}}$ (produit fibré sur $\mathcal{O}$) et $\mathcal{O}$;
7. La catégorie de tous les endofoncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale avec la composition des foncteurs pour tenseur, et le foncteur identique comme unité.

Semi-groupe interne - Définition

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Soit S un objet de M avec une flêche $\mu \colon S \otimes S \rightarrow S$ (de la catégorie $\mathcal{C}$). (S, μ) est un semi-groupe interne à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\mu \circ (\mu \otimes \mathsf{id}_S) = \mu \circ (\mathsf{id}_S \otimes \mu)$. Cela signifie que μ est associatif. Les semi-groupes internes forment une catégorie $\mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ avec comme morphismes les flêches ϕ de $\mathcal{C}$ entre deux semi-groupes S_1, S_2 telles que $\mu_2 \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu_1$.

Semi-groupe interne - Définition

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Soit S un objet de M avec une flêche $\mu \colon S \otimes S \to S$ (de la catégorie $\mathcal{C}$). (S, μ) est un semi-groupe interne à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_S) = \mu \circ (\mathrm{id}_S \otimes \mu)$. Cela signifie que μ est associatif. Les semi-groupes internes forment une catégorie $\mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ avec comme morphismes les flêches ϕ de $\mathcal{C}$ entre deux semi-groupes S_1, S_2 telles que $\mu_2 \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu_1$.

Semi-groupe interne - Définition

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Soit S un objet de M avec une flèche $\mu \colon S \otimes S \rightarrow S$ (de la catégorie $\mathcal{C}$). (S, μ) est un semi-groupe interne à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\mu \circ (\mu \otimes \mathsf{id}_S) = \mu \circ (\mathsf{id}_S \otimes \mu)$. Cela signifie que μ est associatif. Les semi-groupes internes forment une catégorie $\mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ avec comme morphismes les flêches ϕ de $\mathcal{C}$ entre deux semi-groupes S_1, S_2 telles que $\mu_2 \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu_1$.

Semi-groupe interne - Définition

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Soit S un objet de M avec une flêche $\mu\colon S \otimes S \to S$ (de la catégorie $\mathcal{C}$). (S, μ) est un semi-groupe interne à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\mu \circ (\mu \otimes \mathsf{id}_S) = \mu \circ (\mathsf{id}_S \otimes \mu)$. Cela signifie que μ est associatif. Les semi-groupes internes forment une catégorie $\mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ avec comme morphismes les flêches ϕ de $\mathcal{C}$ entre deux semi-groupes S_1, S_2 telles que $\mu_2 \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu_1$.

Semi-groupe interne - Définition

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Soit S un objet de M avec une flêche $\mu \colon S \otimes S \to S$ (de la catégorie $\mathcal{C}$). (S, μ) est un semi-groupe interne à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\mu \circ (\mu \otimes \mathsf{id}_S) = \mu \circ (\mathsf{id}_S \otimes \mu)$. Cela signifie que μ est associatif. Les semi-groupes internes forment une catégorie $\mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ avec comme morphismes les flêches ϕ de $\mathcal{C}$ entre deux semi-groupes S_1, S_2 telles que $\mu_2 \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu_1$.

Semi-groupe interne - Définition

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Soit S un objet de M avec une flêche $\mu \colon S \otimes S \to S$ (de la catégorie $\mathcal{C}$). (S, μ) est un semi-groupe interne à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\mu \circ (\mu \otimes \mathsf{id}_S) = \mu \circ (\mathsf{id}_S \otimes \mu)$. Cela signifie que μ est associatif. Les semi-groupes internes forment une catégorie $\mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ avec comme morphismes les flêches ϕ de $\mathcal{C}$ entre deux semi-groupes S_1, S_2 telles que $\mu_2 \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu_1$.

Semi-groupe interne - Définition

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale. Soit S un objet de M avec une flêche $\mu\colon S \otimes S \to S$ (de la catégorie $\mathcal{C}$). (S, μ) est un semi-groupe interne à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, $\mu \circ (\mu \otimes \mathsf{id}_S) = \mu \circ (\mathsf{id}_S \otimes \mu)$. Cela signifie que μ est associatif. Les semi-groupes internes forment une catégorie $\mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ avec comme morphismes les flêches ϕ de $\mathcal{C}$ entre deux semi-groupes S_1, S_2 telles que $\mu_2 \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ \mu_1$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flèche $\eta \colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flèche $\phi \colon M_1 \longrightarrow M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2),et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flêche $\eta\colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flêche $\phi\colon M_1 \to M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2),et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U}\colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flèche $\eta \colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flèche $\phi \colon M_1 \to M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2),et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flêche $\eta \colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flêche $\phi \colon M_1 \longrightarrow M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2),et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flèche $\eta \colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flèche $\phi \colon M_1 \longrightarrow M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2),et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flèche $\eta \colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flèche $\phi \colon M_1 \longrightarrow M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2),et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U} : \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flèche $\eta \colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flèche $\phi \colon M_1 \longrightarrow M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2), et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flêche $\eta \colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flêche $\phi \colon M_1 \longrightarrow M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2),et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Monoïde interne - Définition

Un monoïde interne à $\mathcal{C}$, (M, μ, η), est un semi-groupe interne (M, μ) avec une flêche $\eta \colon I \longrightarrow M$ telle que

1. $\mu \circ (\eta \otimes \mathsf{id}_M) = \lambda_M$ (η est l'unité à gauche) ;
2. $\mu \circ (\mathsf{id}_M \otimes \eta) = \rho_M$ (η est l'unité à droite).

Les monoïdes internes forment une catégorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{C})$, un morphisme est alors une flêche $\phi \colon M_1 \longrightarrow M_2$ telle que ϕ est un morphisme de semi-groupes de (M_1, μ_1) dans (M_2, μ_2),et $\phi \circ \eta_1 = \eta_2$ (respect de l'unité). Remarquons immédiatement que l'on a un foncteur d'oubli évident $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ tel que $\mathcal{U}(M, \mu, \eta) = (M, \mu)$.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flèche identique) comme unité.

Exemples

1. Dans la catégorie des ensembles avec $\times$ et $\{*\}$, les semi-groupes et monoïdes internes sont les semi-groupes et monoïdes usuels ;
2. Dans la catégorie des espaces topologiques (resp. posets) avec la topologie produit (resp. le produit cardinal), les semi-groupes et monoïdes internes sont des semi-groupes et monoïdes topologiques (resp. partiellement ordonnés) ;
3. Un anneau (resp. anneau unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des groupes abéliens (avec $\otimes_{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Z}$) ;
4. Une R-algèbre (resp. une R-algèbre unitaire) est un semi-groupe (resp. monoïde) interne à la catégorie des R-modules (avec $\otimes_R$ et R) ;
5. Une $\mathbb{K}$-cogèbre est un monoïde dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ;
6. Une (petite) catégorie est un monoïde interne dans la catégorie des multi-graphes sur $\mathcal{O}$ (avec le produit fibré) ;
7. Une monade sur $\mathcal{C}$ est un monoïde interne à la catégorie des endofoncteurs sur la catégorie $\mathcal{C}$;
8. Une (petite) catégorie monoïdale est un monoïde interne à la catégorie Cat (de toutes les petites catégories) avec $\times$ comme tenseur, et la catégorie 1 (un objet, une flêche identique) comme unité.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} : \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j : S \to \mathcal{UA}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi : S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} : \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} : \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} : \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j : S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi : S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} : \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \rightarrow \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \rightarrow \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \rightarrow M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{UA}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Théorème

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ une catégorie monoïdale qui a tous ses coproduits finis, telle que $A \otimes (B + C) \cong (A + B) \otimes (A + C)$ et $(A + B) \otimes C \cong (A \otimes C) + (B \otimes C)$. Alors le foncteur d'oubli $\mathcal{U} \colon \mathsf{Mon}(\mathcal{C}) \to \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C})$ admet un adjoint à gauche, *i.e.* il existe un foncteur $\mathcal{A} \colon \mathsf{SemGrp}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Mon}(\mathcal{C})$ qui vérifie la propriété universelle suivante : quel que soit le semi-groupe interne S, il existe une morphisme de semi-groupes internes $j \colon S \to \mathcal{U}\mathcal{A}S$ tel que quel que soit le monoïde interne M, et un morphisme de semi-groupes internes $\phi \colon S \to \mathcal{U}M$, il existe un unique morphisme de monoïdes internes $\overline{\phi} \colon \mathcal{A}S \to M$ tel que $\overline{\phi} \circ j = \phi$.

$\mathcal{A}S$ est appelé le monoïde interne libre sur S ; on dit que l'on a obtenu $\mathcal{A}S$ à partir de S par adjonction d'une unité. Attention ! En théorie des catégories, on parle d'adjonction pour nommer un couple de foncteurs adjoints l'un de l'autre ! De plus, l'application j s'appelle coünité de l'adjonction. Les termes « adjonction », « coproduit » et « coünité » ont des significations bien différentes selon qu'ils sont utilisés dans le cadre de la théorie des catégories, ou en algèbre.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi \colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flèches $q_S \circ \mu \colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S \colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S \colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I \colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' : (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta \colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} \colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi \colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flêches $q_S \circ \mu \colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S \colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S \colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I \colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' \colon (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta \colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} \colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 \colon M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi \colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flèches $q_S \circ \mu \colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S \colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S \colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I \colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' \colon (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta \colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} \colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi \colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flèches $q_S \circ \mu \colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S \colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S \colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I \colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' : (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta \colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} \colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi : M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flèches $q_S \circ \mu : S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S : S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S : I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I : I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' : (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta : I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} : S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi \colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flêches $q_S \circ \mu \colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S \colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S \colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I \colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' : (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta \colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} \colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi\colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flêches $q_S \circ \mu\colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S\colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S\colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I\colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1'\colon (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta\colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A}\colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi\colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flèches $q_S \circ \mu\colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S\colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S\colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I\colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' : (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta\colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A}\colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi \colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flèches $q_S \circ \mu \colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S \colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S \colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I \colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' \colon (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta \colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} \colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi \colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flêches $q_S \circ \mu \colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S \colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S \colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I \colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' : (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta \colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} \colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \longrightarrow M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi : M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flêches $q_S \circ \mu : S \otimes S \longrightarrow S + I$, $q_S \circ \rho_S : S \otimes I \longrightarrow S + I$, $q_S \circ \lambda_S : I \otimes S \longrightarrow S + I$, et $q_I \circ \lambda_I : I \otimes I \longrightarrow S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' : (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \longrightarrow S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta : I \longrightarrow S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} : S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Idée de la démonstration

Partant d'un semi-groupe interne (S, μ) dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, on pose $M := S + I$, on définit $\mu_1 : M \otimes M \to M$, en utilisant l'isomorphisme $\Phi \colon M \otimes M \cong (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I)$, les flêches $q_S \circ \mu \colon S \otimes S \to S + I$, $q_S \circ \rho_S \colon S \otimes I \to S + I$, $q_S \circ \lambda_S \colon I \otimes S \to S + I$, et $q_I \circ \lambda_I \colon I \otimes I \to S + I$, et le coproduit $+$: soit $\mu_1' \colon (S \otimes S + S \otimes I) + (I \otimes S + I \otimes I) \to S + I$ avec $\mu_1' = (q_S \circ (\mu, \rho_S), \lambda_S + \lambda_I)$, alors $\mu_1 = \mu_1' \circ \Phi$. On définit également $\eta \colon I \to S + I$ par q_I. Alors après quelques (longues...) vérifications, on montre que (M, μ_1, η) est un monoïde interne, et $\mathcal{A} \colon S \mapsto M$ est un foncteur vérifiant la propriété universelle du théorème.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' : S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 : (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \not\in S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;

2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' : (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi : (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = \mu_1'(\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x + 0) \otimes (0 + 1)) = x + 0 = \mu_1((0 + 1) \otimes (x + 0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \not\in S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \not\in S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \not\in S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \not\in S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;

2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x, y), 1) = xy$, $\mu_1'((x, *), 2) = x$, $\mu_1'((*, x), 3) = x$, et $\mu_1'((*, *), 4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x, 1), (y, 1)) = \mu_1'((x, y), 1) = xy$, $\mu_1((x, 1), (*, 2)) = \mu_1'((x, *), 2) = x$, $\mu_1((*, 2), (x, 1)) = \mu_1'((*, x), 3) = x$, et $\mu_1((*, 2), (*, 2)) = \mu_1'((*, *), 4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;

2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = \mu_1'(\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x + 0) \otimes (0 + 1)) = x + 0 = \mu_1((0 + 1) \otimes (x + 0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu'_1 \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu'_1((x,y),1) = xy$, $\mu'_1((x,*),2) = x$, $\mu'_1((*,x),3) = x$, et $\mu'_1((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu'_1((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu'_1((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu'_1((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu'_1((*,*),4) = *$. Clairement si $* \not\in S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;

2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu'_1 \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu'_1(x \otimes y) = xy$, $\mu'_1(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu'_1(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu'_1(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu'_1(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu'_1(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu'_1(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;

2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \longrightarrow S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \longrightarrow S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;

2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \longrightarrow A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;

2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \longrightarrow S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \longrightarrow S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \not\in S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \longrightarrow A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu'_1 \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu'_1((x,y),1) = xy$, $\mu'_1((x,*),2) = x$, $\mu'_1((*,x),3) = x$, et $\mu'_1((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu'_1((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu'_1((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu'_1((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu'_1((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu'_1 \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu'_1(x \otimes y) = xy$, $\mu'_1(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu'_1(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu'_1(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu'_1(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu'_1(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu'_1(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \longrightarrow S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x, y), 1) = xy$, $\mu_1'((x, *), 2) = x$, $\mu_1'((*, x), 3) = x$, et $\mu_1'((*, *), 4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \longrightarrow S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x, 1), (y, 1)) = \mu_1'((x, y), 1) = xy$, $\mu_1((x, 1), (*, 2)) = \mu_1'((x, *), 2) = x$, $\mu_1((*, 2), (x, 1)) = \mu_1'((*, x), 3) = x$, et $\mu_1((*, 2), (*, 2)) = \mu_1'((*, *), 4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \longrightarrow A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = \mu_1'(\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x + 0) \otimes (0 + 1)) = x + 0 = \mu_1((0 + 1) \otimes (x + 0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x, y), 1) = xy$, $\mu_1'((x, *), 2) = x$, $\mu_1'((*, x), 3) = x$, et $\mu_1'((*, *), 4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x, 1), (y, 1)) = \mu_1'((x, y), 1) = xy$, $\mu_1((x, 1), (*, 2)) = \mu_1'((x, *), 2) = x$, $\mu_1((*, 2), (x, 1)) = \mu_1'((*, x), 3) = x$, et $\mu_1((*, 2), (*, 2)) = \mu_1'((*, *), 4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = \mu_1'(\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x + 0) \otimes (0 + 1)) = x + 0 = \mu_1((0 + 1) \otimes (x + 0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x, y), 1) = xy$, $\mu_1'((x, *), 2) = x$, $\mu_1'((*, x), 3) = x$, et $\mu_1'((*, *), 4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x, 1), (y, 1)) = \mu_1'((x, y), 1) = xy$, $\mu_1((x, 1), (*, 2)) = \mu_1'((x, *), 2) = x$, $\mu_1((*, 2), (x, 1)) = \mu_1'((*, x), 3) = x$, et $\mu_1((*, 2), (*, 2)) = \mu_1'((*, *), 4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x + \alpha) \otimes (y + \beta)) = \mu_1'(\Phi((x + \alpha) \otimes (y + \beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x + 0) \otimes (0 + 1)) = x + 0 = \mu_1((0 + 1) \otimes (x + 0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \rightarrow S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \rightarrow S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \rightarrow A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) =$ $\mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' : S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \to S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 : (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \to S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' : (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \to A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi : (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Exemples

1. Soit S un semigroupe. Soit $M = S \sqcup \{*\}$. On définit $\mu_1' \colon S \times S \sqcup S \times \{*\} \sqcup \{*\} \times S \sqcup \{*\} \times \{*\} \longrightarrow S \sqcup \{*\}$ par $\mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1'((*,*),4) = *$. Enfin $\mu_1 \colon (S \sqcup \{*\}) \times (S \sqcup \{*\}) \longrightarrow S \sqcup \{*\}$ est donnée par $\mu_1((x,1),(y,1)) = \mu_1'((x,y),1) = xy$, $\mu_1((x,1),(*,2)) = \mu_1'((x,*),2) = x$, $\mu_1((*,2),(x,1)) = \mu_1'((*,x),3) = x$, et $\mu_1((*,2),(*,2)) = \mu_1'((*,*),4) = *$. Clairement si $* \notin S$, alors $S \cup \{*\}$ est une somme disjointe, et on retrouve la notion usuelle d'adjonction d'une unité à un semigroupe ;
2. Soit R un anneau commutatif unitaire, et A une R-algèbre. On définit $\mu_1' \colon (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R) \longrightarrow A \oplus R$ par $\mu_1'(x \otimes y) = xy$, $\mu_1'(x \otimes \alpha) = \alpha x$, $\mu_1'(\alpha \otimes x) = \alpha x$, et $\mu_1'(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$, de sorte que l'on a $\mu_1'(x \otimes y + z \otimes \alpha + \beta \otimes w + \gamma \otimes \epsilon) = (xy + \alpha z + \beta w) + \gamma\epsilon$. Par ailleurs, $\Phi \colon (A \oplus R) \otimes_R (A \oplus R) \cong (A \otimes_R A) \oplus (A \otimes_R R) \oplus (R \otimes_R A) \oplus (R \otimes_R R)$ est donnée par $\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = (x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta)$ de sorte que $\mu_1((x+\alpha) \otimes (y+\beta)) = \mu_1'(\Phi((x+\alpha) \otimes (y+\beta))) = \mu_1'(x \otimes y + x \otimes \beta + \alpha \otimes y + \alpha \otimes \beta) = (xy + \beta x + \alpha y) + \alpha\beta$. On a bien $\mu_1((x+0) \otimes (0+1)) = x + 0 = \mu_1((0+1) \otimes (x+0))$.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta \colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flèches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1 \colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon \colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta\colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flèches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1\colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon\colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta \colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flèches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1 \colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon \colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta \colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1 \colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon \colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta\colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1\colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon\colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta \colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1 \colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon \colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta \colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1 \colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon \colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta \colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1 \colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon \colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta\colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1\colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon\colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta\colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1\colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon\colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta\colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1\colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon\colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta\colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1\colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon\colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.

Coadjonction d'une coünité

Supposons que C soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\Delta\colon C \to C \otimes C$ un coproduit coassociatif, en d'autres termes, (C, Δ) est un semi-groupe dans la catégorie opposée à celle des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (un « co-semi-groupe »). L'adjonction d'une unité dans cette catégorie opposée correspond (par renversement des flêches et remplacement du coproduit par le produit) à $\Delta_1\colon C \oplus \mathbb{K} \to (C \oplus \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} (C \oplus \mathbb{K})$ donnée par $\Delta_1(x + \alpha) = \Delta(x) + 1 \otimes x + x \otimes 1 + \alpha(1 \otimes 1)$. On remarque que 1 est alors un élément de type groupe car $\Delta_1(1) = 1 \otimes 1$. La coünité est $\epsilon\colon C \oplus \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ donnée par $\epsilon(x + \alpha) = \alpha$ (projection sur le second facteur). Ainsi $\epsilon(x) = 0$ quel que soit $x \in C$, et $\epsilon(1) = 1$. On vérifie alors facilement que ϵ est bien une coünité. (C, Δ, ϵ) est un monoïde dans la catégorie opposée aux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, *i.e.*, un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : une cogèbre coassociative coünitaire.