Opérades des cliques décorées

Samuele Giraudo
LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire CALIN du LIPN

13 juin 2017

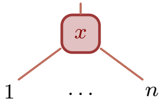
Plan

Plan

Opérades

Opérateurs

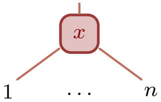
Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



Son arité est son nombre n d'entrées.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



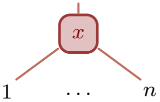
Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x, identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérateurs

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

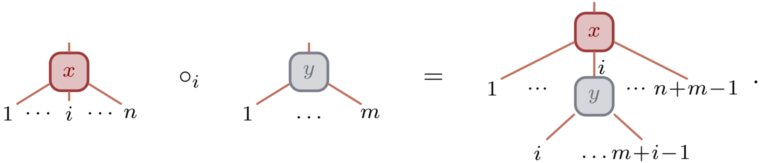


Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x, identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \ ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \ ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \ ;$$

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Opérades

Les opérades sont des structures algébriques formalisant la notion d'opérateur de leur composition.

Une opérade (non symétrique) est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbb{1})$ tel que

1. $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel gradué

$$\mathcal{O} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n) \ ;$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle,

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1), \qquad n, m \geqslant 1, i \in [n] \ ;$$

3. $\mathbb{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Ces objets doivent vérifier des axiomes.

Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$

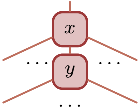
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



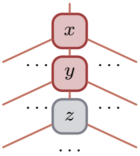
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



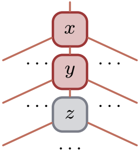
Axiomes des opérades

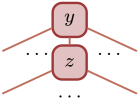
Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$





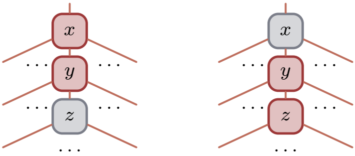
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z \qquad x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$



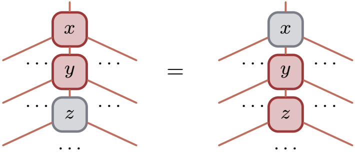
Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

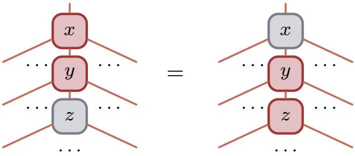
$i \in [n], j \in [m]$



Axiomes des opérades

Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



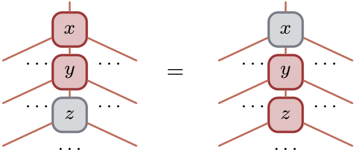
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$

Axiomes des opérades

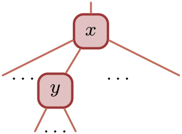
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

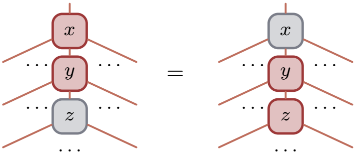
$$(x \circ_i y)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

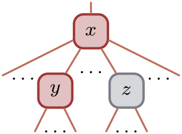
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

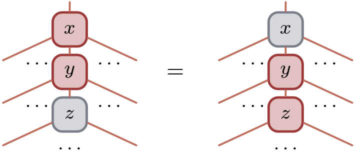
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

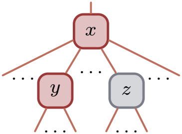
Associativité :

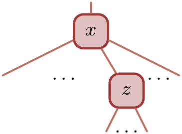
$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$

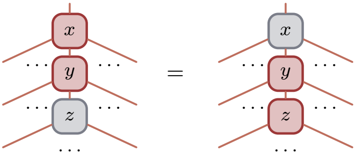




Axiomes des opérades

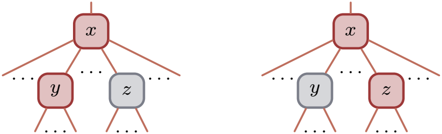
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

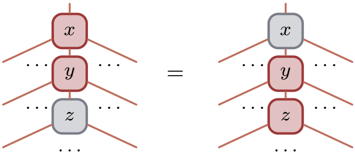
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z \qquad (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

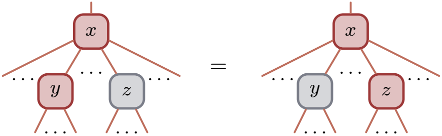
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

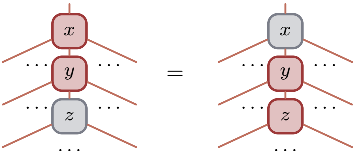
$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Axiomes des opérades

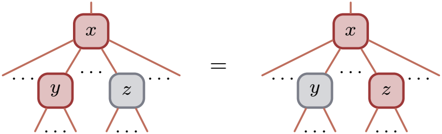
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



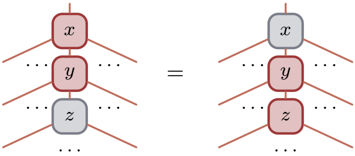
Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$

Axiomes des opérades

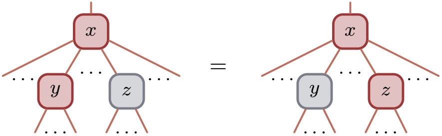
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



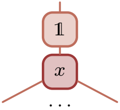
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

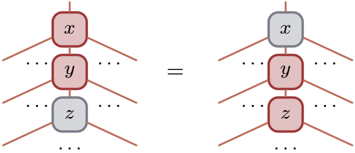
$$\mathbb{1} \circ_1 x$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Axiomes des opérades

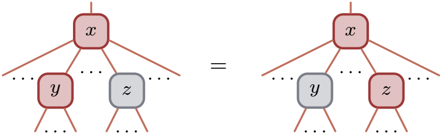
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

$$\mathbb{1} \circ_1 x \quad x$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$

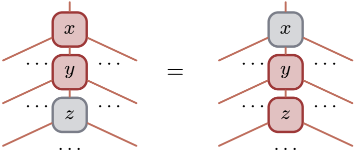
Axiomes des opérades

Associativité :

$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$i \in [n], j \in [m]$

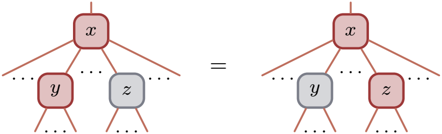


Commutativité :

$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$

$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$

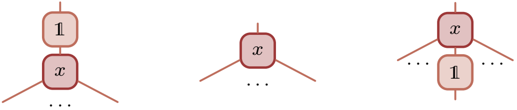


Unitalité :

$\mathbb{1} \circ_1 x \qquad x \qquad x \circ_i \mathbb{1}$

$x \in \mathcal{O}(n)$

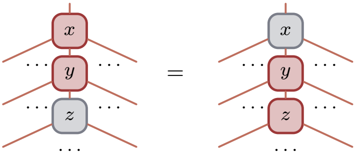
$i \in [n]$



Axiomes des opérades

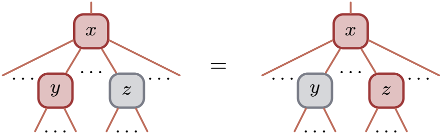
Associativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z = x \circ_i (y \circ_j z)$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$i \in [n], j \in [m]$$



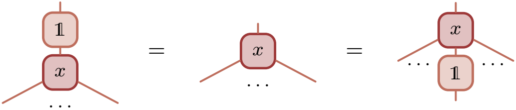
Commutativité :

$$(x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z = (x \circ_j z) \circ_i y$$
$$x \in \mathcal{O}(n), y \in \mathcal{O}(m), z \in \mathcal{O}$$
$$1 \leqslant i < j \leqslant n$$



Unitalité :

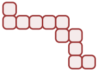
$$\mathbb{1} \circ_1 x = x = x \circ_i \mathbb{1}$$
$$x \in \mathcal{O}(n)$$
$$i \in [n]$$



Exemple : l’opérade des rubans

L’opérade des rubans Comp est définie par :

- Comp(n) est l’espace des diagrammes rubans des compositions d’entiers de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,

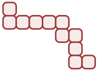


est un ruban d’arité 11 ;

Exemple : l'opérade des rubans

L'opérade des rubans Comp est définie par :

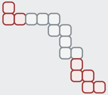
- Comp(n) est l'espace des diagrammes rubans des compositions d'entiers de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,

  est un ruban d'arité 11 ;

- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s'obtient en insérant $\mathfrak{s}$ dans la i^{e} boite de $\mathfrak{r}$ lorsque celle-ci est la plus haute de sa colonne ;

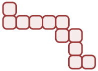
Exemple

 $\circ_4$  $=$  ,

Exemple : l’opérade des rubans

L’opérade des rubans Comp est définie par :

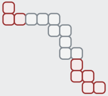
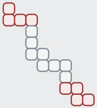
- $\mathrm{Comp}(n)$ est l’espace des diagrammes rubans des compositions d’entiers de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,



est un ruban d’arité 11 ;

- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s’obtient en insérant $\mathfrak{s}$ (resp. le transposé de $\mathfrak{s}$) dans la i^{e} boite de $\mathfrak{r}$ lorsque celle-ci est (resp. n’est pas) la plus haute de sa colonne ;

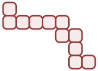
Exemple

 $\circ_4$  $=$  ,  $\circ_5$  $=$ 

Exemple : l'opérade des rubans

L'opérade des rubans Comp est définie par :

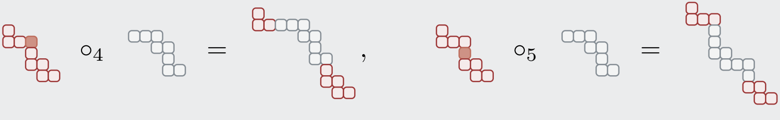
- Comp(n) est l'espace des diagrammes rubans des compositions d'entiers de n pour tout $n \geqslant 1$. P.ex.,

   est un ruban d'arité 11 ;

- la composition partielle $\mathfrak{r} \circ_i \mathfrak{s}$ de deux rubans $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{s}$ s'obtient en insérant $\mathfrak{s}$ (resp. le transposé de $\mathfrak{s}$) dans la i^{e} boite de $\mathfrak{r}$ lorsque celle-ci est (resp. n'est pas) la plus haute de sa colonne ;

- l'unité est le ruban .

Exemple



Exemple : propriétés de Comp

1. Série de Hilbert :

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Comp}}(t) = t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + \cdots .$$

Exemple : propriétés de Comp

1. Série de Hilbert :

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Comp}}(t) = t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + \cdots .$$

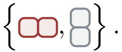
2. Famille génératrice minimale :

Exemple : propriétés de Comp

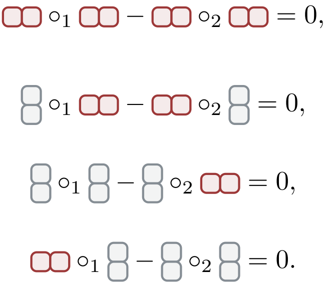
1. Série de Hilbert :

$$\mathcal{H}_{\mathsf{Comp}}(t) = t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + \cdots .$$

2. Famille génératrice minimale :



3. Relations non triviales :



Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

- $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(3)$ sont

Opérades libres

Soit $\mathfrak{G} := \sqcup_{n \geqslant 1} \mathfrak{G}(n)$ un ensemble gradué.

L'opérade libre sur $\mathfrak{G}$ est l'opérade $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ telle que :

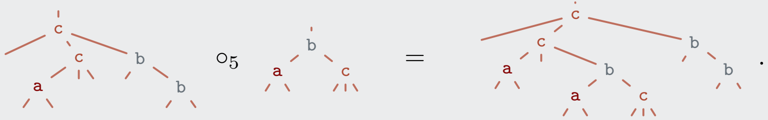
- $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(n)$ est l'espace des arbres syntaxiques sur $\mathfrak{G}$ avec n feuilles ;
- la composition partielle est une greffe d'arbres ;
- l'unité est l'arbre fait d'une feuille.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2) \sqcup \mathfrak{G}(3)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{G}(3) := \{\mathtt{c}\}$.

Les arbres syntaxiques de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})(3)$ sont

Voici une composition partielle dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$:



Quotients d'opérades libres

Un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un idéal d'opérade de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

Quotients d'opérades libres

Un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un idéal d'opérade de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'opérade quotient $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$ est définie de manière habituelle.

Quotients d'opérades libres

Un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un idéal d'opérade de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'opérade quotient $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$ est définie de manière habituelle.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}\}$.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est l'opérade magmatique (espace des arbres binaires).

Quotients d'opérades libres

Un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un idéal d'opérade de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'opérade quotient $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$ est définie de manière habituelle.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}\}$.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est l'opérade magmatique (espace des arbres binaires).

Soit $\mathcal{V}$ l'idéal d'opérades $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}.$$

Quotients d'opérades libres

Un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un idéal d'opérade de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'opérade quotient $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$ est définie de manière habituelle.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}\}$.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est l'opérade magmatique (espace des arbres binaires).

Soit $\mathcal{V}$ l'idéal d'opérades $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}.$$

Comme dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$, les arbres syntaxiques $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a}$ et $\mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$ sont équivalents, $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$ est l'espace des peignes gauches.

Quotients d'opérades libres

Un sous-espace $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est un idéal d'opérade de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ si

$$x \in \mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \text{ et } y \in \mathcal{V} \quad \text{impliquent} \quad x \circ_i y \in \mathcal{V} \text{ et } y \circ_j x \in \mathcal{V}.$$

L'opérade quotient $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$ est définie de manière habituelle.

Exemple

Soit $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(2)$ avec $\mathfrak{G}(2) := \{\mathtt{a}\}$.

$\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ est l'opérade magmatique (espace des arbres binaires).

Soit $\mathcal{V}$ l'idéal d'opérades $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}.$$

Comme dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$, les arbres syntaxiques $\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a}$ et $\mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}$ sont équivalents, $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})/_{\mathcal{V}}$ est l'espace des peignes gauches.

C'est l'opérade associative As.

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;
- $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé espace des relations ;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;
- $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé espace des relations ;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})/_{\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle},$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;
- $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé espace des relations ;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})/_{\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle},$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

La présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est

- binaire quand tous les élément de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ sont d'arité 2 ;

Présentations d'opérades

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Une présentation de $\mathcal{O}$ est un couple $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ tel que

- $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ est un ensemble gradué, appelé ensemble générateur ;
- $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$, appelé espace des relations ;

tel que

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})/_{\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle},$$

où $\langle \mathfrak{R}_{\mathcal{O}} \rangle$ est l'idéal d'opérade engendré par $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$.

La présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$ est

- binaire quand tous les élément de $\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}$ sont d'arité 2 ;
- quadratique quand toutes les éléments de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ ne font intervenir que des arbres syntaxiques à deux nœuds internes.

Exemples : présentations de Comp et de DA.

Exemple

Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où
$\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Cette présentation est binaire et quadratique.

Exemples : présentations de Comp et de DA.

Exemple

Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où
$\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Cette présentation est binaire et quadratique.

Exemple

L'opérade DA des animaux dirigés admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{DA}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{DA}})$ où
$\mathfrak{G}_{\mathsf{DA}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{DA}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{DA}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad (\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b}) \circ_2 \mathtt{b} - (\mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}) \circ_3 \mathtt{b}.$$

Cette présentation est binaire et non quadratique (la dernière relation porte sur des arbres syntaxiques ayant trois nœuds internes).

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

On rappelle que Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

On rappelle que Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

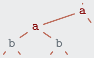
On rappelle que Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

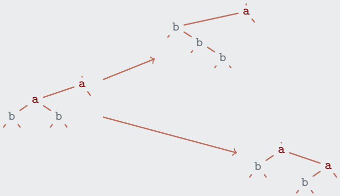
On rappelle que Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

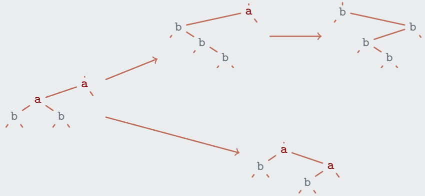
On rappelle que Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

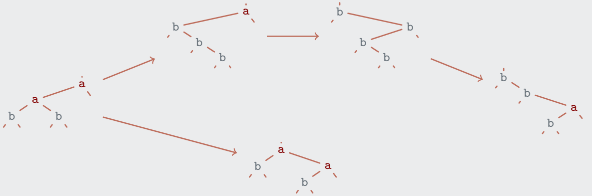
On rappelle que Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



.

Opérades de Koszul

$\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul si son complexe de Koszul est acyclique.

Cette propriété est vérifiée dès qu'il existe une orientation $\Rightarrow$ des relations de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ de sorte que $\Rightarrow$ soit une règle de réécriture convergente sur les arbres de $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})$ [**Hoffbeck**, 2010].

Exemple

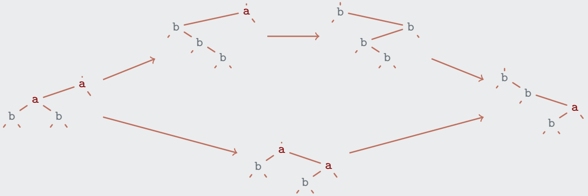
On rappelle que Comp admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}, \mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}})$ où $\mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}} := \mathfrak{G}_{\mathsf{Comp}}(2) := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ et $\mathfrak{R}_{\mathsf{Comp}}$ est l'espace engendré par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} - \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} - \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Pour démontrer que Comp est de Koszul, on considère la règle de réécriture $\Rightarrow$ définie par

$$\mathtt{a} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{a} \Rightarrow \mathtt{a} \circ_2 \mathtt{b}, \quad \mathtt{b} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{a}, \quad \mathtt{a} \circ_1 \mathtt{b} \Rightarrow \mathtt{b} \circ_2 \mathtt{b}.$$

Voici quelques réécritures par $\Rightarrow$:



.

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg, Kapranov**, 1994] de $\mathcal{O}$ est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994] de $\mathcal{O}$ est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \to \mathbb{K}$$

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994] de $\mathcal{O}$ est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \to \mathbb{K}$$

défini linéairement pour tous $x, x', y, y' \in \mathfrak{G}_{\mathcal{O}}(2)$, par

$$\langle x \circ_i y, x' \circ_{i'} y' \rangle := \begin{cases} 1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 1, \\ -1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dualité de Koszul

Soit $\mathcal{O}$ une opérade binaire et quadratique de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}})$.

Le dual de Koszul [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994] de $\mathcal{O}$ est l'opérade $\mathcal{O}^!$ de présentation $(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}}, \mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp})$ où $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}^{\perp}$ est l'annihilateur de $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}}$ par rapport au produit scalaire

$$\langle -, - \rangle : \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \otimes \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_{\mathcal{O}})(3) \to \mathbb{K}$$

défini linéairement pour tous $x, x', y, y' \in \mathfrak{G}_{\mathcal{O}}(2)$, par

$$\langle x \circ_i y, x' \circ_{i'} y' \rangle := \begin{cases} 1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 1, \\ -1 & \text{si } x = x', y = y', \text{ et } i = i' = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, à partir d'une présentation de $\mathcal{O}$, on calcule une présentation de $\mathcal{O}^!$.

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg, Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade $\mathcal{O}$ admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!^!} = \mathcal{O}.$$

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade $\mathcal{O}$ admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!^!} = \mathcal{O}.$$

Théorème [**Ginzburg**, **Kapranov**, 1994]

Lorsque $\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul admettant une présentation binaire et quadratique, les séries de Hilbert de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^!$ vérifient

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(-\mathcal{H}_{\mathcal{O}^!}(-t)) = t.$$

Propriétés de la dualité de Koszul

Théorème [**Ginzburg, Kapranov**, 1994]

Pour toute opérade $\mathcal{O}$ admettant une présentation binaire et quadratique,

$$\mathcal{O}^{!^!} = \mathcal{O}.$$

Théorème [**Ginzburg, Kapranov**, 1994]

Lorsque $\mathcal{O}$ est une opérade de Koszul admettant une présentation binaire et quadratique, les séries de Hilbert de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^!$ vérifient

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}}(-\mathcal{H}_{\mathcal{O}^!}(-t)) = t.$$

Ainsi, lorsque $\mathcal{O}$ admet une présentation binaire et quadratique,

$$\text{présentation de } \mathcal{O} \rightsquigarrow \text{présentation de } \mathcal{O}^!,$$

$$\text{série de Hilbert de } \mathcal{O} \rightsquigarrow \text{série de Hilbert de } \mathcal{O}^!.$$

Plan

Opérades de cliques

Cliques décorées

Soit $(\mathcal{M}, \star, \mathbb{1}_{\mathcal{M}})$ un magma unitaire (axiome : $x \star \mathbb{1}_{\mathcal{M}} = x = \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \star x$).

Cliques décorées

Soit $(\mathcal{M}, \star, \mathbb{1}_{\mathcal{M}})$ un magma unitaire (axiome : $x \star \mathbb{1}_{\mathcal{M}} = x = \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \star x$).

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est une clique sur $[n+1]$ dont chaque arête (x, y) est décorée par un élément $\mathfrak{p}(x, y)$ de $\mathcal{M}$. La taille $|\mathfrak{p}|$ de $\mathfrak{p}$ est n.

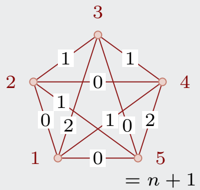
Cliques décorées

Soit $(\mathcal{M}, \star, \mathbb{1}_{\mathcal{M}})$ un magma unitaire (axiome : $x \star \mathbb{1}_{\mathcal{M}} = x = \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \star x$).

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est une clique sur $[n+1]$ dont chaque arête (x, y) est décorée par un élément $\mathfrak{p}(x, y)$ de $\mathcal{M}$. La taille $|\mathfrak{p}|$ de $\mathfrak{p}$ est n.

Exemple

Soit $\mathcal{M}$ le magma $(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, +, 0)$. Voici une $\mathcal{M}$-clique :



.

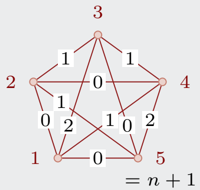
Cliques décorées

Soit $(\mathcal{M}, \star, \mathbb{1}_{\mathcal{M}})$ un magma unitaire (axiome : $x \star \mathbb{1}_{\mathcal{M}} = x = \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \star x$).

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est une clique sur $[n+1]$ dont chaque arête (x, y) est décorée par un élément $\mathfrak{p}(x, y)$ de $\mathcal{M}$. La taille $|\mathfrak{p}|$ de $\mathfrak{p}$ est n.

Exemple

Soit $\mathcal{M}$ le magma $(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, +, 0)$. Voici une $\mathcal{M}$-clique :



Une arête (x, y) de $\mathfrak{p}$ est pleine si $\mathfrak{p}(x, y) \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$.

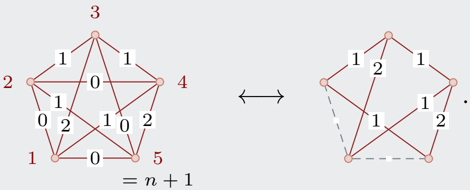
Cliques décorées

Soit $(\mathcal{M}, \star, \mathbb{1}_\mathcal{M})$ un magma unitaire (axiome : $x \star \mathbb{1}_\mathcal{M} = x = \mathbb{1}_\mathcal{M} \star x$).

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est une clique sur $[n+1]$ dont chaque arête (x, y) est décorée par un élément $\mathfrak{p}(x, y)$ de $\mathcal{M}$. La taille $|\mathfrak{p}|$ de $\mathfrak{p}$ est n.

Exemple

Soit $\mathcal{M}$ le magma $(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, +, 0)$. Voici une $\mathcal{M}$-clique :



Une arête (x, y) de $\mathfrak{p}$ est pleine si $\mathfrak{p}(x, y) \neq \mathbb{1}_\mathcal{M}$. On ne représente que les arêtes pleines.

Opérade des cliques

Soit C le foncteur de la catégorie des magmas unitaires vers la catégorie des espaces vectoriels défini par

$$\mathsf{C}\mathcal{M} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathsf{C}\mathcal{M}(n),$$

où $\mathsf{C}\mathcal{M}(n)$ est l'espace des $\mathcal{M}$-cliques de taille n.

Opérade des cliques

Soit C le foncteur de la catégorie des magmas unitaires vers la catégorie des espaces vectoriels défini par

$$\mathsf{C}\mathcal{M} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathsf{C}\mathcal{M}(n),$$

où $\mathsf{C}\mathcal{M}(n)$ est l'espace des $\mathcal{M}$-cliques de taille n.

Par convention, $\mathsf{C}\mathcal{M}(1)$ est l'espace engendré par .

Opérade des cliques

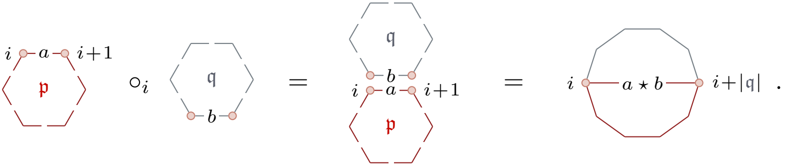
Soit C le foncteur de la catégorie des magmas unitaires vers la catégorie des espaces vectoriels défini par

$$\mathsf{C}\mathcal{M} := \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathsf{C}\mathcal{M}(n),$$

où $\mathsf{C}\mathcal{M}(n)$ est l'espace des $\mathcal{M}$-cliques de taille n.

Par convention, $\mathsf{C}\mathcal{M}(1)$ est l'espace engendré par .

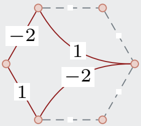
On munit cet espace de la composition partielle $\circ_i$ définie par



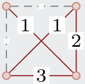
Opérade des cliques

Exemple

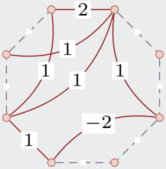
Dans C$\mathbb{Z}$,



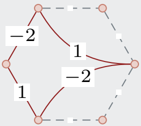
$\circ_2$



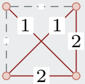
$=$



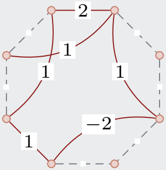
,



$\circ_2$



$=$



.

Propriétés et dimensions

Théorème

C est un foncteur de la catégorie des magmas unitaires vers celle des opérades.

Propriétés et dimensions

Théorème

C est un foncteur de la catégorie des magmas unitaires vers celle des opérades.

Les dimensions de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ vérifient, quand $\mathcal{M}$ est fini, $\dim \mathsf{C}\mathcal{M}(1) = 1$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\dim \mathsf{C}\mathcal{M}(n) = m^{\binom{n+1}{2}},$$

où $m := \#\mathcal{M}$.

P.ex.,

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \qquad m = 1,$$

$$1, 8, 64, 1024, 32768, 2097152, \qquad m = 2,$$

$$1, 27, 729, 59049, 14348907, 10460353203, \qquad m = 3,$$

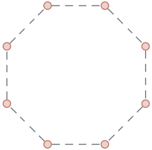
$$1, 64, 4096, 1048576, 1073741824, 4398046511104, \qquad m = 4.$$

$\mathcal{M}$-cliques premières

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est première si pour toute diagonale (x, y), il existe une arête pleine croisant (x, y).

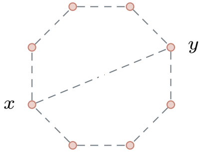
$\mathcal{M}$-cliques premières

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est première si pour toute diagonale (x, y), il existe une arête pleine croisant (x, y).



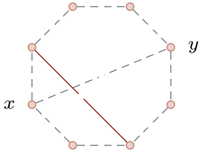
$\mathcal{M}$-cliques premières

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est première si pour toute diagonale (x, y), il existe une arête pleine croisant (x, y).



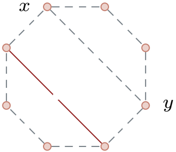
$\mathcal{M}$-cliques premières

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est première si pour toute diagonale (x, y), il existe une arête pleine croisant (x, y).



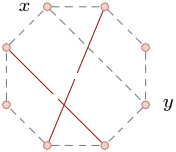
$\mathcal{M}$-cliques premières

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est première si pour toute diagonale (x, y), il existe une arête pleine croisant (x, y).



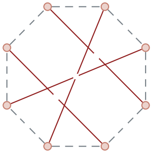
$\mathcal{M}$-cliques premières

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est première si pour toute diagonale (x, y), il existe une arête pleine croisant (x, y).



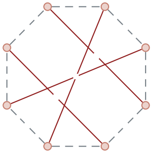
$\mathcal{M}$-cliques premières

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est première si pour toute diagonale (x, y), il existe une arête pleine croisant (x, y).



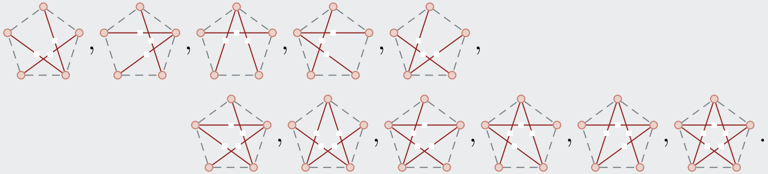
$\mathcal{M}$-cliques premières

Une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est première si pour toute diagonale (x, y), il existe une arête pleine croisant (x, y).



Exemple

Les $\mathcal{M}$-cliques premières d'arité 4 de base et côtés non pleins sont



Famille génératrice

Proposition

L'ensemble des $\mathcal{M}$-cliques premières est un ensemble générateur minimal de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

Famille génératrice

Proposition

L'ensemble des $\mathcal{M}$-cliques premières est un ensemble générateur minimal de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

Cardinaux (pour $m = 2$) :

$$0, 8, 16, 352, 16448, 1380224.$$

Famille génératrice

Proposition

L'ensemble des $\mathcal{M}$-cliques premières est un ensemble générateur minimal de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

Cardinaux (pour $m = 2$) :

$$0, 8, 16, 352, 16448, 1380224.$$

Ces cardinaux sont divisibles par m^{n+1} car les décorations des bases et des côtés sont libres. Ceci donne

$$0, 1, 1, 11, 257, 10783.$$

Famille génératrice

Proposition

L'ensemble des $\mathcal{M}$-cliques premières est un ensemble générateur minimal de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

Cardinaux (pour $m = 2$) :

$$0, 8, 16, 352, 16448, 1380224.$$

Ces cardinaux sont divisibles par m^{n+1} car les décorations des bases et des côtés sont libres. Ceci donne

$$0, 1, 1, 11, 257, 10783.$$

Les nombres de $\mathcal{M}$-cliques premières minimales (au sens des diagonales pleines nécessaires) sont, pour $m = 2$,

$$0, 1, 1, 5, 22, 119.$$

Famille génératrice

Proposition

L'ensemble des $\mathcal{M}$-cliques premières est un ensemble générateur minimal de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

Cardinaux (pour $m = 2$) :

$$0, 8, 16, 352, 16448, 1380224.$$

Ces cardinaux sont divisibles par m^{n+1} car les décorations des bases et des côtés sont libres. Ceci donne

$$0, 1, 1, 11, 257, 10783.$$

Les nombres de $\mathcal{M}$-cliques premières minimales (au sens des diagonales pleines nécessaires) sont, pour $m = 2$,

$$0, 1, 1, 5, 22, 119.$$

Questions

- Dénombrer les $\mathcal{M}$-cliques premières.
- Dénombrer les $\mathcal{M}$-cliques premières minimales.

Bases alternatives

Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux $\mathcal{M}$-cliques.

Bases alternatives

Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux $\mathcal{M}$-cliques.

On pose $\mathfrak{p} \preceq_{\mathrm{be}} \mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{p} \preceq_{\mathrm{d}} \mathfrak{q}$) si $\mathfrak{q}$ peut être obtenue en remplissant la base ou des arêtes du bord (resp. des diagonales) de $\mathfrak{p}$.

Bases alternatives

Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux $\mathcal{M}$-cliques.

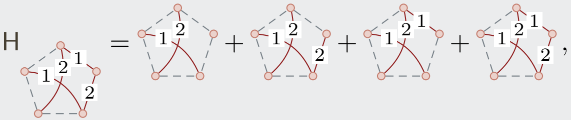
On pose $\mathfrak{p} \preceq_{\mathrm{be}} \mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{p} \preceq_{\mathrm{d}} \mathfrak{q}$) si $\mathfrak{q}$ peut être obtenue en remplissant la base ou des arêtes du bord (resp. des diagonales) de $\mathfrak{p}$.

Soient les éléments de $\mathsf{C}\mathcal{M}$

$$\mathsf{H}_{\mathfrak{p}} := \sum_{\mathfrak{p}' \preceq_{\mathrm{be}} \mathfrak{p}} \mathfrak{p}'$$

Exemple

Dans $\mathsf{C}\mathbb{Z}$,



Bases alternatives

Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux $\mathcal{M}$-cliques.

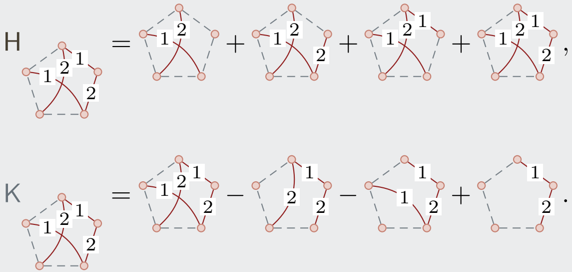
On pose $\mathfrak{p} \preceq_{\mathrm{be}} \mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{p} \preceq_{\mathrm{d}} \mathfrak{q}$) si $\mathfrak{q}$ peut être obtenue en remplissant la base ou des arêtes du bord (resp. des diagonales) de $\mathfrak{p}$.

Soient les éléments de $\mathsf{C}\mathcal{M}$

$$\mathsf{H}_{\mathfrak{p}} := \sum_{\mathfrak{p}' \preceq_{\mathrm{be}} \mathfrak{p}} \mathfrak{p}' \qquad \text{et} \qquad \mathsf{K}_{\mathfrak{p}} := \sum_{\mathfrak{p}' \preceq_{\mathrm{d}} \mathfrak{p}} (-1)^{\mathrm{ham}(\mathfrak{p}', \mathfrak{p})} \mathfrak{p}'.$$

Exemple

Dans $\mathsf{C}\mathbb{Z}$,



Bases alternatives

Proposition

Pour toutes $\mathcal{M}$-cliques $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ différentes de ,

$$\mathsf{H}_{\mathfrak{p}} \circ_i \mathsf{H}_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{H}_{\mathrm{d}_i(\mathfrak{p}) \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathrm{d}_0(\mathfrak{q})} + \mathsf{H}_{\mathrm{d}_i(\mathfrak{p}) \circ_i \mathrm{d}_0(\mathfrak{q})} & \text{si } \mathfrak{p}_i \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \text{ et } \mathfrak{q}_0 \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \\ \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{H}_{\mathrm{d}_i(\mathfrak{p}) \circ_i \mathfrak{q}} & \text{si } \mathfrak{p}_i \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \\ \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathrm{d}_0(\mathfrak{q})} & \text{si } \mathfrak{q}_0 \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \\ \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathrm{d}_0(\mathfrak{p})$ (resp. $\mathrm{d}_i(\mathfrak{p})$) est la $\mathcal{M}$-clique obtenue en effaçant la base (resp. le i^{e} coté) de $\mathfrak{p}$.

Bases alternatives

Proposition

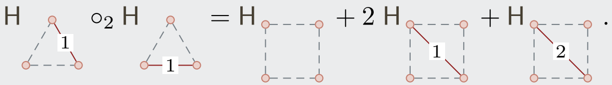
Pour toutes $\mathcal{M}$-cliques $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ différentes de ,

$$\mathsf{H}_{\mathfrak{p}} \circ_i \mathsf{H}_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{H}_{\mathrm{d}_i(\mathfrak{p}) \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathrm{d}_0(\mathfrak{q})} + \mathsf{H}_{\mathrm{d}_i(\mathfrak{p}) \circ_i \mathrm{d}_0(\mathfrak{q})} & \text{si } \mathfrak{p}_i \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \text{ et } \mathfrak{q}_0 \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \\ \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{H}_{\mathrm{d}_i(\mathfrak{p}) \circ_i \mathfrak{q}} & \text{si } \mathfrak{p}_i \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \\ \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathrm{d}_0(\mathfrak{q})} & \text{si } \mathfrak{q}_0 \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \\ \mathsf{H}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathrm{d}_0(\mathfrak{p})$ (resp. $\mathrm{d}_i(\mathfrak{p})$) est la $\mathcal{M}$-clique obtenue en effaçant la base (resp. le i^{e} coté) de $\mathfrak{p}$.

Exemple

Dans $\mathsf{C}\mathbb{Z}$,



Bases alternatives

Proposition

Pour toutes $\mathcal{M}$-cliques $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ différentes de ,

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{p}} \circ_i \mathsf{K}_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} \mathsf{K}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} & \text{si } \mathfrak{p}_i \star \mathfrak{q}_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \\ \mathsf{K}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{K}_{\mathrm{d}_i(\mathfrak{p}) \circ_i \mathrm{d}_0(\mathfrak{q})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Bases alternatives

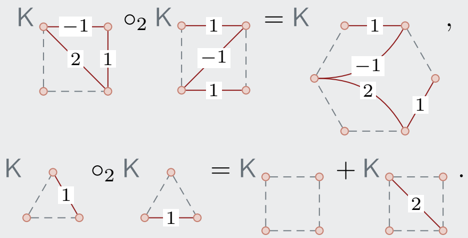
Proposition

Pour toutes $\mathcal{M}$-cliques $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ différentes de ,

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{p}} \circ_i \mathsf{K}_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} \mathsf{K}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} & \text{si } \mathfrak{p}_i \star \mathfrak{q}_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}, \\ \mathsf{K}_{\mathfrak{p} \circ_i \mathfrak{q}} + \mathsf{K}_{\mathrm{d}_i(\mathfrak{p}) \circ_i \mathrm{d}_0(\mathfrak{q})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple

Dans $\mathsf{C}\mathbb{Z}$,



L'opérade des fonctions rationnelles

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \ldots,\}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'opérade des fonctions rationnelles

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \ldots, \}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'espace des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ admet la structure d'opérade [**Loday**, 2010] donnée par

$$f \circ_i g := f\left(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + \cdots + u_{i+m-1}, u_{i+m}, \ldots, u_{n+m-1}\right) g\left(u_i, \ldots, u_{i+m-1}\right),$$

où $f \in \mathbb{K}(u_1, \ldots, u_n)$ et $g \in \mathbb{K}(u_1, \ldots, u_m)$.

L'opérade des fonctions rationnelles

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \dots, \}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'espace des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ admet la structure d'opérade [**Loday**, 2010] donnée par

$$f \circ_i g := f\,(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \dots + u_{i+m-1}, u_{i+m}, \dots, u_{n+m-1})\, g\,(u_i, \dots, u_{i+m-1})\,,$$

où $f \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_n)$ et $g \in \mathbb{K}(u_1, \dots, u_m)$.

Exemple

$$\frac{1}{(u_1 + u_2)u_2} \quad \circ_1 \quad \frac{1}{u_1} \quad = \quad \frac{1}{{u_1}^2 u_3 + u_1 u_2 u_3 + u_1 {u_3}^2}$$

$$\in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3) \qquad \in \mathbb{K}(u_1, u_2) \qquad \in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

L'opérade des fonctions rationnelles

Soit $\mathbb{U} := \{u_1, u_2, \ldots, \}$ un alphabet infini de variables commutatives.

L'espace des fonctions rationnelles $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ admet la structure d'opérade [**Loday**, 2010] donnée par

$$f \circ_i g := f\left(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + \cdots + u_{i+m-1}, u_{i+m}, \ldots, u_{n+m-1}\right) g\left(u_i, \ldots, u_{i+m-1}\right),$$

où $f \in \mathbb{K}(u_1, \ldots, u_n)$ et $g \in \mathbb{K}(u_1, \ldots, u_m)$.

Exemple

$$\frac{1}{(u_1 + u_2)u_2} \quad \circ_1 \quad \frac{1}{u_1} \quad = \quad \frac{1}{{u_1}^2 u_3 + u_1 u_2 u_3 + u_1 {u_3}^2}$$

$$\in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3) \qquad \in \mathbb{K}(u_1, u_2) \qquad \in \mathbb{K}(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

L'unité de $\mathbb{K}(\mathbb{U})$ est la fonction $\mathbb{1} \in \mathbb{K}(\mathbb{U})$ définie par $\mathbb{1}(u_1) := 1$.

Fonctions rationnelles de $\mathbb{Z}$-cliques

Soit

$$\mathrm{F} : \mathsf{C}\mathbb{Z} \to \mathbb{K}(\mathbb{U})$$

l'application linéaire définie par

$$\mathrm{F}(\mathfrak{p}) := \prod_{(x,y)\ \text{arc}} \left(u_x + \cdots + u_{y-1}\right)^{\mathfrak{p}(x,y)}.$$

Fonctions rationnelles de $\mathbb{Z}$-cliques

Soit

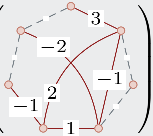
$$\mathrm{F} : \mathsf{C}\mathbb{Z} \to \mathbb{K}(\mathbb{U})$$

l'application linéaire définie par

$$\mathrm{F}(\mathfrak{p}) := \prod_{(x,y) \text{ arc}} \left(u_x + \cdots + u_{y-1}\right)^{\mathfrak{p}(x,y)}.$$

Exemple

$\mathrm{F}\Bigg($



$\Bigg)$

$$= \frac{(u_1+u_2+u_3+u_4)^2\,(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6)\,{u_4}^3}{u_1\,(u_3+u_4+u_5+u_6)^2\,(u_5+u_6)}.$$

Fonctions rationnelles de $\mathbb{Z}$-cliques

Soit

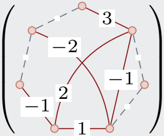
$$\mathrm{F} : \mathsf{C}\mathbb{Z} \to \mathbb{K}(\mathbb{U})$$

l'application linéaire définie par

$$\mathrm{F}(\mathfrak{p}) := \prod_{(x,y) \text{ arc}} \left(u_x + \cdots + u_{y-1}\right)^{\mathfrak{p}(x,y)}.$$

Exemple

F



$$= \frac{(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^2 \, (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6) \, {u_4}^3}{u_1 \, (u_3 + u_4 + u_5 + u_6)^2 \, (u_5 + u_6)}.$$

Théorème

F est un morphisme d'opérades de $\mathsf{C}\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{K}(\mathbb{U})$.

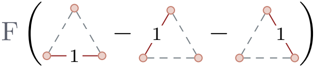
Fonctions rationnelles de $\mathbb{Z}$-cliques

Ce morphisme $\mathrm{F} : \mathsf{C}\mathbb{Z} \to \mathbb{K}(\mathbb{U})$ n'est pas injectif.

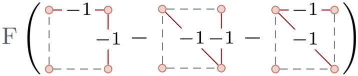
Fonctions rationnelles de $\mathbb{Z}$-cliques

Ce morphisme $\mathrm{F} : \mathsf{C}\mathbb{Z} \to \mathbb{K}(\mathbb{U})$ n'est pas injectif.

On a p.ex.,



$$= (u_1 + u_2) - u_1 - u_2 = 0,$$

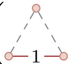


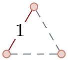
$$= \frac{1}{u_2 u_3} - \frac{1}{(u_2 + u_3) u_3} - \frac{1}{u_2 (u_2 + u_3)} = 0.$$

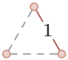
Fonctions rationnelles de $\mathbb{Z}$-cliques

Ce morphisme $\mathrm{F} : \mathsf{C}\mathbb{Z} \to \mathbb{K}(\mathbb{U})$ n'est pas injectif.

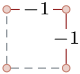
On a p.ex.,

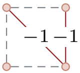
$\mathrm{F}\Big($ 

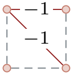
$-$ 

$-$ 

$\Big) = (u_1 + u_2) - u_1 - u_2 = 0,$

$\mathrm{F}\Big($ 

$-$ 

$-$ 

$\Big) = \dfrac{1}{u_2 u_3} - \dfrac{1}{(u_2+u_3)u_3} - \dfrac{1}{u_2(u_2+u_3)} = 0.$

Question

Calculer le noyau de F.

Plan

Sous-opérades et quotients

Sous-opérades et quotients

Idée A. : construire des quotients de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ en

- prenant une famille X de $\mathcal{M}$-cliques ;

Sous-opérades et quotients

Idée A. : construire des quotients de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ en

- prenant une famille X de $\mathcal{M}$-cliques ;
- considérant le sous-espace $\mathfrak{R}_X$ de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ engendré par les $\mathcal{M}$-cliques de $\bar{X}$;

Sous-opérades et quotients

Idée A. : construire des quotients de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ en

- prenant une famille X de $\mathcal{M}$-cliques ;
- considérant le sous-espace $\mathfrak{R}_X$ de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ engendré par les $\mathcal{M}$-cliques de $\bar{X}$;
- lorsque $\mathfrak{R}_X$ est un idéal d'opérades de $\mathsf{C}\mathcal{M}$, le quotient

$$\mathsf{C}\mathcal{M}/_{\mathfrak{R}_X}$$

est une opérade sur X.

Sous-opérades et quotients

Idée A. : construire des quotients de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ en

- prenant une famille X de $\mathcal{M}$-cliques ;
- considérant le sous-espace $\mathfrak{R}_X$ de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ engendré par les $\mathcal{M}$-cliques de $\bar{X}$;
- lorsque $\mathfrak{R}_X$ est un idéal d'opérades de $\mathsf{C}\mathcal{M}$, le quotient

$$\mathsf{C}\mathcal{M}/_{\mathfrak{R}_X}$$

  est une opérade sur X.

Idée B.1. : si $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ sont des idéaux d'une opérade $\mathcal{O}$, $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ est un idéal de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}/_{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}$ un quotient de $\mathcal{O}$.

Sous-opérades et quotients

Idée A. : construire des quotients de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ en

- prenant une famille X de $\mathcal{M}$-cliques ;
- considérant le sous-espace $\mathfrak{R}_X$ de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ engendré par les $\mathcal{M}$-cliques de $\bar{X}$;
- lorsque $\mathfrak{R}_X$ est un idéal d'opérades de $\mathsf{C}\mathcal{M}$, le quotient

  $$\mathsf{C}\mathcal{M}/_{\mathfrak{R}_X}$$

  est une opérade sur X.

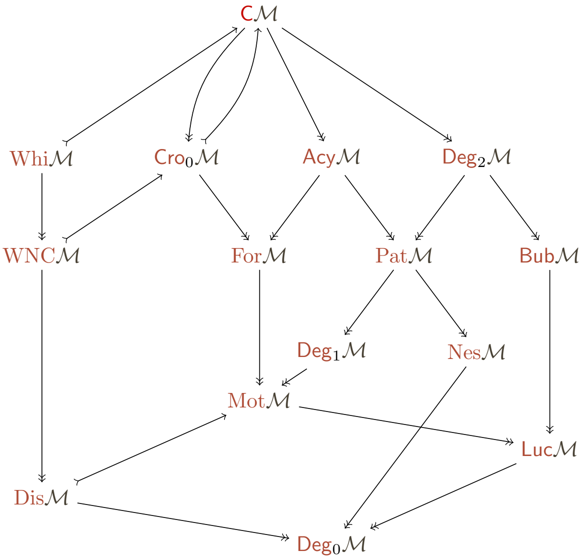
Idée B.1. : si $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ sont des idéaux d'une opérade $\mathcal{O}$, $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ est un idéal de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}/_{\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_2}$ un quotient de $\mathcal{O}$.

Idée B.2. : si $\mathcal{O}'$ est une sous-opérade de $\mathcal{O}$ et $\mathfrak{R}$ est un idéal de $\mathcal{O}$, $\mathfrak{R} \cap \mathcal{O}'$ est un idéal de $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}'/_{\mathfrak{R}\cap\mathcal{O}'}$ un quotient de $\mathcal{O}'$.

Diagramme des sous-opérades et quotients principaux

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{C}\mathcal{M} \arrow[dll, two heads] \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads, bend right] & & \\
\mathsf{Acy}\mathcal{M} \arrow[dd, two heads] \arrow[ddr, two heads] & \mathsf{Deg}_k\mathcal{M} \arrow[d, two heads] & & \mathsf{Cro}_k\mathcal{M} \arrow[ul, tail, bend right] \arrow[d, two heads, bend right] & \mathsf{Lab}_{B,E,D}\mathcal{M} \arrow[ull, tail] \\
 & \mathsf{Deg}_2\mathcal{M} \arrow[dl, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] & & \mathsf{Cro}_0\mathcal{M} \arrow[u, tail, bend right] \arrow[dl, two heads] & \\
\mathrm{Nes}\mathcal{M} \arrow[drr, two heads] & \mathsf{Deg}_1\mathcal{M} \arrow[dr, two heads] & \mathsf{Bub}\mathcal{M} \arrow[d, two heads] & & \mathrm{Whi}\mathcal{M} \arrow[uu, tail] \arrow[dll, two heads] \\
 & & \mathsf{Deg}_0\mathcal{M} & &
\end{tikzcd}
$$

Diagramme des sous-opérades et quotients secondaires



$\mathcal{M}$-cliques à degrés bornés

Le degré d'un sommet x d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre d'arcs pleins adjacents à x.

$\mathcal{M}$-cliques à degrés bornés

Le degré d'un sommet x d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre d'arcs pleins adjacents à x.

Le degré de $\mathfrak{p}$ est le degré maximal de ses sommets.

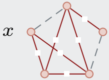
$\mathcal{M}$-cliques à degrés bornés

Le degré d'un sommet x d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre d'arcs pleins adjacents à x.

Le degré de $\mathfrak{p}$ est le degré maximal de ses sommets.

Exemple

Soit la $\mathcal{M}$-clique

$\mathfrak{p} :=$ 

.

Le degré de x est 2. Le degré de $\mathfrak{p}$ est 3.

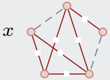
$\mathcal{M}$-cliques à degrés bornés

Le degré d'un sommet x d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre d'arcs pleins adjacents à x.

Le degré de $\mathfrak{p}$ est le degré maximal de ses sommets.

Exemple

Soit la $\mathcal{M}$-clique

$\mathfrak{p} :=$  .

Le degré de x est 2. Le degré de $\mathfrak{p}$ est 3.

Soit $\mathfrak{R}_{\mathsf{Deg}_k \mathcal{M}}$ le sous-espace de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ engendré par les $\mathcal{M}$-cliques de degrés supérieurs à $k+1$.

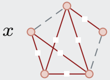
$\mathcal{M}$-cliques à degrés bornés

Le **degré** d'un sommet x d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre d'arcs pleins adjacents à x.

Le **degré** de $\mathfrak{p}$ est le degré maximal de ses sommets.

Exemple

Soit la $\mathcal{M}$-clique

$\mathfrak{p} :=$ 

.

Le degré de x est 2. Le degré de $\mathfrak{p}$ est 3.

Soit $\mathfrak{R}_{\mathsf{Deg}_k \mathcal{M}}$ le sous-espace de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ engendré par les $\mathcal{M}$-cliques de degrés supérieurs à $k+1$.

L'espace quotient

$$\mathsf{Deg}_k \mathcal{M} := \mathsf{C}\mathcal{M} /_{\mathsf{Deg}_k \mathcal{M}}$$

possède comme base les $\mathcal{M}$-cliques de degrés au plus k.

$\mathcal{M}$-cliques à degrés bornés

Proposition

Si $\mathcal{M}$ est sans diviseur de l'unité, $\mathsf{Deg}_k\mathcal{M}$ est une opérade quotient de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$-cliques à degrés bornés

Proposition

Si $\mathcal{M}$ est sans diviseur de l'unité, $\mathsf{Deg}_k\mathcal{M}$ est une opérade quotient de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

Soit

$$\mathbb{D}_\ell := \{\mathbb{1}, 0, \mathtt{d}_1, \dots \mathtt{d}_\ell\}$$

le magma unitaire tel que $\mathbb{1}$ est l'unité, 0 est absorbant et $\mathtt{d}_i \star \mathtt{d}_j = 0$. C'est un magma sans diviseur de l'unité.

$\mathcal{M}$-cliques à degrés bornés

Proposition

Si $\mathcal{M}$ est sans diviseur de l'unité, $\mathsf{Deg}_k\mathcal{M}$ est une opérade quotient de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

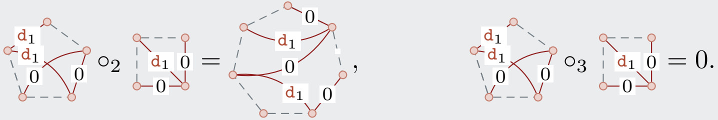
Soit

$$\mathbb{D}_\ell := \{\mathbb{1}, 0, \mathtt{d}_1, \dots \mathtt{d}_\ell\}$$

le magma unitaire tel que $\mathbb{1}$ est l'unité, 0 est absorbant et $\mathtt{d}_i \star \mathtt{d}_j = 0$. C'est un magma sans diviseur de l'unité.

Exemple

Dans $\mathsf{Deg}_3\mathbb{D}_2$,

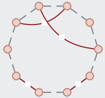


Opérade des involutions

Toute $\mathbb{D}_0$-clique de degré inférieur à 1 est un diagramme d'involution.

Exemple

Cette $\mathbb{D}_0$-clique de degré 1



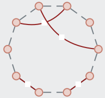
code l'involution $(21)3(64)(58)7(A9)$.

Opérade des involutions

Toute $\mathbb{D}_0$-clique de degré inférieur à 1 est un diagramme d'involution.

Exemple

Cette $\mathbb{D}_0$-clique de degré 1



code l'involution $(21)3(64)(58)7(A9)$.

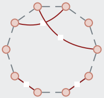
De ce fait, $\mathrm{Deg}_1\mathbb{D}_0$ est une opérade sur les involutions.

Opérade des involutions

Toute $\mathbb{D}_0$-clique de degré inférieur à 1 est un diagramme d'involution.

Exemple

Cette $\mathbb{D}_0$-clique de degré 1

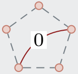


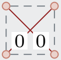
code l'involution $(21)3(64)(58)7(A9)$.

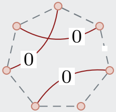
De ce fait, $\mathsf{Deg}_1\mathbb{D}_0$ est une opérade sur les involutions.

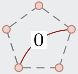
Exemple

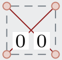
On a ainsi, dans $\mathsf{Deg}_1\mathbb{D}_0$,



$\circ_2$


$=$


,


$\circ_3$


$= 0.$

$\mathcal{M}$-cliques à croisements bornés

Le croisement d'une diagonale (x, y) d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre de diagonales pleines croisant (x, y).

$\mathcal{M}$-cliques à croisements bornés

Le croisement d'une diagonale (x, y) d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre de diagonales pleines croisant (x, y).

Le croisement de $\mathfrak{p}$ est le croisement maximal de ses diagonales.

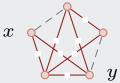
$\mathcal{M}$-cliques à croisements bornés

Le croisement d'une diagonale (x, y) d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre de diagonales pleines croisant (x, y).

Le croisement de $\mathfrak{p}$ est le croisement maximal de ses diagonales.

Exemple

Soit la $\mathcal{M}$-clique

$\mathfrak{p} :=$ 

.

Le croisement de (x, y) est 2. Le croisement de $\mathfrak{p}$ est 2.

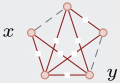
$\mathcal{M}$-cliques à croisements bornés

Le croisement d'une diagonale (x, y) d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre de diagonales pleines croisant (x, y).

Le croisement de $\mathfrak{p}$ est le croisement maximal de ses diagonales.

Exemple

Soit la $\mathcal{M}$-clique

$\mathfrak{p} :=$  .

Le croisement de (x, y) est 2. Le croisement de $\mathfrak{p}$ est 2.

Soit $\mathfrak{R}_{\mathsf{Cro}_k \mathcal{M}}$ le sous-espace de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ engendré par les $\mathcal{M}$-cliques de croisements supérieurs à $k + 1$.

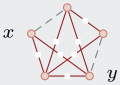
$\mathcal{M}$-cliques à croisements bornés

Le croisement d'une diagonale (x, y) d'une $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ est le nombre de diagonales pleines croisant (x, y).

Le croisement de $\mathfrak{p}$ est le croisement maximal de ses diagonales.

Exemple

Soit la $\mathcal{M}$-clique

$\mathfrak{p} :=$ 

.

Le croisement de (x, y) est 2. Le croisement de $\mathfrak{p}$ est 2.

Soit $\mathfrak{R}_{\mathsf{Cro}_k \mathcal{M}}$ le sous-espace de $\mathsf{C}\mathcal{M}$ engendré par les $\mathcal{M}$-cliques de croisements supérieurs à $k + 1$.

L'espace quotient

$$\mathsf{Cro}_k \mathcal{M} := \mathsf{C}\mathcal{M} /_{\mathsf{Cro}_k \mathcal{M}}$$

possède comme base les $\mathcal{M}$-cliques de croisements au plus k.

$\mathcal{M}$-cliques à croisements bornés

Proposition

$\mathsf{Cro}_k\mathcal{M}$ est à la fois une sous-opérade et une opérade quotient de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

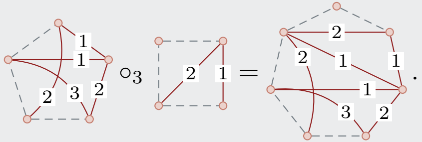
$\mathcal{M}$-cliques à croisements bornés

Proposition

$\mathsf{Cro}_k\mathcal{M}$ est à la fois une sous-opérade et une opérade quotient de $\mathsf{C}\mathcal{M}$.

Exemple

Dans $\mathsf{Cro}_2\mathbb{Z}$,



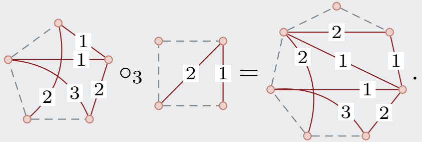
$\mathcal{M}$-cliques à croisements bornés

Proposition

$\mathrm{Cro}_k\mathcal{M}$ est à la fois une sous-opérade et une opérade quotient de $\mathrm{C}\mathcal{M}$.

Exemple

Dans $\mathrm{Cro}_2\mathbb{Z}$,

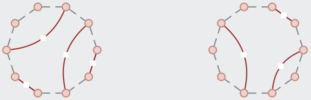


$\mathrm{Cro}_0\mathcal{M}$ et une opérade de configurations non croisées : celle-ci possède comme base les $\mathcal{M}$-cliques dont aucune diagonale pleine ne croise une autre.

L'opérade des configurations de Motzkin

Une configuration de Motzkin est une $\mathbb{D}_0$-clique de croisement nul et de degré 0 ou 1.

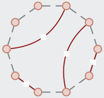
Exemple

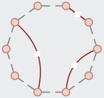


L'opérade des configurations de Motzkin

Une configuration de Motzkin est une $\mathbb{D}_0$-clique de croisement nul et de degré 0 ou 1.

Exemple





Ainsi, l'espace

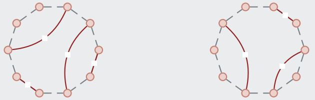
$$\mathrm{Mot}\mathbb{D}_0 := \mathsf{C}\mathbb{D}_0 / _{\mathfrak{R}_{\mathsf{Cro}_0 \mathbb{D}_0} + \mathfrak{R}_{\mathsf{Deg}_1 \mathbb{D}_0}}$$

admet pour base l'ensemble des configurations de Motkzin.

L'opérade des configurations de Motzkin

Une configuration de Motzkin est une $\mathbb{D}_0$-clique de croisement nul et de degré 0 ou 1.

Exemple



Ainsi, l'espace

$$\mathrm{Mot}\mathbb{D}_0 := \mathsf{C}\mathbb{D}_0 / _{\mathfrak{R}_{\mathsf{Cro}_0 \mathbb{D}_0} + \mathfrak{R}_{\mathsf{Deg}_1 \mathbb{D}_0}}$$

admet pour base l'ensemble des configurations de Motkzin.

Proposition

$\mathrm{Mot}\mathbb{D}_0$ est une opérade quotient de $\mathsf{C}\mathbb{D}_0$.

Plan

Opérades de configurations non croisées

$\mathcal{M}$-cliques non croisées et arbres duaux

Soit $\mathrm{NC}\mathcal{M} := \mathsf{Cro}_0\mathcal{M}$ l'opérade des configurations non croisées.

$\mathcal{M}$-cliques non croisées et arbres duaux

Soit $\mathrm{NC}\mathcal{M} := \mathsf{Cro}_0\mathcal{M}$ l'opérade des configurations non croisées.

Toute $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ peut se voir comme un arbre, en considérant l'arbre dual de $\mathfrak{p}$.

$\mathcal{M}$-cliques non croisées et arbres duaux

Soit $\mathrm{NC}\mathcal{M} := \mathsf{Cro}_0\mathcal{M}$ l'opérade des configurations non croisées.

Toute $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ peut se voir comme un arbre, en considérant l'arbre dual de $\mathfrak{p}$.

On obtient des arbres étiquetés par des bulles dont les bases sont vides (sauf éventuellement la racine).

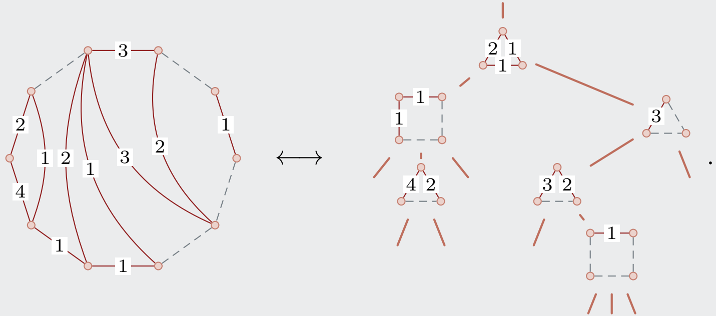
$\mathcal{M}$-cliques non croisées et arbres duaux

Soit $\mathsf{NC}\mathcal{M} := \mathsf{Cro}_0\mathcal{M}$ l'opérade des configurations non croisées.

Toute $\mathcal{M}$-clique $\mathfrak{p}$ de $\mathsf{NC}\mathcal{M}$ peut se voir comme un arbre, en considérant l'arbre dual de $\mathfrak{p}$.

On obtient des arbres étiquetés par des bulles dont les bases sont vides (sauf éventuellement la racine).

Exemple



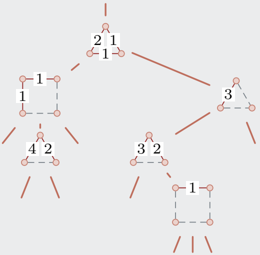
$\mathcal{M}$-arbres de Schröder

Ces arbres duaux peuvent se représenter par des arbres de Schröder dont les arêtes internes sont étiquetées sur $\mathcal{M} \setminus \{\mathbb{1}_{\mathcal{M}}\}$ et les arêtes externes sur $\mathcal{M}$.

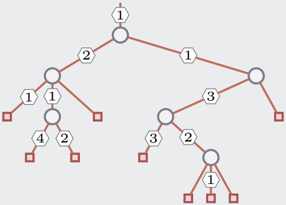
$\mathcal{M}$-arbres de Schröder

Ces arbres duaux peuvent se représenter par des arbres de Schröder dont les arêtes internes sont étiquetées sur $\mathcal{M} \setminus \{\mathbb{1}_{\mathcal{M}}\}$ et les arêtes externes sur $\mathcal{M}$.

Exemple



$\longleftrightarrow$



Composition de $\mathcal{M}$-arbres de Schröder

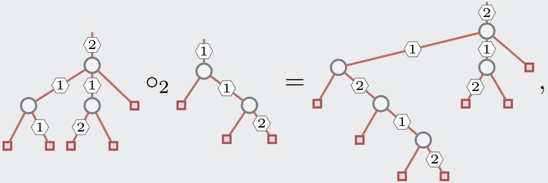
La composition de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ se traduit sur les $\mathcal{M}$-arbres de Schröder en termes de greffes d'arbres et de contractions d'arêtes.

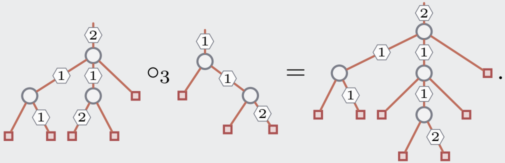
Composition de $\mathcal{M}$-arbres de Schröder

La composition de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ se traduit sur les $\mathcal{M}$-arbres de Schröder en termes de greffes d'arbres et de contractions d'arêtes.

Exemple

Dans $\mathrm{NC}\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$,





Famille génératrice

Proposition

L'ensemble

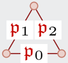
$$\mathfrak{G}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}} := \left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{p}_1 \; \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{p}_0 \end{array} : \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathcal{M} \right\}$$

des $\mathcal{M}$-triangles est un ensemble générateur minimal de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$.

Famille génératrice

Proposition

L'ensemble

$\mathfrak{G}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}} := \Big\{$ 

$: \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathcal{M} \Big\}$

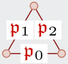
des $\mathcal{M}$-triangles est un ensemble générateur minimal de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$.

Ainsi, $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ est une opérade binaire.

Famille génératrice

Proposition

L'ensemble

$\mathfrak{G}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}} := \Big\{$ 

$: \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathcal{M} \Big\}$

des $\mathcal{M}$-triangles est un ensemble générateur minimal de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$.

Ainsi, $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ est une opérade binaire.

De plus, $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ est aussi

1. la plus petite sous-opérade de $\mathrm{C}\mathcal{M}$ qui contient tous les $\mathcal{M}$-triangles ;
2. la plus grosse sous-opérade binaire de $\mathrm{C}\mathcal{M}$.

Dimensions

Proposition

Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, la série de Hilbert de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ vérifie

$$t + \left(m^3 - 2m^2 + 2m - 1\right) t^2 \\ + \left(2m^2 t - 3mt + 2t - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}(t) + (m-1)\, \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}(t)^2 = 0,$$

où $m := \#\mathcal{M}$.

Dimensions

Proposition

Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, la série de Hilbert de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ vérifie

$$t + \left(m^3 - 2m^2 + 2m - 1\right) t^2 \\ + \left(2m^2 t - 3mt + 2t - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}(t) + (m-1)\, \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}(t)^2 = 0,$$

où $m := \#\mathcal{M}$.

On a aussi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\dim \mathrm{NC}\mathcal{M}(n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-2} m^{n+k+1} (m-1)^{n-k-2} \, \frac{1}{k+1} \binom{n-2}{k} \binom{n-1}{k}.$$

Dimensions

Proposition

Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, la série de Hilbert de $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ vérifie

$$t + \left(m^3 - 2m^2 + 2m - 1\right) t^2 \\ + \left(2m^2 t - 3mt + 2t - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}(t) + (m-1)\, \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}(t)^2 = 0,$$

où $m := \#\mathcal{M}$.

On a aussi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\dim \mathrm{NC}\mathcal{M}(n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-2} m^{n+k+1} (m-1)^{n-k-2} \frac{1}{k+1} \binom{n-2}{k} \binom{n-1}{k}.$$

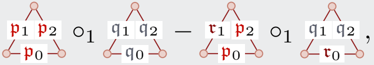
P.ex.,

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, \qquad m = 1,$$
$$1, 8, 48, 352, 2880, 25216, \qquad m = 2,$$
$$1, 27, 405, 7533, 156735, 349263, \qquad m = 3,$$
$$1, 64, 1792, 62464, 2437120, 101859328, \qquad m = 4.$$

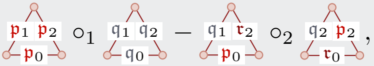
Présentation

Théorème

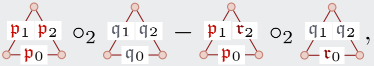
Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}, \mathfrak{R}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}})$ où $\mathfrak{R}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}$ est engendré par



si $\mathfrak{p}_1 \star \mathfrak{q}_0 = \mathfrak{r}_1 \star \mathfrak{r}_0 \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$,



si $\mathfrak{p}_1 \star \mathfrak{q}_0 = \mathfrak{r}_2 \star \mathfrak{r}_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$,



si $\mathfrak{p}_2 \star \mathfrak{q}_0 = \mathfrak{r}_2 \star \mathfrak{r}_0 \neq \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$.

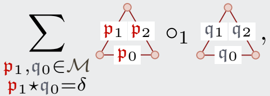
Ainsi, $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ est binaire et quadratique.

Dual de Koszul

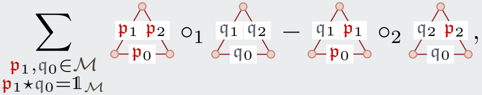
Par conséquent, $\mathrm{NC}\mathcal{M}$ admet un dual de Koszul $\mathrm{NC}\mathcal{M}^!$.

Proposition

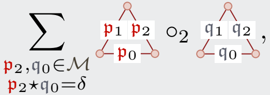
Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, $\mathrm{NC}\mathcal{M}!$ admet la présentation $(\mathfrak{G}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}, \mathfrak{R}^!_{\mathrm{NC}\mathcal{M}})$ où $\mathfrak{R}^!_{\mathrm{NC}\mathcal{M}}$ est engendré par



$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{M}, \delta \in \mathcal{M} \setminus \{\mathbb{1}_{\mathcal{M}}\},$



$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{M},$



$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathcal{M}, \delta \in \mathcal{M} \setminus \{\mathbb{1}_{\mathcal{M}}\}.$

Dimensions

Proposition

Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, la série de Hilbert de $\mathrm{NC}\mathcal{M}^!$ vérifie

$$t + (m-1)t^2 + \left(2m^2t - 3mt + 2t - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}^!}(t) + \left(m^3 - 2m^2 + 2m - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}^!}(t)^2 = 0,$$

où $m := \#\mathcal{M}$.

Dimensions

Proposition

Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, la série de Hilbert de $\mathrm{NC}\mathcal{M}^!$ vérifie

$$t + (m-1)t^2 + \left(2m^2t - 3mt + 2t - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}^!}(t) + \left(m^3 - 2m^2 + 2m - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}^!}(t)^2 = 0,$$

où $m := \#\mathcal{M}$.

On a aussi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\dim \mathrm{NC}\mathcal{M}^!(n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-2} m^{n+1} (m(m-1)+1)^k (m(m-1))^{n-k-2} \frac{1}{k+1} \binom{n-2}{k} \binom{n-1}{k}.$$

Dimensions

Proposition

Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, la série de Hilbert de $\mathrm{NC}\mathcal{M}^!$ vérifie

$$t + (m-1)t^2 + \left(2m^2 t - 3mt + 2t - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}^!}(t) + \left(m^3 - 2m^2 + 2m - 1\right) \mathcal{H}_{\mathrm{NC}\mathcal{M}^!}(t)^2 = 0,$$

où $m := \#\mathcal{M}$.

On a aussi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\dim \mathrm{NC}\mathcal{M}^!(n) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-2} m^{n+1} (m(m-1)+1)^k (m(m-1))^{n-k-2} \frac{1}{k+1} \binom{n-2}{k} \binom{n-1}{k}.$$

P.ex.,

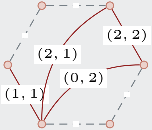
$$\begin{aligned} 1, 1, 1, 1, 1, 1, &\qquad m = 1, \\ 1, 8, 80, 992, 13760, 204416, &\qquad m = 2, \\ 1, 27, 1053, 51273, 2795715, 163318599, &\qquad m = 3, \\ 1, 64, 6400, 799744, 111923200, 16782082048, &\qquad m = 4. \end{aligned}$$

Réalisation partielle

Une $\mathcal{M}$-clique duale est une $\mathcal{M}^2$-clique telle que sa base et ses côtés sont décorés par des $(a, a) \in \mathcal{M}^2$ et ses diagonales pleines par des $(a, b) \in \mathcal{M}^2$ tels que $a \neq b$.

Exemple

Voici une $\mathbb{Z}$-clique duale :



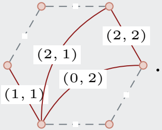
.

Réalisation partielle

Une $\mathcal{M}$-clique duale est une $\mathcal{M}^2$-clique telle que sa base et ses côtés sont décorés par des $(a, a) \in \mathcal{M}^2$ et ses diagonales pleines par des $(a, b) \in \mathcal{M}^2$ tels que $a \neq b$.

Exemple

Voici une $\mathbb{Z}$-clique duale :



Proposition

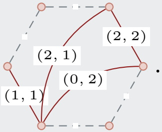
Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, $\mathrm{NC}\mathcal{M}^!$ possède comme base l'ensemble des $\mathcal{M}$-cliques duales non croisées.

Réalisation partielle

Une $\mathcal{M}$-clique duale est une $\mathcal{M}^2$-clique telle que sa base et ses côtés sont décorés par des $(a, a) \in \mathcal{M}^2$ et ses diagonales pleines par des $(a, b) \in \mathcal{M}^2$ tels que $a \neq b$.

Exemple

Voici une $\mathbb{Z}$-clique duale :



Proposition

Lorsque $\mathcal{M}$ est fini, $\mathrm{NC}\mathcal{M}^!$ possède comme base l'ensemble des $\mathcal{M}$-cliques duales non croisées.

Question

Définir une composition partielle sur les $\mathcal{M}$-cliques duales pour obtenir une réalisation de $\mathrm{NC}\mathcal{M}^!$.