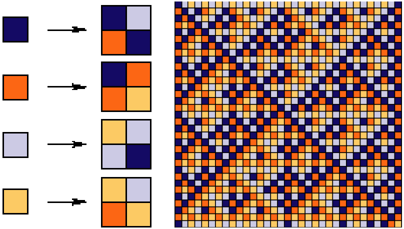
Substitutions et transcendance

V. Berthé
LIAFA-CNRS-Paris-France
berthe@liafa.jussieu.fr
http ://www.liafa.jussieu.fr/~berthe

Séminaire Calin - Octobre 2011

Substitutions

- Substitutions sur les mots et systèmes dynamiques symboliques
- Règles d'inflation/subdivision : pavages et ensemble de points



Un exemple de substitution sur les mots : la substitution de Fibonacci

Définition Une substitution est un morphisme de monoïde libre

Exemple

$$\sigma : 1 \mapsto 12,\ 2 \mapsto 1.$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ 12 \\ 121 \\ 12112 \\ 12112121 \end{array}$$

$\sigma^\infty(1)$ est appelé mot de Fibonacci

$$\sigma^\infty(1) = 121121211211212\cdots$$

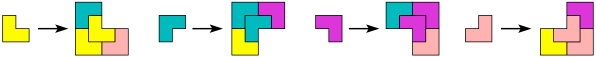
Substitutions et pavages

Principe On prend

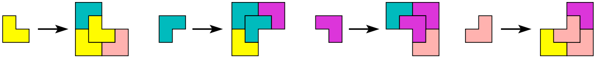
- un nombre fini de tuiles $\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$
- une transformation expansive Q (le facteur d'inflation)
- une règle permettant de découper chaque QT_i en copies des $T_1, T_2, \ldots, T_m$

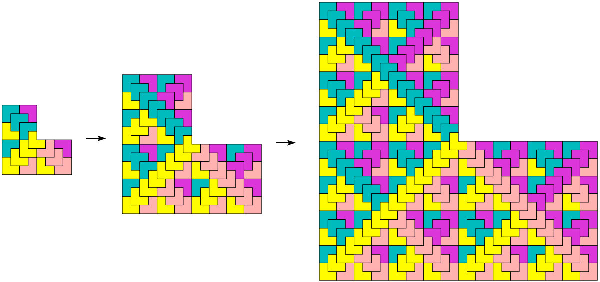
Il s'agit d'une méthode simple de production de pavages

Exemple



Le pavage de la chaise





- Tilings Encyclopedia http ://tilings.math.uni-bielefeld.de/ E. Harriss, D. Frettlöh
- A primer on substitution tilings of the Euclidean plane -N. Priebe Frank- Expo. Math. 26 (2008), no. 4, 295-326.

Suite automatique

Définition Image par une projection lettre-à-lettre d'une suite point fixe de substitution de longueur constante

Suite automatique

Définition Image par une projection lettre-à-lettre d'une suite point fixe de substitution de longueur constante

Suite de Morse

$\sigma^\infty(a)$ avec

$$\sigma(a) = ab,\ \sigma(b) = ba$$

$$u = abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaaba\ldots$$

k-automate

Un k-automate est un automate fini déterministe complet tel que

- on a un nombre fini d'états $\mathcal{S}$ dont un état initial i ;
- k applications de transition de $\mathcal{S}$ dans lui-même, étiquetées par des entiers entre 0 et $k-1$;
- un ensemble Y et une fontion de sortie φ de $\mathcal{S}$ dans Y

Suite k-automatique

C'est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrée par un k-automate

- On écrit n en base k

$$\sum_{\ell=0}^{L} n_\ell k^\ell$$

- On part de l'état initial i
- On rentre dans l'automate la suite de chiffres $n_0, n_1, \ldots, n_L$
- On se retrouve dans l'automate à l'état a_n

$$u_n := \varphi(a_n)$$

Suite k-automatique

C'est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrée par un k-automate

- On écrit n en base k

$$\sum_{\ell=0}^{L} n_\ell k^\ell$$

- On part de l'état initial i
- On rentre dans l'automate la suite de chiffres $n_0, n_1, \ldots, n_L$
- On se retrouve dans l'automate à l'état a_n

$$u_n := \varphi(a_n)$$

Rem Si une suite est automatique avec lecture des chiffres de droite à gauche, elle l'est aussi avec lecture des chiffres de gauche à droite

Suite k-automatique

C'est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendrée par un k-automate

- On écrit n en base k

$$\sum_{\ell=0}^{L} n_\ell k^\ell$$

- On part de l'état initial i
- On rentre dans l'automate la suite de chiffres $n_0, n_1, \ldots, n_L$
- On se retrouve dans l'automate à l'état a_n

$$u_n := \varphi(a_n)$$

Définition équivalente à

Image par une projection lettre-à-lettre d'une suite point fixe de substitution de longueur constante

Contruction de l'automate

Soit u image par une projection lettre-à-lettre d'une suite point fixe de la substitution σ de longueur constante

- états : alphabet
- fonction de sortie : la projection lettre-à-lettre
- état initial : u_0
- transitions : substitution

Contruction de l'automate

Soit u image par une projection lettre-à-lettre d'une suite point fixe de la substitution σ de longueur constante

- états : alphabet
- fonction de sortie : la projection lettre-à-lettre
- état initial : u_0
- transitions : substitution

Transitions $\sigma_i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ envoie la lettre a sur la $(i+1)$-ième lettre de $\sigma(a)$

$$\sigma(a) = \sigma_0(a) \cdots \sigma_{k-1}(a)$$

$$\sigma(u_n) = u_{kn} u_{kn+1} \ldots u_{kn+k-1} = \sigma_0(u_n) \cdots \sigma_{k-1}(u_n)$$

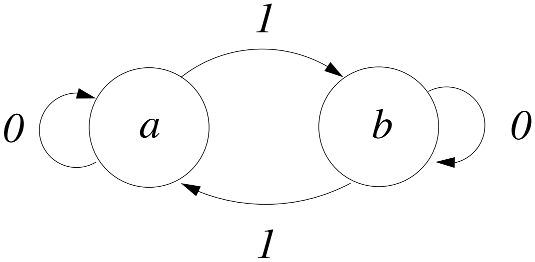
$$\sigma_i(u_n) = u_{kn+i}$$

Il y a une flèche de a vers b si b apparaît dans $\sigma(a)$

Contruction de l'automate

Soit u image par une projection lettre-à-lettre d'une suite point fixe de la substitution σ de longueur constante

- états : alphabet
- fonction de sortie : la projection lettre-à-lettre
- état initial : u_0
- transitions : substitution



$$\sigma(a) = ab,\ \sigma(b) = ba$$

Suite de Prouhet-Thue-Morse

$$\sigma(a) = ab,\ \sigma(b) = ba$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = \overline{u_n}$$

$$u = abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaaba\ldots$$

Suite de Prouhet-Thue-Morse

$$\sigma(a) = ab,\ \sigma(b) = ba$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = \overline{u_n}$$

$$u = abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaaba\ldots$$

$\mathbb{N}_a$ (resp. $\mathbb{N}_b$) est l'ensemble d'entiers n tels que la $(n+1)$-ième lettre de la suite de Morse est a (resp. b) :

$$\mathbb{N}_a = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, \ldots\},$$

$$\mathbb{N}_b = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, \ldots\}$$

Suite de Prouhet-Thue-Morse

$$\sigma(a) = ab, \ \sigma(b) = ba$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = \overline{u_n}$$

$$u = abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaaba\ldots$$

Soit

$$S_2(n) = \sum_{i \geq 0} n_i, \quad \text{si } n = \sum_{i \geq 0} n_i 2^i, \ n_i \in \{0, 1\}$$

$$\mathbb{N}_a = \{n \in \mathbb{N}, \quad S_2(n) \text{ est paire }\},$$

$$\mathbb{N}_b = \{n \in \mathbb{N}, \quad S_2(n) \text{ est impaire }\}$$

$$\mathbb{N}_a \ = \ \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, \ldots\},$$

$$\mathbb{N}_b \ = \ \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, \ldots\}$$

Suite de Prouhet-Thue-Morse

$$\sigma(a) = ab,\ \sigma(b) = ba$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = \overline{u_n}$$

$$u = abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaaba\ldots$$

$$\sigma(0) = 01,\ \sigma(1) = 10$$

$$u_n = S_2(n) \bmod 2$$

Que peut-on faire avec une suite automatique

Soit $(u_n)_n \in \{0, 1, \cdots, k\}$
On peut considérer

- le réel

$$\sum u_n k^{-n}$$

- la suite

$$\sum u_n X^{-n}$$

Algébricité

On considère le corps $\mathbb{F}_q((1/X))$ des séries formelles de Laurent à coefficients dans $\mathbb{F}_q$

$$u_{-d}X^d + \cdots + u_0 + u_1 X^{-1} + \cdots , \ u_i \in \mathbb{F}_q$$

Une série F est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$ s'il existe un polynôme non trivial P à coefficients dans $\mathbb{F}_q(X)$ tel que $P(F) = 0$

Algébricité et suite de Morse

On considère la suite de Morse $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$u_n = S_2(n) \bmod 2$$

$$u_0 = 0,\ u_{2n} = u_n,\ u_{2n+1} = 1 + u_n$$

Dans $\mathbb{F}_2[[X]]$, on a

$$(\sum_{n\geq 0} u_n X^n)^2 = \sum_{n\geq 0} u_n X^{2n}$$

Soit $F(X) = \sum_{n\geq 0} u_n X^n$
On a

$$\begin{aligned} F(X) = \textstyle\sum_{n\geq 0} u_n X^n \quad &= \textstyle\sum_{n\geq 0} u_{2n} X^{2n} + \sum u_{2n+1} X^{2n+1} \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0} u_n X^{2n} + \sum (1+u_n) X^{2n+1} \\ &= (\textstyle\sum_{n\geq 0} u_n X^n)^2 + X(\sum u_n X^n)^2 + \frac{X}{1+X^2} \\ &= F(X)^2(1+X) + \frac{X}{1+X^2}. \end{aligned}$$

La série $F(X)$ est donc algébrique sur $\mathbb{F}_2(X)$

$$(1+X)^3 F(X)^2 + F(X)(1+X)^2 + X = 0$$

Critère d'algébricité

Théorème[Christol, Kamae, Mendès France, and Rauzy]
Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{F}_q$. On a équivalence entre

- $\sum_{n\geq 0} u(n)X^n$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$
- la suite u est q-automatique
- la suite u est l'image par une projection lettre à lettre d'un point fixe de substitution de longueur constante q
- le q-noyau $N_q(u)$ de u est fini

$$N_q(u) = \{(u(q^k n + r))_{n\in\mathbb{N}};\ k \geq 0;\ 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

Thm [Allouche] La série Π de Carlitz

$$\Pi = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{X^{q^j} - X}{X^{q^{j+1}} - X})$$

est transcendante sur $\mathbb{F}_q(X)$
Soit

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{X^{q^j}}{X^{q^{j+1}}})$$

α est algébrique (considérer α^q)
Montrons que $\frac{\alpha}{\Pi}$ est transcendante
On a

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=1}^{+\infty}(1 - (\frac{1}{X})^{q^j - 1})$$

Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (v_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ des suites du q-noyau de v qui satisfont

- il existe $m(k)$ tel que pour $n < m(k)$, on ait $v_k(n) = 0$
- la suite $(m(k))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
- les suites v_k ne sont pas égales à la suite nulle pour une infinité de k

Alors l'ensemble $\{v_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ est infini

Soit $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\sum_{n\geq 0} v(n)X^{-n} = \frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=1}^{+\infty}(1-(\frac{1}{X})^{q^j-1})$$

Si

$$n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k(q^k-1) \text{ avec } \varepsilon_k = 0 \text{ ou}1, \varepsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand},$$

alors

$$v(n) = (-1)^{\sum_{k=1}^{+\infty}\varepsilon_k}, \quad \text{sinon } v(n) = 0.$$

Rmq Si

$$n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k(q^k-1) \text{ avec } \varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_k = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand},$$

alors une telle décomposition est unique
Soit $(v_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ suite du q-noyau

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_k(n) := v(q^k n + q^k - k)$$

Soit $(v_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ suite du q-noyau

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_k(n) := v(q^k n + q^k - k)$$

Si $n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k(q^k - 1)$ avec $\varepsilon_k = 0,\ 1,\ \varepsilon_k = 0$ pour k assez grand, alors $v(n) = (-1)^{\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k}$, sinon $v(n) = 0$

Soit $(v_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ suite du q-noyau

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_k(n) := v(q^k n + q^k - k)$$

Si $n = \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k(q^k - 1)$ avec $\varepsilon_k = 0,\ 1,\ \varepsilon_k = 0$ pour k assez grand, alors $v(n) = (-1)^{\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k}$, sinon $v(n) = 0$
Soit $k \geq 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_k(n) \neq 0$. Alors

$\exists\ (\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $\varepsilon_j = 0$ ou $1, \varepsilon_j = 0$ pour j assez grand, tel que

$$q^k n + q^k - k = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j(q^j - 1)$$

On pose $\sigma = \sum_{j\geq k} \varepsilon_j$

$$q^k n + q^k - k = \sum_{1\leq j\leq k-1} \varepsilon_j(q^j - 1) + \sum_{j\geq k} \varepsilon_j q^j - \sigma$$

On va montrer que si $n = \frac{q^k - q}{q-1}$, $v_k(n) \neq 0$ et si $n < \frac{q^k - q}{q-1}$ alors $v_k(n) = 0$
On aura montré que le q-noyau est infini

On va montrer que si $n = \frac{q^k - q}{q-1}$, $v_k(n) \neq 0$ et si $n < \frac{q^k-q}{q-1}$ alors $v_k(n) = 0$
On aura montré que le q-noyau est infini

On pose $\sigma = \sum_{j \geq k} \varepsilon_j$

$$q^k n + q^k - k = \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j (q^j - 1) + \sum_{j \geq k} \varepsilon_j q^j - \sigma$$

On a donc

$$\sigma \equiv \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j (q^j - 1) + k \mod q^k$$

Comme

$$2 \leq \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j (q^j - 1) + k < q^k,$$

alors

$$\sigma \geq \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j (q^j - 1) + k \geq k$$

On va montrer que si $n = \frac{q^k - q}{q-1}$, $v_k(n) \neq 0$ et si $n < \frac{q^k - q}{q-1}$ alors $v_k(n) = 0$

On aura montré que le q-noyau est infini

On pose $\sigma = \sum_{j \geq k} \varepsilon_j$

$$\sigma \geq \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j (q^j - 1) + k \geq k$$

$$q^k n + q^k - k = \sum_{1 \leq j \leq k-1} \varepsilon_j (q^j - 1) + \sum_{j \geq k} \varepsilon_j q^j - \sigma$$

Donc

$$q^k n + q^k - k \geq \sum_{j \geq k} \varepsilon_j (q^j - 1) \geq \sum_{j=k}^{k+\sigma-1} (q^j - 1) \geq \sum_{j=k}^{2k-1} (q^j - 1) = \frac{q^k - 1}{q - 1} q^k - k$$

Donc $v_k(n) \neq 0$ implique que $n \geq \frac{q^k - q}{q-1}$

Fonctions de Carlitz

En 1935 Carlitz a défini deux fonctions ψ and λ, analogues à l'exponentielle et au logarithme

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{q^k}}{F_k} \quad \text{pour tout } t \text{ dans } \mathbf{C},$$
$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{q^k}}{L_k} \quad \text{pour } t \text{ tel que } \deg t < \frac{q}{q-1},$$

$$\begin{aligned} \text{avec } [k] &= X^{q^k} - X, \\ F_k &= [k][k-1]^q \ldots [1]^{q^{k-1}} \text{ et } F_0 = 1, \\ L_k &= [k][k-1] \ldots [1] \text{ et } L_0 = 1. \end{aligned}$$

Convergence si et seulement si le degré tend vers $-\infty$

$$\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{F}_q[X], \; \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{F}_q(X), \; \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{F}_q((1/X))$$

$\mathbb{F}_q((1/X)$ est complet mais non algébriquement clos
Soit **C** la complétion d'ue clôture algébrique de **R**. Le corps **C** est encore algébriquement clos

La fonction Ψ de Carlitz

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{q^k}}{F_k} \quad \text{pour tout } t \text{ dans } \mathbf{C}$$

- ψ est $\mathbb{F}_q$-linéaire

$$\psi(t+u) = \psi(t) + \psi(u)$$

$$\psi(ct) = c\psi(t)$$

  pour t, u dans $\mathbf{C}$ et c dans $\mathbb{F}_q$
- $\forall t \in \mathbf{C},\ \forall E \in \mathbb{F}_q[X]),\ \psi(t + E\xi) = \psi(t),$

$$\text{avec } \xi = (X^q - X)^{1/(q-1)}\Pi \ \text{ et } \ \Pi = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{X^{q^j} - X}{X^{q^{j+1}} - X})$$

- Pour tout t dans $\mathbf{C}$, $\psi(t) = 0$ ssi $t = E\xi$, avec E in $\mathbb{F}_q[X]$
- Pour tout t dans $\mathbf{C}$, $\psi(t) = t\prod_{E\in\mathbb{F}_q[X],\ E\neq 0}(1 - \frac{t}{E\xi})$.
- Pour tout t dans $\mathbf{C}$

$$\psi(Xt) = X\psi(t) - \psi(t)^q$$

La fonction ζ de Carlitz

Carlitz a aussi introduit un analogue de la fonction zeta de Riemann

$$\zeta(m) = \sum_{G \in \mathbb{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^m\,, \quad m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$$

On a $\zeta(s)/\Pi^s \in \mathbb{F}_q(X)$, pour tout s multiple de $(q-1)$

C'est l'analogue du résultat d'Euler sur les valeurs paires de la fonction ζ de Riemann

$$\zeta(2n)/\pi^{2n} \in \mathbb{Q}$$

Thm [Yu] On a $\zeta(s)/\Pi^s$ transcendant , pour tout $s \not\equiv 0 (q-1)$ et $\zeta(s)$ transcendant pour tout $s \neq 0$

Et pour les réels ?

$$(u_n)_n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}} \rightsquigarrow \sum u_n k^{-n}$$

“Thm” [Loxton-Van der Poorten]
Si la suite (u_n) est q-automatique, alors $\sum u_n q^{-n}$ est soit rationnel, soit transcendant

Et pour les réels ?

$$(u_n)_n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}} \rightsquigarrow \sum u_n k^{-n}$$

Considérons les premiers chiffres du développement de $\sqrt{2}$ en base 10

$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731$

Les 10 chiffres allant de 0 à 9 apparaissent, de même que $13, 14, 16, 17, 18$

Et pour les réels ?

$$(u_n)_n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}} \rightsquigarrow \sum u_n k^{-n}$$

Fonction de complexité Soit $p(n, x)$ le nombre de facteurs de longueur n que l'on trouve dans le développement en base q du réel x

- $1 \leq p(n, x) \leq q^n$
- la complexité $p(n, x)$ d'un nombre rationnel est bornée

Et pour les réels ?

$$(u_n)_n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}} \rightsquigarrow \sum u_n k^{-n}$$

Une conjecture moins forte que celle de la normalité de $\sqrt{2}$ peut alors être énoncée comme suit : la complexité $p(n, \sqrt{2})$ satisfait $p(n, \sqrt{2}) = 10^n$ pour tout $n \geq 1$

Et pour les réels ?

$$(u_n)_n \in \{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}} \rightsquigarrow \sum u_n k^{-n}$$

Théorème [Adamczewski-bugeaud] La complexité $p(n, x)$ de tout nombre algébrique irrationnel x satisfait

$$\lim \frac{p(n, x)}{n} = +\infty$$

Corollaire
Si la suite (u_n) est q-automatique, alors $\sum u_n q^{-n}$ est soit rationnel, soit transcendant
On utilise le fait la complexité d'une suite automatique est linéaire

En d'autres termes

Si la série formelle $f(X) = \sum_{i \geq 1} x_i X^{-i}$ est algébrique sur le corps $\mathbb{F}_q(X)$, alors le nombre réel $x = \sum_{i \geq 1} x_i q^{-i}$ est soit rationnel, soit transcendant

Un peu de bibliographie

- Allouche-Shallit, Automatic sequences
- N. Pytheas Fogg, Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics, http ://www.liafa.jussieu.fr/~berthe/Fogg.html
- HDR de B. Adamczewski
- Preuves automatiques de transcendance des fonctions de Carlitz

  J.-P. Allouche, V. Berthé, D. Thakur, K. Kedlaya, A. Firicel

Substitutions

Une substitution sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est un morphisme du monoïde libre $\mathcal{A}^*$

Exemple :

$$\sigma(1) = 12,\ \sigma(2) = 13,\ \sigma(3) = 1.$$

$$\sigma^\infty(1) = 1213121121312121 3....$$

Sa matrice d'incidence M_σ est définie par :

$$M_\sigma = (|\sigma(j)|_i)_{(i,j)\in\mathcal{A}^2}\ ,$$

où $|\sigma(j)|_i$ est le nombre d'occurrences de la lettre i dans $\sigma(j)$.

$$\sum a_i p^i \rightsquigarrow \lim_{n\to+\infty} \sigma_1\sigma_2...\sigma_n(0) \rightsquigarrow \prod M_{\sigma_1}\cdots M_{\sigma_n}\vec{v}$$

Système dynamique substitutif

Soit σ une substitution primitive sur $\mathcal{A}$. Soit u engendré par σ. Soit S le décalage

$$S((u_n)_n) = (u_{n+1})_n$$

Le système dynamique symbolique engendré par σ est (X_σ, S) avec

$$X_\sigma := \overline{\{S^n(u);\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

Question Sous quelles conditions est-il possible de donner une représentation géométrique d'un système dynamique substitutif comme une translation sur un groupe compact abélien ?

$$\begin{tikzcd} X_u \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\rho"'] & X_u \arrow[d, "\rho"] \\ \mathbb{T}^d \arrow[r, "R_\alpha"'] & \mathbb{T}^d \end{tikzcd}$$

Example Dans le cas du mot de Fibonacci $\sigma : 1 \mapsto 12,\ \ 2 \mapsto 1$
(X_σ, S) est isomorphe à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, R_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}})$ où $R_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} : x \mapsto x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Dynamique arithmétique [N. Sidorov, A. Vershik]

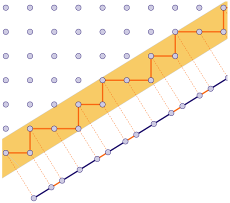
Il s'agit de donner des développements explicites de réels et de vecteurs qui ont un sens dynamique dans le but de produire des codages symboliques de systèmes dynamiques qui en préservent la structure arithmétique

- Systèmes de numération. Exemple : Beta-développements $\sum_{i\geq 1} b_i\beta^{-i}$, $T_\beta : x \mapsto \{\beta x\}$
- (X_σ, S) est isomorphe à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, R_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}})$
- Codages arithmétiques d'automorphismes du tore [Schmidt]
- Codages de translations sur le tore

Une représentation géométrique des systèmes substitutifs

Abélianisation Soit d le cardinal de $\mathcal{A}$

$$f : w \in \mathcal{A}^\star \mapsto (|w|_1, |w|_2, \cdots, |w|_d) \in \mathbb{N}^d$$



Une représentation géométrique des systèmes substitutifs

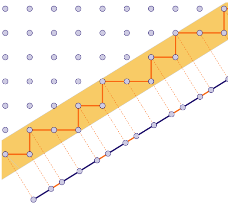
Abélianisation Soit d le cardinal de $\mathcal{A}$

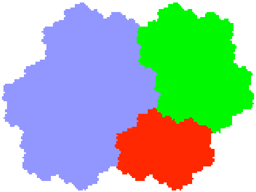
$$f: w \in \mathcal{A}^\star \mapsto (|w|_1, |w|_2, \cdots, |w|_d) \in \mathbb{N}^d$$

Soit u un mot infini engendré par σ. Soit π_c la projection sur l'hyperplan contractant de σ selon sa direction dilatante

Le fractal de Rauzy de σ est défini par

$$\mathcal{R}_\sigma := \overline{\{\pi_c \circ f(u_0 \cdots u_{n-1});\ n \in \mathbb{N}\}}$$





La substitution de Tribonacci [Rauzy'82]

$$\sigma : 1 \mapsto 12,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$$

$$\sigma^\infty(1) = 1213121121312121 3 \cdots$$

$$M_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est $X^3 - X^2 - X - 1$. Il admet une racine $\beta > 1$ (la racine dominante) et deux conjugués complexes α, $\overline{\alpha}$, avec $|\alpha| < 1$

β est un nombre de Pisot

Le fractal de Tribonacci

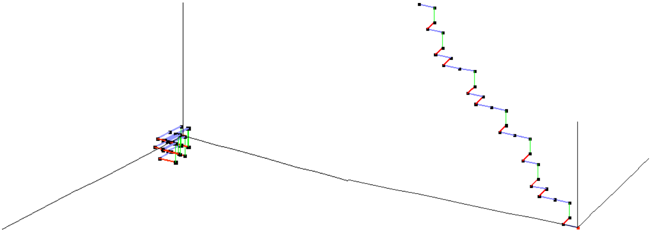
$$\sigma : 1 \mapsto 12,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 1$$

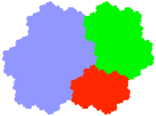
On représente $\sigma^\infty(1)$ comme une ligne brisée

$$f : \{1,2,3\}^* \to \mathbb{Z}^3,\ 1 \mapsto \vec{e}_1,\ 2 \mapsto \vec{e}_2,\ 3 \mapsto \vec{e}_3,$$

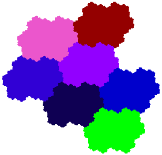
$$f(w) = |w|_1 \vec{e}_1 + |w|_2 \vec{e}_2 + |w|_3 \vec{e}_3,$$

projetée selon les espaces propres de M_σ

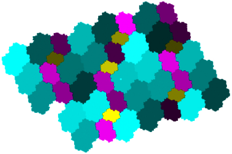




Le fractal de Tribonacci engendre



un pavage périodique



et un pavage autosimilaire/apériodique

Les ensembles de translation sont des des ensemble de Delone
(relativement denses et uniformément discrets=quasi-réseaux)
C'est une conséquence de l'hypothèse Pisot

Comment atteindre des paramètres non algébriques ?

Nous avons considéré l'itération d'une seule règle substitutive
Nous voulons composer un nombre fini de règles (produits infinis de de matrices)

- Fractions continues (Jacobi-Perron, Brun, LLL....)
- Conjecture S-adique caractérisation/engendrement de mots infinis de complexité au plus linéaire

Développements S-adiques

Soit X un système dynamique symbolique. La fonction de complexité $p_X(n)$ compte le nombre de facteurs de longueur n du langage de X.

Théorème [Cassaigne] Un système dynamique symbolique X est de complexité au plus linéaire si et seulement si la différence première de la fonction de complexité $p_X(n+1) - p_X(n)$ est bornée

Théorème [Ferenczi] Soit X un système dynamique symbolique sur un alphabet minimal $\mathcal{A}$ tel que sa fonction de complexité $p_X(n)$ soit au plus linéaire. Alors, il existe

- un nombre fini de substitutions $\mathcal{S}$ sur un alphabet $\mathcal{D} = \{0, ..., d-1\}$
- une substitution φ de $\mathcal{D}^\star$ dans $\mathcal{A}^\star$
- une suite infinie de substitutions $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathcal{S}$

telles que

- $|\sigma_1\sigma_2...\sigma_n(r)| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, pour toute lettre $r \in \mathcal{D}$
- tout mot du langage du système est un facteur de $\varphi(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n)(0)$ pour un certain n.

Suite S-adique

Définition

Une suite u est dite S-adique s'il existe

- un ensemble fini de substitutions $\mathcal{S}$ sur un alphabet $\mathcal{D} = \{0, ..., d-1\}$
- un morphisme φ de $\mathcal{D}^\star$ dans $\mathcal{A}^\star$
- une suite infinie de substitutions $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathcal{S}$

telles que

$$u = \lim_{n\to+\infty} \varphi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \cdots \sigma_n(0).$$

Développements S-adiques

On considère

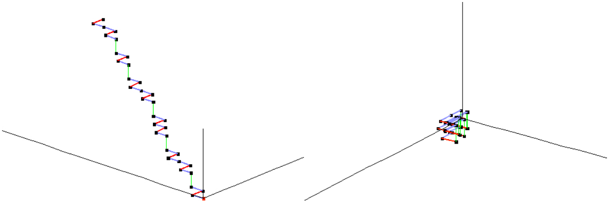
$$u = \lim_{n \to +\infty} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n(0)$$

Développements S-adiques

On considère

$$u = \lim_{n \to +\infty} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n(0)$$

Géométriquement



Soit p_k le préfixe de u de longueur k. Les points $f(p_k)$ restent-ils à distance bornée d'une droite ?

Développements S-adiques

On considère

$$u = \lim_{n \to +\infty} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n(0)$$

Algébriquement

Théorème de type Jacobi-Perron généralisé [Furstenberg]

On considère un produit infini de matrices

$$E_1 \cdots E_k \cdots$$

à entrées dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe une matrice B à entrées strictement positives telle qu'il existe $i_1 < j_1 < \cdots < i_k < j_k$ tels que

$$B = E_{i_1} \cdots E_{j_1}, \cdots, B = E_{i_k} \cdots E_{j_k}, \cdots .$$

Alors l'intersection de cônes

$$\cap_k \; E_1 \cdots E_k(\mathbb{R}_+^n)$$

est unidimensionnelle.

Vitesse de convergence ? Type de convergence ? Faible ? Forte ?

Développements S-adiques

On considère

$$u = \lim_{n \to +\infty} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n(0)$$

Combinatoirement

- Fréquences à restes bornés et équilibre

$$\exists C,\ \forall i \in \mathcal{A},\ \exists f(i) \text{ t.q. } \forall N\ |\mathrm{Card}\{k \leq N,\ u_k = i\} - Nf(i)| \leq C$$

Développements S-adiques

On considère

$$u = \lim_{n \to +\infty} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n(0)$$

Arithmétiquement

• Convergence faible et forte d'algorithmes de fractions continues multidimensionnels

Théorème

Il existe $\delta > 0$ tel que pour presque tout (α, β), il existe $n_0 = n_0(\alpha, \beta)$ tel que pour tout $n \geq n_0$

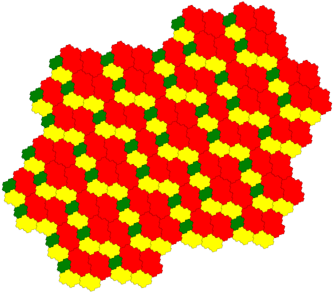
$$|\alpha - p_n/q_n| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$$

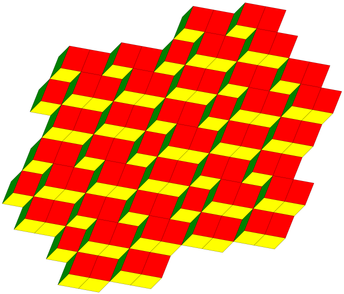
$$|\beta - r_n/q_n| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}},$$

où p_n, q_n, r_n sont donnés par Brun/Jacobi-Perron.

Brun [Ito-Fujita-Keane-Ohtsuki '93+'96] ; Jacobi-Perron

Des fractals de Rauzy aux quasicristaux






CANT
Combinatorics
Automata &
Number Theory
CIRM
21-25 May 2012 CIRM Marseille
Centre International de Recontres Mathématiques
www.cant.ulg.ac.be/
Invited lecturers
Grants available
for young researchers
M.-P. Béal, Institut Gaspard Monge
M. Crochemore, King's College London
M. Hochman, Princeton Univ.
J. Kari, Univ. of Turku
N. Rampersad, Univ. of Winipeg
C. Reutenauer, UQAM (Montréal)
J. Shallit, Univ. of Waterloo
Programme committee
S. Akiyama, J.-P. Allouche, J. Bell, V. Berthé, S. Brlek,
K. Dajani, A. Frid, J. Mairesse, M. Rigo, B. Solomyak