Algèbres de Hopf des permutations et des objets de Baxter

Samuele Giraudo

Université de Marne-la-Vallée

Journées junior LIPN
1er mars 2011

Plan de l'exposé

L'algèbre de Hopf des permutations
- Structure d'algèbre associative
- Structure de cogèbre
- Structure d'algèbre de Hopf combinatoire
- Exemples de sous-algèbres de Hopf

L'algèbre de Hopf de Baxter
- La famille combinatoire de Baxter
- Le monoïde de Baxter
- Une correspondance du type Robinson-Schensted
- L'algèbre de Hopf de Baxter

Plan de la suite de l'exposé

L'algèbre de Hopf des permutations
- Structure d'algèbre associative
- Structure de cogèbre
- Structure d'algèbre de Hopf combinatoire
- Exemples de sous-algèbres de Hopf

L'espace vectoriel des permutations

Soit $\mathbf{FQSym}_n$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel basé sur les permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et

$$\mathbf{FQSym} := \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{FQSym}_n,$$

l'espace vectoriel des permutations.

Ses éléments peuvent être vus par l'intermédiaire de sa base fondamentale $\{\mathbf{F}_\sigma\}_{\sigma \in \mathfrak{S}}$.

Cette structure peut être enrichie au point de former l'algèbre de Hopf des fonction quasi-symétriques libres (connue également sous le nom d'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer).

Le produit de **FQSym**

FQSym est muni du produit de mélange décalé :

$$\mathbf{F}_\sigma \cdot \mathbf{F}_\nu := \sum_{\pi \in \sigma \overline{\sqcup\!\sqcup} \nu} \mathbf{F}_\pi.$$

Par exemple :

$$\mathbf{F}_{12} \cdot \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{1243} + \mathbf{F}_{1423} + \mathbf{F}_{1432} + \mathbf{F}_{4123} + \mathbf{F}_{4132} + \mathbf{F}_{4312}.$$

- Ce produit est associatif,
- admet $\mathbf{F}_\epsilon$ comme élément neutre,
- et est gradué : $\cdot : \mathbf{FQSym}_n \otimes \mathbf{FQSym}_m \to \mathbf{FQSym}_{n+m}$.

$(\mathbf{FQSym}, \cdot)$ est donc une algèbre associative unitaire graduée.

Réalisation polynomiale de **FQSym**

Soit $A := \{a_1 < a_2 < \ldots\}$ un alphabet infini et totalement ordonné, et l'application

$$r_A : \mathbf{FQSym} \to \mathbb{Q}\langle A\rangle,$$

définie par :

$$r_A\left(\mathbf{F}_\sigma\right) := \sum_{\substack{u \in A^* \\ \mathrm{std}(u) = \sigma^{-1}}} u.$$

Théorème

*[**Duchamp, Hivert, Thibon**, 2002]*
L'application r_A est un morphisme injectif de l'algèbre **FQSym** *vers l'algèbre associative libre $\mathbb{Q}\langle A\rangle$.*

Réalisation polynomiale de **FQSym**

Les éléments de **FQSym** peuvent donc être encodés par des polynômes.
Par exemple :

$$r_A(\mathbf{F}_\epsilon) = 1,$$

$$r_A(\mathbf{F}_1) = \sum_{\mathtt{a} \in A} \mathtt{a} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\ ,$$

$$r_A(\mathbf{F}_{312}) = \sum_{\mathtt{a} < \mathtt{b} < \mathtt{c} \in A} \mathtt{bca} + \sum_{\mathtt{a} < \mathtt{b} \in A} \mathtt{bba} = a_2 a_3 a_1 + a_2 a_2 a_1 + \dots\ .$$

- On peut voir un polynôme $r_A(\mathbf{F}_\sigma)$ comme le langage des mots qui peuvent être triés par σ par action à droite.
- L'élément $\mathbf{F}_\pi$ apparaît dans un produit $\mathbf{F}_\sigma \cdot \mathbf{F}_\nu$ s'il existe un mot $u.v$ triable par π tel que u est triable par σ et v par ν.

Le permutoèdre droit

La permutation $u\mathtt{a}\mathtt{b}v$ est couverte par $u\mathtt{b}\mathtt{a}v$ pour l'ordre du permutoèdre droit $\leq_{\mathrm{P}}$ si $\mathtt{a} < \mathtt{b}$.

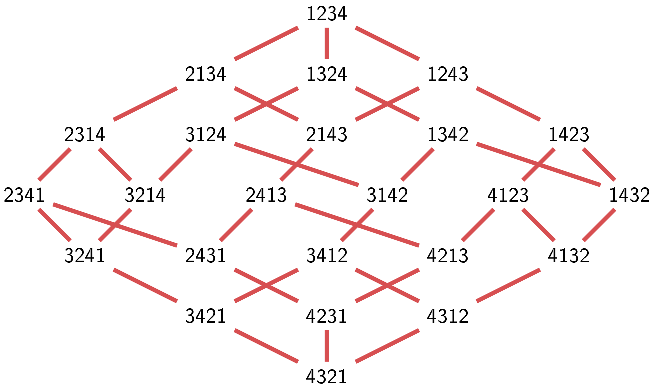


Figure: Le permutoèdre droit d'ordre 4.

Bases multiplicatives de **FQSym**

L'ordre du permutoèdre permet de construire des nouvelles bases de **FQSym**. Soient les éléments :

$$\mathbf{E}_\sigma := \sum_{\sigma \leq_{\mathbf{P}} \nu} \mathbf{F}_\nu \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\sigma := \sum_{\nu \leq_{\mathbf{P}} \sigma} \mathbf{F}_\nu.$$

Par triangularité, les familles $\{\mathbf{E}_\sigma\}_{\sigma \in \mathfrak{S}}$ et $\{\mathbf{H}_\sigma\}_{\sigma \in \mathfrak{S}}$ forment des bases de **FQSym**.

Ce sont aussi des bases multiplicatives car

$$\mathbf{E}_\sigma \cdot \mathbf{E}_\nu = \mathbf{E}_{\sigma \diagup \nu} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\sigma \cdot \mathbf{H}_\nu = \mathbf{H}_{\sigma \diagdown \nu}.$$

Bases multiplicatives de **FQSym**

Par exemple :

$$\mathbf{E}_{312} = \mathbf{F}_{312} + \mathbf{F}_{321},$$

$$\mathbf{E}_{2413} = \mathbf{F}_{2413} + \mathbf{F}_{2431} + \mathbf{F}_{4213} + \mathbf{F}_{4231} + \mathbf{F}_{4321},$$

$$\mathbf{E}_{2413} \cdot \mathbf{E}_{312} = \mathbf{E}_{2413 \diagup 312} = \mathbf{E}_{2413756}\ ;$$

$$\mathbf{H}_{312} = \mathbf{F}_{123} + \mathbf{F}_{132} + \mathbf{F}_{312},$$

$$\mathbf{H}_{2413} = \mathbf{F}_{1234} + \mathbf{F}_{1243} + \mathbf{F}_{1324} + \mathbf{F}_{2134} + \mathbf{F}_{2143} + \mathbf{F}_{2413},$$

$$\mathbf{H}_{2413} \cdot \mathbf{H}_{312} = \mathbf{H}_{2413 \diagdown 312} = \mathbf{H}_{7562413}.$$

Plan de la suite de l'exposé

L'algèbre de Hopf des permutations

- Structure d'algèbre associative
- Structure de cogèbre
- Structure d'algèbre de Hopf combinatoire
- Exemples de sous-algèbres de Hopf

Le coproduit de **FQSym**

FQSym est muni du coproduit de déconcaténation :

$$\Delta\left(\mathbf{F}_\sigma\right) := \sum_{u.v=\sigma} \mathbf{F}_{\mathrm{std}(u)} \otimes \mathbf{F}_{\mathrm{std}(v)}.$$

Par exemple,

$$\Delta\left(\mathbf{F}_{4123}\right) = \mathbf{F}_\epsilon \otimes \mathbf{F}_{4123} + \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_{123} + \mathbf{F}_{21} \otimes \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{312} \otimes \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{4123} \otimes \mathbf{F}_\epsilon.$$

- Ce coproduit est coassociatif,
- et est gradué : $\Delta : \mathbf{FQSym}_n \to \bigoplus_{i+j=n} \mathbf{FQSym}_i \otimes \mathbf{FQSym}_j$.

$(\mathbf{FQSym}, \Delta)$ est donc une cogèbre coassociative graduée.

Le coproduit de **FQSym**

Le coproduit $\Delta(\mathbf{F}_\sigma)$ contient les éléments $\mathbf{F}_\nu \otimes \mathbf{F}_\pi$ tels que ν permet de trier les $|\nu|$-ièmes plus petites lettres des mots qui apparaissent dans $r_A(\mathbf{F}_\sigma)$ et π permet de trier les lettres plus grandes restantes.

Par exemple, le polynôme $r_A(\mathbf{F}_{4123})$ contient les mots de la forme $\mathtt{bcda}$ avec $\mathtt{a} < \mathtt{b} \leq \mathtt{c} \leq \mathtt{d}$. En reprenant l'exemple précédent :

$\Delta(\mathbf{F}_{4123})$	petit sous-mot	grand sous-mot
$\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_{123}$	$\mathtt{a}$	$\mathtt{bcd}$
$\mathbf{F}_{21} \otimes \mathbf{F}_{12}$	$\mathtt{ba}$	$\mathtt{cd}$
$\mathbf{F}_{312} \otimes \mathbf{F}_1$	$\mathtt{bca}$	$\mathtt{d}$

Le coproduit de **FQSym**

Soient $A := \{a_1 < a_2 < \ldots\}$ et $B := \{b_1 < b_2 < \ldots\}$ deux alphabets totalement ordonnés commutant mutuellement. On pose

$$A + B := \{a_1 < a_2 < \ldots < b_1 < b_2 < \ldots\}$$

la somme ordinale de A et B.

On peut aussi définir le coproduit de **FQSym** par doublement d'alphabet, à savoir :

$$\Delta\left(r_A\left(\mathbf{F}_\sigma\right)\right) := r_{A+B}\left(\mathbf{F}_\sigma\right) \in \mathbb{Q}\langle A + B\rangle \simeq \mathbb{Q}\langle A\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle B\rangle \simeq \mathbb{Q}\langle A\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle A\rangle.$$

Proposition

*[**Duchamp, Hivert, Thibon**, 2002]*
Ces deux définitions fournissent un même coproduit dans **FQSym**.

Plan de la suite de l'exposé

- L'algèbre de Hopf des permutations
  - Structure d'algèbre associative
  - Structure de cogèbre
  - Structure d'algèbre de Hopf combinatoire
  - Exemples de sous-algèbres de Hopf

L'algèbre de Hopf combinatoire **FQSym**

La définition par doublement d'alphabet du coproduit implique que Δ est un morphisme d'algèbre, c'est à dire :

$$\Delta\left(\mathbf{F}_{\sigma} \cdot \mathbf{F}_{\nu}\right) = \Delta\left(\mathbf{F}_{\sigma}\right) \cdot \Delta\left(\mathbf{F}_{\nu}\right).$$

FQSym est donc une bigèbre.

Celle-ci, étant de plus graduée et connexe, est une algèbre de Hopf.

On utilise l'appellation heuristique d'algèbre de Hopf combinatoire (AHC) pour une algèbre de Hopf graduée, connexe et basée sur des objets combinatoires.

Plan de la suite de l'exposé

L'algèbre de Hopf des permutations

- Structure d'algèbre associative
- Structure de cogèbre
- Structure d'algèbre de Hopf combinatoire
- Exemples de sous-algèbres de Hopf

Sous-AHC de **FQSym**

FQSym est suffisamment large pour contenir beaucoup d'autres AHC, en tant que quotients ou en tant que sous-AHC :

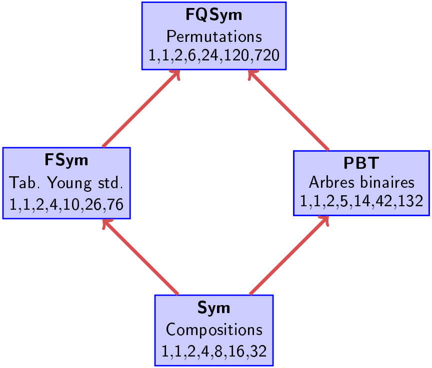


Figure: Quelques sous-AHC de **FQSym**.

Construction de **FSym**

Soit u un mot. On note $\mathbb{P}(u)$ le $\mathbb{P}$-symbole issu de l'insertion de u selon l'algorithme de Robinson-Schensted.

Par exemple :

$$\mathbb{P}(23311) = \begin{array}{|c|c|c}\hline 2 & 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \hline \end{array}.$$

Définition

La relation d'équivalence plaxique $\equiv_P$ est la clôture réflexive et transitive de la relation $\equiv$ définie par :

$$\ldots \mathtt{acb} \ldots \equiv \ldots \mathtt{cab} \ldots \qquad \text{si } \mathtt{a} \leq \mathtt{b} < \mathtt{c},$$

$$\ldots \mathtt{bac} \ldots \equiv \ldots \mathtt{bca} \ldots \qquad \text{si } \mathtt{a} < \mathtt{b} \leq \mathtt{c}.$$

Construction de **FSym**

Par exemple, la classe plaxique de 12354 est

$$\{12354, 12534, 15234, 51234\}.$$

Théorème

*[**Knuth**, 1970]*

$$\mathbb{P}(u) = \mathbb{P}(v) \qquad \textit{ssi} \qquad u \equiv_{\mathrm{P}} v.$$

La relation $\equiv_{\mathrm{P}}$ est aussi une congruence pour la concaténation. $A^*/_{\equiv_{\mathrm{P}}}$ est donc un monoïde. C'est le monoïde plaxique.

Construction de **FSym**

Pour tout tableau de Young standard t, on définit l'élément $\mathbf{P}_t$ de **FQSym** par :

$$\mathbf{P}_t := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathbb{P}(\sigma) = t}} \mathbf{F}_\sigma.$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\emptyset &= \mathbf{F}_\epsilon, \\
\mathbf{P}_{\boxed{1}} &= \mathbf{F}_1, \\
\mathbf{P}_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \cline{1-1} 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}} &= \mathbf{F}_{12354} + \mathbf{F}_{12534} + \mathbf{F}_{15234} + \mathbf{F}_{51234}.
\end{aligned}$$

Construction de **FSym**

Théorème

L'espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{P}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ *forme une sous-AHC de* **FQSym**.

L'AHC engendrée est **FSym** (pour fonctions symétriques libres).

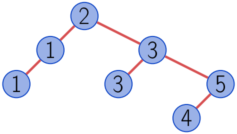
En effet, l'image commutative du polynôme $r_A(\mathbf{P}_t)$ est la fonction de Schur s_λ où λ est la forme de t.

Construction de **PBT**

L'algorithme d'insertion dans un arbre binaire de recherche fournit un analogue de l'algorithme de Robinson-Schensted.

Soit u un mot. On note $\mathbb{P}(u)$ l'arbre binaire de recherche obtenu en insérant les lettres de u de droite à gauche.

Par exemple :

$\mathbb{P}(3141532) =$  .

Construction de **PBT**

Définition

La relation d'équivalence sylvestre $\equiv_S$ *est la clôture réflexive et transitive de la relation* $\equiv$ *définie par :*

$$\ldots \mathtt{a}\mathtt{c}u\mathtt{b} \ldots \equiv \ldots \mathtt{c}\mathtt{a}u\mathtt{b} \ldots \qquad \textit{si } \mathtt{a} \leq \mathtt{b} < \mathtt{c}.$$

Théorème

*[**Hivert, Novelli, Thibon**, 2005]*

$$\mathbb{P}(u) = \mathbb{P}(v) \qquad \textit{ssi} \qquad u \equiv_S v.$$

Ici aussi, la relation $\equiv_S$ est une congruence pour la concaténation. $A^*/_{\equiv_S}$ est donc un monoïde. C'est le monoïde sylvestre.

Construction de **PBT**

Pour tout arbre binaire T (non étiqueté ou étiqueté par une permutation), on définit l'élément $\mathbf{P}_T$ de **FQSym** par :

$$\mathbf{P}_T := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathbb{P}(\sigma) = T}} \mathbf{F}_\sigma .$$

Par exemple :

$$\mathbf{P}_\perp = \mathbf{F}_\epsilon ,$$

$$\mathbf{P}_{\bullet} = \mathbf{F}_1 ,$$

$\mathbf{P}$  $= \mathbf{F}_{1342} + \mathbf{F}_{3142} + \mathbf{F}_{3412} .$

Construction de **PBT**

Théorème

*[**Hivert, Novelli, Thibon**, 2005]*
L'espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{P}_T\}_{T \in \mathcal{AB}}$ forme une sous-AHC de **FQSym**.

C'est l'AHC **PBT** (également connue sous le nom d'algèbre de Loday-Ronco).

Quelques propriétés notables :

- **PBT** est libre et autoduale ;
- **PBT** est l'algèbre dendriforme libre sur le générateur $\mathbf{P}_{\bullet}$.

Construction de **Sym**

Définition

La relation d'équivalence hypoplaxique $\equiv_{\mathsf{H}}$ est la clôture réflexive et transitive de la relation $\equiv$ définie par :

$$\ldots \mathtt{a}\mathtt{c}u\mathtt{b} \ldots \equiv \ldots \mathtt{c}\mathtt{a}u\mathtt{b} \ldots \qquad \textit{si } \mathtt{a} \leq \mathtt{b} < \mathtt{c},$$

$$\ldots \mathtt{b}u\mathtt{c}\mathtt{a} \ldots \equiv \ldots \mathtt{b}u\mathtt{a}\mathtt{c} \ldots \qquad \textit{si } \mathtt{a} < \mathtt{b} \leq \mathtt{c}.$$

En particulier, deux permutations σ et ν sont équivalentes ssi elles ont les mêmes reculs. Par exemple :

$$\mathrm{Rec}(461532) = \{2, 3, 5\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Rec}(436512) = \{2, 3, 5\},$$

et donc $461532 \equiv_{\mathsf{H}} 436512$.

Construction de **Sym**

La relation $\equiv_{\mathbf{H}}$ étant une congruence pour la concaténation, $A^* / _{\equiv_{\mathbf{H}}}$ est un monoïde. C'est le monoïde hypoplaxique.

Soit $C := (c_1, \ldots, c_k)$ une composition. On note

$$\mathrm{Rec}(C) := \{c_1 + \ldots + c_i : 1 \leq i \leq k-1\}.$$

Par exemple, $\mathrm{Rec}(21334) = \{2, 3, 6, 9\}$.

Pour toute composition C, on définit l'élément $\mathbf{P}_C$ de **FQSym** par :

$$\mathbf{P}_C := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathrm{Rec}(\sigma) = \mathrm{Rec}(C)}} \mathbf{F}_\sigma.$$

Construction de **Sym**

On a par exemple :

$$\mathbf{P}_\epsilon = \mathbf{F}_\epsilon,$$

$$\mathbf{P}_{112} = \mathbf{F}_{3214} + \mathbf{F}_{3241} + \mathbf{F}_{3421},$$

$$\mathbf{P}_{13} = \mathbf{F}_{2134} + \mathbf{F}_{2314} + \mathbf{F}_{2341},$$

$$\mathbf{P}_{7} = \mathbf{F}_{1234567}.$$

Le produit s'exprime très simplement :

$$\mathbf{P}_{C_0} \cdot \mathbf{P}_{C_1} = \mathbf{P}_{C_0 . C_1} + \mathbf{P}_{C_0 \triangleright C_1}.$$

Par exemple :

$$\mathbf{P}_{112} \cdot \mathbf{P}_{13} = \mathbf{P}_{11213} + \mathbf{P}_{1133}.$$

Construction de **Sym**

Théorème

L'espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{P}_C\}_{C \in \mathcal{C}}$ *forme une sous-AHC de* **FQSym**.

C'est l'AHC **Sym** des fonctions symétriques non-commutatives.

Son dual est *QSym*, l'AHC des fonctions quasi-symétriques.

De plus,

- **Sym** n'est pas autoduale (*QSym* est commutative mais **Sym** ne l'est pas) ;
- Les images commutatives des polynômes $r_A(\mathbf{P}_C)$ engendrent l'algèbre des fonctions symétriques.

AHC et structures combinatoires

L'étude des sous-AHC de **FQSym** mène souvent à la construction d'autres structures combinatoires :

AHC	Monoïde	Alg. insertion	Ordre partiel
FQSym	trivial	trivial	permutoèdre
FSym	plaxique	R-S	ordre de Reiner
PBT	sylvestre	abr	treillis de Tamari
Sym	hypoplaxique	Krob-Thibon	hypercube

Plan de la suite de l'exposé

L'algèbre de Hopf de Baxter

- La famille combinatoire de Baxter
- Le monoïde de Baxter
- Une correspondance du type Robinson-Schensted
- L'algèbre de Hopf de Baxter

Objets de Baxter

Définition

Une permutation σ est de Baxter [Baxter, 1964] si elle évite les motifs généralisés $2-41-3$ et $3-14-2$.

Exemples :

- 561382479 n'est pas de Baxter ;
- ϵ, 1, 1234, 2143 sont de Baxter.

Objets de Baxter

Permutations de Baxter dénombrées [Chung et al., 1978] par :

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n+1}{k-1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{1}\binom{n+1}{2}}.$$

[Sloane, A0011811] : 1, 1, 2, 6, 22, 92, 422, 2074, 10754, ...

C'est aussi le nombre

- de couples d'arbres binaires jumeaux [Dulucq, Guibert, 1994] ;
- de partitions rectangulaires [Yao et al., 2003] ;
- d'orientations planes bipolaires [Bousquet-Mélou et al., 2010] ;

et bien d'autres objets.

Canopée d'un arbre binaire

La canopée d'un arbre binaire T est le mot sur $\{0,1\}$ obtenu en parcourant les feuilles de T de la gauche vers la droite, en associant pour chacune d'entre elles, excepté la première et la dernière, la lettre 0 si la feuille considérée est orientée vers la droite, la lettre 1 sinon.

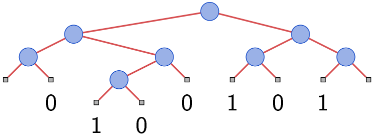


Figure: La canopée de cet arbre binaire est 0100101.

Couples d'arbres binaires jumeaux

Un couple (T_L, T_R) d'arbres binaires est un couple d'arbres binaires jumeaux si les canopées de T_L et de T_R sont complémentaires.

Théorème

*[**Dulucq, Guibert**, 1994]*
L'ensemble des couples d'arbres binaires jumeaux à n nœuds est en bijection avec l'ensemble des permutations de Baxter de taille n.

Plan de la suite de l'exposé

L'algèbre de Hopf de Baxter

- La famille combinatoire de Baxter
- Le monoïde de Baxter
- Une correspondance du type Robinson-Schensted
- L'algèbre de Hopf de Baxter

Motivation de la construction

Involution de Schützenberger $\#$ sur une permutation σ : image miroir de σ puis complémentation de ses lettres. Par exemple :

- $(123)^{\#} = 123$;
- $(4312)^{\#} = 3421$.

Remarque

Le monoïde hypoplaxique, à la base de la construction de **Sym**, *provient de la définition de la relation* $\equiv_{\mathsf{H}}$. *Celle-ci vérifie*

$$\sigma \equiv_{\mathsf{H}} \nu \qquad \textit{ssi} \qquad \sigma \equiv_{\mathsf{S}} \nu \quad \textbf{ou} \quad \sigma^{\#} \equiv_{\mathsf{S}} \nu^{\#}.$$

Question

Qu'obtient-on si l'on remplace le précédent **ou** *par un* **et** *?*

Le monoïde de Baxter

Définition

La relation d'équivalence de Baxter $\equiv_{\mathrm{B}}$ *est la clôture réflexive et transitive de la relation* $\equiv$ *définie par :*

$$\ldots \mathtt{c}u\mathtt{ad}v\mathtt{b}\ldots \equiv \ldots \mathtt{c}u\mathtt{da}v\mathtt{b}\ldots \qquad \mathtt{a} \leq \mathtt{b} < \mathtt{c} \leq \mathtt{d},$$

$$\ldots \mathtt{b}u\mathtt{da}v\mathtt{c}\ldots \equiv \ldots \mathtt{b}u\mathtt{ad}v\mathtt{c}\ldots \qquad \mathtt{a} < \mathtt{b} \leq \mathtt{c} < \mathtt{d}.$$

On a $\sigma \equiv_{\mathrm{B}} \nu$ ssi on peut réécrire σ en ν par la règle

$$u.\mathtt{ad}.v \longleftrightarrow u.\mathtt{da}.v,$$

à condition que $u_{|[\mathtt{a},\mathtt{d}]} \neq \epsilon$ et $v_{|[\mathtt{a},\mathtt{d}]} \neq \epsilon$.

On appelle $A^*/\equiv_{\mathrm{B}}$ le monoïde de Baxter.

Lien avec le monoïde sylvestre

Proposition

Soient σ et ν deux permutations. Alors,

$$\sigma \equiv_{\mathsf{B}} \nu \qquad \textit{ssi} \qquad \sigma \equiv_{\mathsf{S}} \nu \quad \textbf{et} \quad \sigma^{\#} \equiv_{\mathsf{S}} \nu^{\#}.$$

Démonstration.

$(\Rightarrow)$: vrai pour $\equiv$ et donc aussi pour $\equiv_{\mathsf{B}}$.

$(\Leftarrow)$: se base sur le fait que les classes d'équivalence de $\equiv_{\mathsf{S}}$ sont des intervalles du permutoèdre et que ce dernier est un treillis. $\square$

On obtient donc le monoïde de Baxter en réponse à la question précédente.

Propriétés du monoïde de Baxter

Proposition

Le monoïde de Baxter est compatible avec la déstandardisation.

Démonstration.

Il faut montrer que pour tout $u, v \in A^*$, on a

$$u \equiv_{\mathrm{B}} v \qquad \text{ssi} \qquad \mathrm{std}(u) \equiv_{\mathrm{B}} \mathrm{std}(v) \quad \text{et} \quad \mathrm{ev}(u) = \mathrm{ev}(v).$$

Ceci est vrai pour la relation d'adjacence $\equiv$, c'est donc vrai pour la relation $\equiv_{\mathrm{B}}$ par transitivité. $\square$

Propriétés du monoïde de Baxter

Proposition

Le monoïde de Baxter est compatible aux restrictions aux intervalles d'alphabet.

Démonstration.

Il faut montrer que pour tout intervalle I de A et pour tout $u, v \in A^*$, on a

$$u \equiv_{\mathrm{B}} v \qquad \text{implique} \qquad u_{|I} \equiv_{\mathrm{B}} v_{|I}.$$

Ceci est vrai pour la relation d'adjacence $\equiv$ pour chacune des possibilités de l'intersection $I \cap \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$. C'est donc vrai pour la relation $\equiv_{\mathrm{B}}$ par transitivité. $\square$

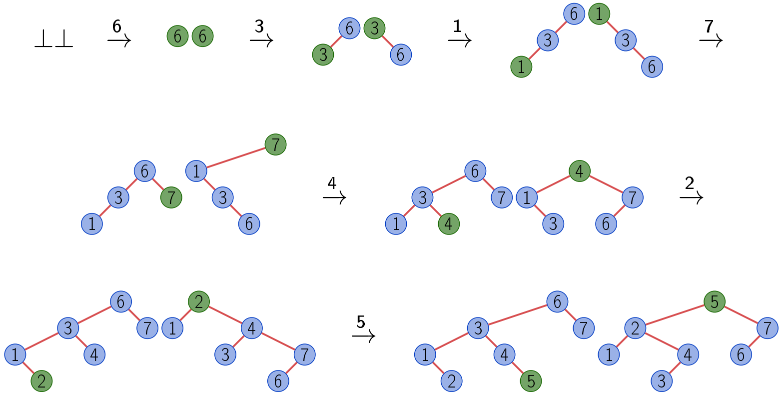
Plan de la suite de l'exposé

L'algèbre de Hopf de Baxter

- La famille combinatoire de Baxter
- Le monoïde de Baxter
- Une correspondance du type Robinson-Schensted
- L'algèbre de Hopf de Baxter

Le $\mathbb{P}$-symbole

Construction du $\mathbb{P}$-symbole de $\sigma := 6317425$:



Le $\mathbb{P}$-symbole

Théorème

Soient σ et ν deux permutations. Alors,

$$\mathbb{P}(\sigma) = \mathbb{P}(\nu) \qquad \textit{ssi} \qquad \sigma \equiv_{\mathsf{B}} \nu.$$

Démonstration.

$(\Rightarrow)$: comme $\mathbb{P}(\sigma) = \mathbb{P}(\nu)$, les abr de σ (resp. $\sigma^{\#}$) et de ν (resp. $\nu^{\#}$) en insertion $\leftarrow$ (resp. $\rightarrow$) sont les mêmes. On a donc $\sigma \equiv_{\mathsf{S}} \nu$ et $\sigma^{\#} \equiv_{\mathsf{S}} \nu^{\#}$, ce qui implique $\sigma \equiv_{\mathsf{B}} \nu$.

$(\Leftarrow)$: comme $\sigma \equiv_{\mathsf{B}} \nu$, on a $\sigma \equiv_{\mathsf{S}} \nu$ (resp. $\sigma^{\#} \equiv_{\mathsf{S}} \nu^{\#}$). Ceci implique que σ et ν (resp. $\sigma^{\#}$ et $\nu^{\#}$) donnent le même abr en insertion $\leftarrow$ (resp. $\rightarrow$), et donc, $\mathbb{P}(\sigma) = \mathbb{P}(\nu)$. $\square$

Le $\mathbb{Q}$-symbole

L'arbre binaire décroissant $\mathrm{decr}(\sigma)$ de σ est l'arbre binaire étiqueté sur $\{1, \ldots, |\sigma|\}$ construit récursivement par :

$$\mathrm{decr}(\sigma) := \begin{cases} \perp & \text{si } \sigma = \epsilon, \\ \mathrm{decr}(u) \wedge_{\mathtt{d}} \mathrm{decr}(v) & \text{où } \sigma = u\mathtt{d}v \text{ et } \mathtt{d} = \max \sigma. \end{cases}$$

Construction analogue pour l'arbre binaire croissant $\mathrm{incr}(\sigma)$ de σ.

Le $\mathbb{Q}$-symbole

Le $\mathbb{Q}$-symbole de σ est le couple d'arbres binaires étiquetés $\left(\text{incr}\left(\sigma^{-1}\right), \text{decr}\left(\sigma^{-1}\right)\right)$.

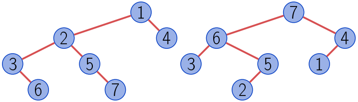


Figure: Le $\mathbb{Q}$-symbole de $\sigma := 6317425$ ($\sigma^{-1} = 3625714$).

Les étiquettes du $\mathbb{Q}$-symbole correspondent aux moments de création des nœuds dans le $\mathbb{P}$-symbole.

Une correspondance du type Robinson-Schensted

Théorème

L'application $\sigma \longmapsto (\mathbb{P}(\sigma), \mathbb{Q}(\sigma))$ *réalise une bijection entre* $\mathfrak{S}_n$ *et l'ensemble des couples* $((T_L, T_R), (S_L, S_R))$ *où :*

1. (T_L, T_R) *et* (S_L, S_R) *sont deux couples d'arbres binaires jumeaux de même forme ;*
2. S_L *(resp.* S_R*) est un arbre binaire croissant (resp. décroissant) ;*
3. *les lectures infixes de* S_L *et* S_R *sont les mêmes.*

Démonstration.

Se base sur le fait que l'application $\sigma \longmapsto (\mathrm{abr}(\sigma), \mathrm{decr}\,(\sigma^{-1}))$ réalise une bijection entre $\mathfrak{S}_n$ et l'ensemble des couples (T_R, S_R) où T_R et S_R sont de même forme, S_R est un arbre binaire décroissant, et la lecture infixe de S_R est σ^{-1} [**Hivert, Novelli, Thibon**, 2005]. $\square$

Nombre de classes d'équivalences de $\mathfrak{S}_n/\equiv_B$

Théorème

Il y a autant de classes d'équivalence de $\mathfrak{S}_n/\equiv_B$ que de permutations de Baxter de taille n.

Démonstration.

L'application $\mathbb{P} : \mathfrak{S}_n/\equiv_B \to \mathcal{J}_n$ est une injection. C'est de plus une surjection car il existe un algorithme qui permet, étant donné un couple d'arbres binaires jumeaux J de calculer une permutation σ telle que $\mathbb{P}(\sigma) = J$ (impliqué par les résultats de [Dulucq, Guibert, 1994]). $\square$

Les classes d'équivalence de $\equiv_B$ peuvent donc être encodées par des couples d'arbres binaires jumeaux.

Le treillis de Baxter

La relation $\equiv_B$ définit une congruence de treillis pour le permutoèdre. On appelle ce quotient le treillis de Baxter. Les relations de couverture sont des rotations d'arbre binaire.

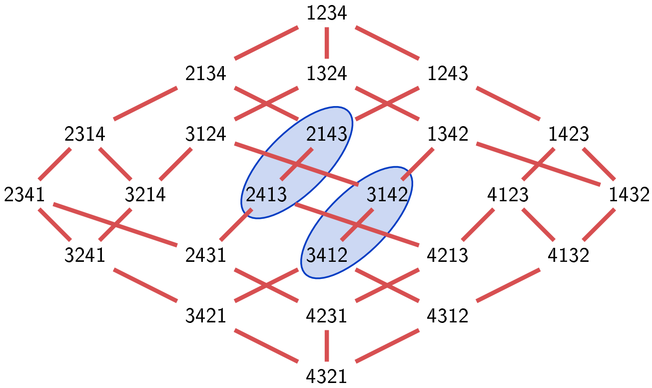


Figure: Le treillis de Baxter d'ordre 4.

Plan de la suite de l'exposé

L'algèbre de Hopf de Baxter

- La famille combinatoire de Baxter
- Le monoïde de Baxter
- Une correspondance du type Robinson-Schensted
- L'algèbre de Hopf de Baxter

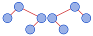
Construction de **Baxter**

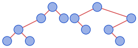
Pour tout couple d'arbres binaires jumeaux J, on définit l'élément $\mathbf{P}_J$ de **FQSym** par :

$$\mathbf{P}_J := \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S} \\ \mathbb{P}(\sigma) = J}} \mathbf{F}_\sigma .$$

Par exemple :

$\mathbf{P}$  $= \mathbf{F}_{12},$

$\mathbf{P}$  $= \mathbf{F}_{2143} + \mathbf{F}_{2413},$

$\mathbf{P}$  $= \mathbf{F}_{542163} + \mathbf{F}_{542613} + \mathbf{F}_{546213}.$

Construction de **Baxter**

Théorème

L'espace vectoriel engendré par la famille $\{\mathbf{P}_J\}_{J \in \mathcal{J}}$ forme une sous-AHC de **FQSym**.

C'est l'AHC **Baxter**. Son produit et coproduit sont bien définis puisque $\equiv_B$ est

- une congruence pour la concaténation,
- compatible avec la déstandardisation,
- compatible aux restrictions aux intervalles d'alphabet.

Les éléments $\mathbf{P}_J$ qui apparaissent dans un produit $\mathbf{P}_{J_0} \cdot \mathbf{P}_{J_1}$ forment un intervalle du treillis de Baxter.

Morphisme de Hopf **Baxter** $\rightarrow$ **PBT**

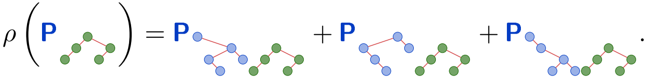
Comme $\sigma \equiv_{\mathsf{B}} \nu$ implique $\sigma \equiv_{\mathsf{S}} \nu$, la relation $\equiv_{\mathsf{B}}$ est un raffinement de la relation $\equiv_{\mathsf{S}}$. Ceci implique l'existence d'un morphisme de Hopf injectif :

$$\rho : \mathbf{PBT} \rightarrow \mathbf{Baxter}$$

vérifiant :

$$\rho(\mathbf{P}_T) = \sum_{\substack{T' \in \mathcal{AB} \\ J := (T', T) \in \mathcal{J}}} \mathbf{P}_J.$$

Par exemple :



Bases multiplicatives de **Baxter**

Soient les éléments

$$\mathbf{E}_J := \sum_{J \leq_{\mathbf{B}} J'} \mathbf{P}_{J'} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_J := \sum_{J' \leq_{\mathbf{B}} J} \mathbf{P}_{J'}.$$

Par triangularité, les familles $\{\mathbf{E}_J\}_{J \in \mathcal{J}}$ et $\{\mathbf{H}_J\}_{J \in \mathcal{J}}$ forment des bases de **Baxter**.

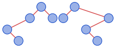
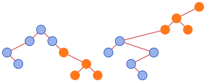
Proposition

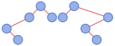
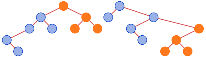
Les familles $\{\mathbf{E}_J\}_{J \in \mathcal{J}}$ et $\{\mathbf{H}_J\}_{J \in \mathcal{J}}$ sont des bases multiplicatives de **Baxter**. *En particulier :*

$$\mathbf{E}_{J_0} \cdot \mathbf{E}_{J_1} = \mathbf{E}_{J_0 \diagup J_1} \quad \textit{et} \quad \mathbf{H}_{J_0} \cdot \mathbf{H}_{J_1} = \mathbf{H}_{J_0 \diagdown J_1}.$$

Bases multiplicatives de **Baxter**

Par exemple :

E  · **E**  = **E**  ,

H  · **H**  = **H**  .

Liberté de **Baxter**

Un couple d'arbres binaires jumeaux J est dit indécomposable si la plus petite permutation σ telle que $\mathbb{P}(\sigma) = J$ est connexe.

Proposition

L'algèbre **Baxter** *est libre sur les éléments* $\mathbf{E}_J$ *tels que* J *est indécomposable.*

Démonstration.

Provient du fait que $\mathbf{E}_J = \mathbf{E}_\sigma$ où σ est la plus petite permutation telle que $\mathbb{P}(\sigma) = J$. La liberté de **Baxter** est impliquée par la liberté de **FQSym** sur les éléments $\mathbf{E}_\sigma$ avec σ connexe. $\square$

Bigèbres bidendriformes

Une algèbre $(A, \cdot)$ admet une structure d'algèbre dendriforme $(A, \prec, \succ)$ si son produit vérifie (entre autres) :

$$x \cdot y = x \prec y + x \succ y.$$

Une cogèbre (C, Δ) admet une structure de cogèbre dendriforme $(C, \Delta_\prec, \Delta_\succ)$ si son coproduit vérifie (entre autres) :

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + \Delta_\prec(x) + \Delta_\succ(x) + x \otimes 1.$$

Une algèbre de Hopf $(H, \cdot, \Delta)$ admet une structure de bigèbre bidendriforme si $(H, \cdot)$ admet une structure d'algèbre dendriforme et (H, Δ) une structure de cogèbre dendriforme (avec en plus des relations de compatibilité).

Structure algébrique de **Baxter**

Proposition

Baxter *est autoduale, libre en tant qu'algèbre dendriforme sur ses éléments totalement primitifs, et l'algèbre de Lie de ses éléments primitifs est libre.*

Démonstration.

Baxter est une sous-bigèbre bidendriforme de **FQSym**. Ceci étant, les trois propriétés de la proposition sont impliquées par les résultats de Foissy [**Foissy**, 2005]. □

Malgré son autodualité établie, aucun isomorphisme entre **Baxter** et **Baxter*** n'est connu.

Conclusion

Ce travail a permis de construire diverses structures combinatoires en rapport avec les objets de Baxter, notamment :

- une AHC ;
- un monoïde, analogue du monoïde plaxique, sylvestre et hypoplaxique ;
- un algorithme d'insertion et une correspondance du type R-S ;
- un treillis.