

Journée-séminaire CALIN (séance de 15h30 du CIP)
 Correction de la séance d'exercices
 de Cédric Boutillier & Jesper Lykke Jacobsen

Prise de notes : Hanane Tafat Bouzid
 Rédaction L^AT_EX : Matthieu Deneufchâtel

25/10/2011

1 Exercices de Cédric Boutillier

Soient $(\psi_k)_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}}$, $(\psi_k^*)_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ les opérateurs définis par les relations suivantes :

$$\psi_k \psi_l^* + \psi_l^* \psi_k = \delta_{kl}; \quad (1a)$$

$$\psi_k \psi_l + \psi_k \psi_l = 0; \quad (1b)$$

$$\psi_k^* \psi_l^* + \psi_k^* \psi_l^* = 0; \quad (1c)$$

$$\alpha_n = \sum_k \psi_{k+n} \psi_k^*. \quad (1d)$$

1. Montrer que

$$[\alpha_n, \psi_k] = \psi_{k+n}; \quad [\alpha_n, \psi_k^*] = -\psi_{k+n}^*. \quad (2)$$

2. Montrer que

$$[\alpha_n, \alpha_m] = -n\delta_{n,-m}. \quad (3)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} [\alpha_n, \psi_l] &= \alpha_n \psi_l - \psi_l \alpha_n \\ &= \sum_k \psi_{k+n} \psi_k^* \psi_l - \psi_l \alpha_n \\ &= \sum_k \psi_{k+n} (\delta_{kl} - \psi_l \psi_l^*) - \psi_l \alpha_n \\ &= \psi_{l+n} - \sum_k \psi_{k+n} \psi_l \psi_k^* - \psi_l \sum_k \psi_{k+n} \psi_k^* + \sum_k \psi_l \psi_{k+n} \psi_k^* - \sum_k \psi_l \psi_{k+n} \psi_k^* \\ &= \psi_{l+n}. \end{aligned} \quad (4)$$

La seconde relation peut être prouvée de la même façon.

Pour la relation (3), on a

$$\begin{aligned} [\alpha_n, \psi_{k+m} \psi_k^*] &= [\alpha_n, \psi_{k+m}] \psi_k^* + \psi_{k+m} [\alpha_n, \psi_k^*] \\ &= \psi_{k+n+m} \psi_k^* - \psi_{k+m} \psi_{k+n}^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Ainsi,

$$\sum_k [\alpha_n, \psi_{k+m} \psi_k^*] = -\alpha_{n+m} + \sum_k (\psi_{k+n+m} \psi_k^* - \psi_{k+m} \psi_{k+n}^*). \quad (6)$$

et donc

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \sum_k \psi_{k+n+m} \psi_k^* - \psi_{k+m} \psi_{k+n}^*.$$

Fixons un vecteur de base, v_S correspondant à une configuration de particules $S \subset \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ (avec un nombre fini de trous (resp. particules) à gauche (resp. à droite) de zéro). Si $m+n$ est non nul, alors il n'y a qu'un nombre fini de valeurs k telles que $\psi_k \psi_{k+n+m}^* v_S \neq 0$, car seul un nombre fini de sites contient une particule (qui peut être détruite par ψ_{k+n+m}^*) et ont un site libre, $n+m$ cases plus loin sur leur gauche (dans lequel ψ_k créera une particule). On a alors

$$[\alpha_n, \alpha_m] v_S = \sum_k \psi_{k+n+m} \psi_k^* v_S - \sum_{k'} \psi_{k'+m} \psi_{k'+n}^* v_S = 0$$

après le changement d'indice $k = k' - m$ dans la deuxième somme. Ainsi, $[\alpha_n, \alpha_m]$ agit sur l'espace des configurations comme l'opérateur nul.

La situation est différente si $n+m = 0$, car $\psi_{k+n+m} \psi_k^* = \psi_k \psi_k^*$ est le projecteur sur l'espace engendré par les configurations avec une particule au site k . Sur un vecteur de base donné v_S , il y a un nombre infini de k (les k qui appartiennent à S) tels que $\psi_k \psi_k^* v_S \neq 0$. On ne peut plus faire la simplification précédente (on aurait $\infty - \infty$).

Supposons que n est positif. Si k est strictement plus grand que la position de la particule la plus à droite de S , $\psi_k \psi_k^*$ et $\pi_{k+n} \pi_{k+n}^*$ envoient v_S sur 0. De même, si kn est strictement inférieur à la position du trou le plus à gauche, $\psi_k \psi_k^*$ et $\pi_{k+n} \pi_{k+n}^*$ envoient v_S sur lui-même, donc la différence est nulle. Pour les k qui restent, on se rend compte que le nombre de sites occupés avec un site libre n cases plus loin est plus grand (de n) que le nombre de sites vides avec un site occupé n cases plus loin. Cela se vérifie aussi opératoirement, en le constatant sur l'état fondamental (toutes les particules à gauche), et en écrivant un v_S quelconque comme le résultat d'un produit de $\psi_i \psi_j^*$ appliqué au vecteur nul. On montre ensuite le résultat par récurrence sur le nombre de termes dans le produit à droite de $[\alpha_n, \alpha_{-n}]$, les relations d'anticommutation permettant de faire diminuer ce nombre, et d'utiliser l'hypothèse de récurrence. \square

Définissons maintenant les opérateurs "vertex" Γ_{\pm} comme suit :

$$\Gamma_+(x) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \alpha_n \right); \quad \Gamma_-(y) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} \frac{y^n}{n} \alpha_{-n} \right) \quad (7)$$

et la série génératrice $\psi(z) = \sum_k z^k \psi_k$.

1. Montrer que

$$\Gamma_+(x) \Gamma_-(y) = (1 - xy) \Gamma_-(y) \Gamma_+(x). \quad (8)$$

2. Montrer que

$$\Gamma_+(x) \psi(z) = (1 - z^{-1}x)^{-1} \psi(z) \Gamma_+(x); \quad (9a)$$

$$\Gamma_-(y) \psi(z) = (1 - zy)^{-1} \psi(z) \Gamma_-(y). \quad (9b)$$

Démonstration. Commençons par calculer (dans $\mathbb{Q} \langle \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle \gg [[x, y]]$)

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \alpha_n, \sum_{m \geq 1} \frac{y^m}{m} \alpha_{-m} \right] &= \sum_{n, m} \frac{x^n y^m}{nm} [\alpha_n, \alpha_{-m}] \\ &= - \sum_n \frac{x^n y^n}{n} 1 \\ &= \log(1 - xy). \end{aligned} \quad (10)$$

Pour achever la preuve, il suffit d'utiliser la relation suivante (valable pour toutes matrices A, B scalaires) :

$$\exp^A \exp^B = \exp^{[A, B]} \exp^B \exp^A \quad (11)$$

On peut voir ce résultat comme une version dégénérée de la formule de Baker–Campbell–Hausdorff, et plus précisément comme une conséquence de la formule de Zassenhaus : si $[X, Y] = cI$, ce commutateur commute avec tout le monde. On a donc (avec $t = 1$) $\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y) \exp(-c/2)$ et $\exp(Y + X) = \exp(Y) \exp(X) \exp(c/2)$ ce qui donne le résultat voulu en identifiant les membres de droite. Ça se démontre aussi simplement à la main en calculant $[X^n, Y]$ et en sommant les séries exponentielles, ou en vérifiant avec X =l'opérateur de dérivée par rapport à x Y =multiplication des fonctions par x sur un espace de fonction, qui vérifient $[X, Y] = I$. \square

Grâce à cette identité sur les opérateurs vertex, on retrouve la formule de MacMahon énumérant les partitions planes (dans une boîte $a \times b$, puis non bornées) :

Démonstration.

$$Z(q) = \sum_{\pi} q^{|\pi|} = \langle v_{\phi} | \Gamma_{-}(q^{a-1/2}) \dots \Gamma_{-}(q^{1/2}) \Gamma_{+}(q^{1/2}) \dots \Gamma_{+}(q^{b-1/2}) | v_{\phi} \rangle. \quad (12)$$

En utilisant les relations suivantes :

$$+ \Gamma_{-}(x) | v_{\lambda} \rangle = \sum_{\mu \prec \lambda} x^{|\lambda/\mu|} | v_{\mu} \rangle, \quad (13)$$

$$\Gamma_{-}(x) | v_{\phi} \rangle = | v_{\phi} \rangle, \quad \langle v_{\phi} | \Gamma_{+}(x) = \langle v_{\phi} |, \quad (14)$$

on montre que

$$Z(q) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1}{1 - q^{i+j-1}}. \quad (15)$$

La limite $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$ donne

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow \infty}} \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \frac{1}{1 - q^{i+j-1}} = \prod_k \frac{1}{(1 - q^k)^k}. \quad (16)$$

□

2 Exercices de Jesper Lykke Jacobsen

Algèbre de Temperley-Lieb (1971) : $2N - 1$ générateurs $e_i, i = 1, \dots, 2N - 1$ vérifiant

$$e_i^2 = \sqrt{Q} e_i; \quad (17a)$$

$$e_i e_{i \pm 1} e_i = e_i; \quad (17b)$$

$$e_i e_j = e_j e_i \text{ si } |i - j| > 1. \quad (17c)$$

1. Montrer qu'une représentation est donnée (à l'aide des opérateurs Detach D_i et Join $J_{i,i+1}$ présentés dans l'exposé) par :

$$e_{2i-1} = c_1 D_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (18a)$$

$$e_{2i} = c_2 J_{i,i+1}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (18b)$$

et déterminer les constantes c_1 et c_2 .

Démonstration. On a $\left(\frac{1}{\sqrt{Q}} D_i\right)^2 = \frac{1}{Q} Q D_i = \sqrt{Q} \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} D_i\right)$, donc $c_1 = \frac{1}{\sqrt{Q}}$.

D'autre part, puisque $J_{ij}^2 = J_{ij}, c_2 = \sqrt{Q}$.

Pour les autres relations (les relations de croisements), la représentation graphique de l'algèbre de Temperley-Lieb s'avère fort pratique.

$$J_{ij} \left| \overset{\circ}{i} \overset{\circ}{j} \right\rangle = \left| \overset{\circ}{i} \overset{\circ}{j} \right\rangle, \quad J_{ij}^2 = J_{ij}. \quad (19)$$

$$D_i \left| \overset{\circ}{i} \overset{\circ}{j} \dots \right\rangle = Q \left| \overset{\circ}{j} \dots \right\rangle, \quad (20)$$

$$D_i \left| \overset{\circ}{i} \overset{\circ}{j} \dots \right\rangle = \left| \overset{\circ}{j} \dots \right\rangle. \quad (21)$$

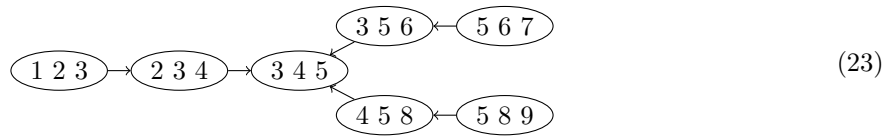
[todo : les dessins]

□

Le deuxième exercice a consisté à calculer (avec le nouvel algorithme que Jesper nous a présenté) le polynôme chromatique du graphe “un triangle avec 1 carré attaché sur chaque côté” :



On voit bien alors les phases où des calculs sont “factorisés” (par rapport à l’algorithme naïf qui coûterait 2^N), et en quoi la largeur arborescente (bornée en \sqrt{N}) permet donc un gain exponentiel.



[todo le dessin, plus qq étapes.]