Grammaires à bourgeons

Samuele Giraudo
LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Séminaire CALIN du LIPN

13 juin 2017

Plan

Séries formelles et structures algébriques

Grammaires à bourgeons

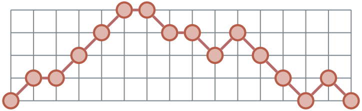
Séries, grammaires et dénombrement

Plan

Séries formelles et structures algébriques

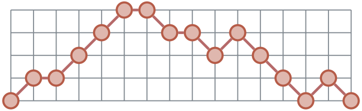
Séries génératrices

Considérons l'ensemble des chemins de Motzkin, chemins dans $\mathbb{N}^2$ allant de $(0,0)$ à $(n,0)$, faits de pas $(+1,+1)$, $(+1,-1)$ et $(+1,0)$.



Séries génératrices

Considérons l'ensemble des chemins de Motzkin, chemins dans $\mathbb{N}^2$ allant de $(0,0)$ à $(n,0)$, faits de pas $(+1,+1)$, $(+1,-1)$ et $(+1,0)$.

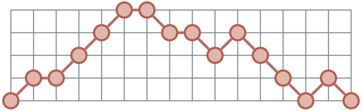


Par des raisonnements assez élémentaires, on obtient que la série génératrice $S(t)$ de ces objets en fonction de leur taille n vérifie

$$S(t) = 1 + tS(t) + t^2S(t)^2$$

Séries génératrices

Considérons l'ensemble des chemins de Motzkin, chemins dans $\mathbb{N}^2$ allant de $(0, 0)$ à $(n, 0)$, faits de pas $(+1, +1)$, $(+1, -1)$ et $(+1, 0)$.



Par des raisonnements assez élémentaires, on obtient que la série génératrice $S(t)$ de ces objets en fonction de leur taille n vérifie

$$S(t) = 1 + tS(t) + t^2 S(t)^2$$

et

$$S(t) = 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + 9t^4 + 21t^5 + 51t^6 + 127t^7 + \cdots .$$

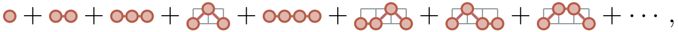
Séries génératrices d'objets

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des séries d'objets combinatoires.

Séries génératrices d'objets

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des séries d'objets combinatoires.

Soit en effet la série

$\mathbf{f} :=$ 

construite comme étant la somme formelle de tous les chemins de Motzkin.

Séries génératrices d'objets

Au lieu de considérer cette série de $\mathbb{N}[[t]]$ dénombrant ces chemins, il est possible de travailler avec des séries d'objets combinatoires.

Soit en effet la série

construite comme étant la somme formelle de tous les chemins de Motzkin.

Ici, $\mathbf{f}$ est une application

$$\mathbf{f} : M \to \mathbb{N},$$

où M est l'ensemble des chemins de Motzkin, qui associe à chaque chemin de Motzkin son coefficient (1 ici) dans la série.

Structure sur les objets

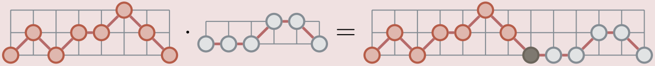
Soit $(C, \cdot, \circ)$ le monoïde de tous les chemins (pas que de Motzkin) dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

Structure sur les objets

Soit $(C, \cdot, \circ)$ le monoïde de tous les chemins (pas que de Motzkin) dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

L'ensemble M des chemins de Motzkin forme un sous-monoïde de C.

Exemple

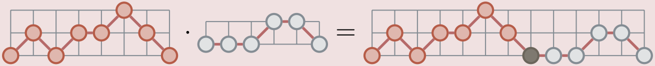


Structure sur les objets

Soit $(C, \cdot,$  $)$ le monoïde de tous les chemins (pas que de Motzkin) dans $\mathbb{N}^2$ où $\cdot$ est le produit consistant à concaténer les chemins.

L'ensemble M des chemins de Motzkin forme un sous-monoïde de C.

Exemple



Le produit $\cdot$ se prolonge sur les séries de chemins et permet d'écrire (après vérification de quelques détails techniques),

$\mathbf{f} =$  $+$  $\cdot \mathbf{f} +$  $\cdot \mathbf{f} \cdot$  $\cdot \mathbf{f}.$

On retrouve ainsi l'expression quadratique précédente pour la série génératrice $S(t)$ des chemins de Motzkin.

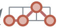
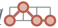
Enrichissements

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon leur nombre de pas $(+1, 0)$.

Enrichissements

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon leur nombre de pas $(+1, 0)$.

Soit en effet la série

$\mathbf{g} :=$  $+\, q$  $+\, q^2$  $+$  $+\, q^3$  $+\, q$  $+\, q$  $+\, q$  $+ \cdots .$

où le coefficient de chaque chemin de Motzkin est q^k, où k est le nombre de pas $(+1, 0)$ du chemin.

Enrichissements

On peut également dénombrer les chemins de Motzkin selon leur nombre de pas $(+1, 0)$.

Soit en effet la série

où le coefficient de chaque chemin de Motzkin est q^k, où k est le nombre de pas $(+1, 0)$ du chemin.

Elle admet l'expression

ce qui implique que la série génératrice des chemins de Motzkin comptés par taille et nombre de pas $(+1, 0)$ vérifie

$$S(t, z) = 1 + tzS(t, z) + t^2 S(t, z)^2.$$

Séries génératrices d'objets structurés

Ainsi, pour dénombrer un ensemble X d'objets combinatoires, travailler directement avec des séries sur X et exprimer la série $\mathbf{f}$ de X permet

1. de retrouver la série génératrice usuelle de X ;
2. de raffiner le dénombrement pour prendre en compte diverses statistiques sur les objets de X.

Séries génératrices d'objets structurés

Ainsi, pour dénombrer un ensemble X d'objets combinatoires, travailler directement avec des séries sur X et exprimer la série $\mathbf{f}$ de X permet

1. de retrouver la série génératrice usuelle de X ;
2. de raffiner le dénombrement pour prendre en compte diverses statistiques sur les objets de X.

Ceci est rendu plus simple lorsque X forme une structure algébrique suffisamment riche.

Séries génératrices d'objets structurés

Ainsi, pour dénombrer un ensemble X d'objets combinatoires, travailler directement avec des séries sur X et exprimer la série $\mathbf{f}$ de X permet

1. de retrouver la série génératrice usuelle de X ;
2. de raffiner le dénombrement pour prendre en compte diverses statistiques sur les objets de X.

Ceci est rendu plus simple lorsque X forme une structure algébrique suffisamment riche.

Les opérations disponibles sur X se traduisent en des opérations sur les séries.

On obtient alors une expression pour $\mathbf{f}$ en utilisant ces opérations et des éléments de X qui jouent le rôle de générateurs.

Séries formelles d'objets

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ suffit ici) et X en ensemble.

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$. Muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Séries formelles d'objets

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ suffit ici) et X en ensemble.

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$. Muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f} \rangle$.

Séries formelles d'objets

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ suffit ici) et X en ensemble.

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$. Muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f}\rangle$.

Le support de $\mathbf{f}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(\mathbf{f}) := \{x \in X : \langle x, \mathbf{f}\rangle \neq 0\}.$$

Séries formelles d'objets

Soient $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ suffit ici) et X en ensemble.

Une X-série est une application

$$\mathbf{f} : X \to \mathbb{K}.$$

L'ensemble de ces séries est noté $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$. Muni de l'addition point par point et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ forme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Le coefficient $\mathbf{f}(x)$ de $x \in X$ dans $\mathbf{f}$ est noté $\langle x, \mathbf{f}\rangle$.

Le support de $\mathbf{f}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(\mathbf{f}) := \{x \in X : \langle x, \mathbf{f}\rangle \neq 0\}.$$

La notation étendue de $\mathbf{f}$ est

$$\mathbf{f} = \sum_{x \in X} \langle x, \mathbf{f}\rangle\, x.$$

Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de X-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;

Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de X-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- X monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;

Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de X-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- X monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;
- X monoïde libre $\rightsquigarrow$ séries non commutatives de mots [**Eilenberg**, 1974] ;

Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de X-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- X monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;
- X monoïde libre $\rightsquigarrow$ séries non commutatives de mots [**Eilenberg**, 1974] ;
- X monoïde $\rightsquigarrow$ séries sur monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978] ;

Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de X-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- X monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;
- X monoïde libre $\rightsquigarrow$ séries non commutatives de mots [**Eilenberg**, 1974] ;
- X monoïde $\rightsquigarrow$ séries sur monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978] ;
- X ensemble d'arbres $\rightsquigarrow$ séries d'arbres [**Berstel, Reutenauer**, 1982] ;

Structures algébriques et séries formelles

Beaucoup de X-séries ont été étudiées. P.ex.,

- $X \simeq (\mathbb{N}, +) \rightsquigarrow$ séries formelles habituelles ;
- X monoïde commutatif libre $\rightsquigarrow$ séries formelles multivariées ;
- X monoïde libre $\rightsquigarrow$ séries non commutatives de mots [**Eilenberg**, 1974] ;
- X monoïde $\rightsquigarrow$ séries sur monoïdes [**Salomaa, Soittola**, 1978] ;
- X ensemble d'arbres $\rightsquigarrow$ séries d'arbres [**Berstel, Reutenauer**, 1982] ;
- X opérade $\rightsquigarrow$ séries sur opérades [**Chapoton**, 2002, 2008].

Plusieurs variantes existent concernant les séries sur opérades.

Opérades

Une opérade non symétrique ensembliste est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

Opérades

Une opérade non symétrique ensembliste est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

Opérades

Une opérade non symétrique ensembliste est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n+m-1),$$

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

Opérades

Une opérade non symétrique ensembliste est un triplet $(\mathcal{O}, \circ_i, \mathbf{1})$ où

1. $\mathcal{O}$ est un ensemble gradué

$$\mathcal{O} := \bigsqcup_{n \geqslant 1} \mathcal{O}(n),$$

2. $\circ_i$ est une application de composition partielle

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(n + m - 1),$$

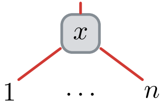
3. $\mathbf{1}$ est un élément de $\mathcal{O}(1)$, appelé unité.

Ces données doivent vérifier un certain nombre d'axiomes.

Opérades et opérateurs

Les opérades fournissent une abstraction de la notion d'opérateur.

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

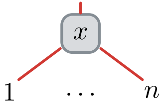


Son arité est son nombre n d'entrées.

Opérades et opérateurs

Les opérades fournissent une abstraction de la notion d'opérateur.

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.



Son arité est son nombre n d'entrées.

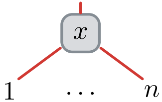
Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x, identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Opérades et opérateurs

Les opérades fournissent une abstraction de la notion d'opérateur.

Un opérateur est une entité ayant $n \geqslant 1$ entrées et une sortie.

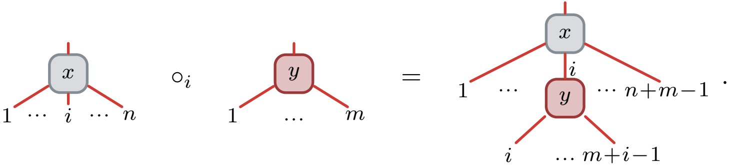


Son arité est son nombre n d'entrées.

Composer deux opérateurs x et y consiste à

1. choisir une entrée de x, identifiée par sa position i ;
2. greffer la sortie de y sur cette entrée.

Ceci produit un nouvel opérateur $x \circ_i y$ d'arité $n + m - 1$:



L'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin Motz est définie de la manière suivante :

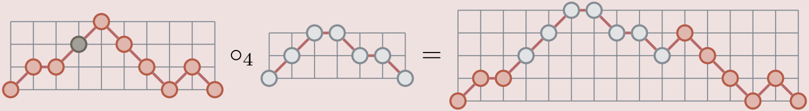
- $\mathsf{Motz}(n)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin ayant $n-1$ pas ;
- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin consiste à substituer y au i^{e} point de x ;
- l'unité est l'unique chemin de Motzkin ∘ d'arité 1.

L'opérade des chemins de Motzkin

L'opérade des chemins de Motzkin Motz est définie de la manière suivante :

- $\mathsf{Motz}(n)$ est l'ensemble des chemins de Motzkin ayant $n-1$ pas ;
- la composition partielle $x \circ_i y$ de deux chemins de Motzkin consiste à substituer y au i^{e} point de x ;
- l'unité est l'unique chemin de Motzkin ● d'arité 1.

Exemple



Propriétés de Motz

Étant donnée une opérade $\mathcal{O}$, il est habituel de chercher à

1. décrire un ensemble minimal $\mathfrak{G}$ de générateurs de $\mathcal{O}$;
2. exhiber toutes les relations non triviales entre les éléments de $\mathfrak{G}$.

Ceci fournit une présentation de $\mathcal{O}$.

Propriétés de Motz

Étant donnée une opérade $\mathcal{O}$, il est habituel de chercher à

1. décrire un ensemble minimal $\mathfrak{G}$ de générateurs de $\mathcal{O}$;
2. exhiber toutes les relations non triviales entre les éléments de $\mathfrak{G}$.

Ceci fournit une présentation de $\mathcal{O}$.

Théorème [G, 2015]

L'ensemble

$\mathfrak{G}_{\mathsf{Motz}} := \{$  $\}$

est l'unique ensemble minimal de générateurs de Motz.

De plus, ses éléments sont soumis exactement aux relations non triviales

Motz-séries

On peut se servir de l'opérade Motz pour considérer des Motz-séries et dénombrer les chemins de Motzkin.

Motz-séries

On peut se servir de l'opérade Motz pour considérer des Motz-séries et dénombrer les chemins de Motzkin.

En effet, la Motz-séries $\mathbf{f}$ caractéristique de Motz vérifie

$\mathbf{f} \; = \;$  $\; + \;$  $\circ \, [$  $, \mathbf{f}] \; + \;$  $\circ \, [$  $, \mathbf{f}, \mathbf{f}] \, ,$

On peut se servir de l'opérade Motz pour considérer des Motz-séries et dénombrer les chemins de Motzkin.

En effet, la Motz-séries $\mathbf{f}$ caractéristique de Motz vérifie

$\mathbf{f} =$  $+$  $\circ\,[$  $, \mathbf{f}] +$  $\circ\,[$  $, \mathbf{f}, \mathbf{f}]\,,$

où, pour toute opérade $\mathcal{O}$, $\circ$ désigne l'opérateur

$$\circ : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(m_n) \to \mathcal{O}(m_1 + \cdots + m_n)$$

de composition complète de $\mathcal{O}$ (il se déduit à partir des $\circ_i$).

Motz-séries

On peut se servir de l'opérade Motz pour considérer des Motz-séries et dénombrer les chemins de Motzkin.

En effet, la Motz-séries $\mathbf{f}$ caractéristique de Motz vérifie

où, pour toute opérade $\mathcal{O}$, $\circ$ désigne l'opérateur

$$\circ : \mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(m_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(m_n) \to \mathcal{O}(m_1 + \cdots + m_n)$$

de composition complète de $\mathcal{O}$ (il se déduit à partir des $\circ_i$).

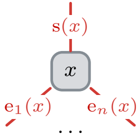
L'expression pour $\mathbf{f}$ est une conséquence de la présentation de Motz et du fait qu'elle est une opérade de Koszul (existence d'une orientation de ses relations en une règle de réécriture convergente).

Plan

Grammaires à bourgeons

Opérades colorées

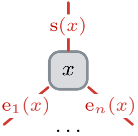
Dans une opérade colorée, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\mathrm{s}(x)$ et des couleurs d'entrée $\mathrm{e}_i(x)$, $i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs :



.

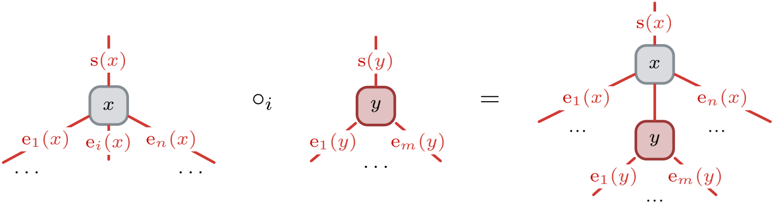
Opérades colorées

Dans une opérade colorée, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\mathrm{s}(x)$ et des couleurs d'entrée $\mathrm{e}_i(x)$, $i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs :



.

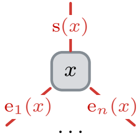
La composition partielle est partiellement définie dans une opérade colorée : $x \circ_i y$ est défini ssi $\mathrm{s}(y) = \mathrm{e}_i(x)$:



.

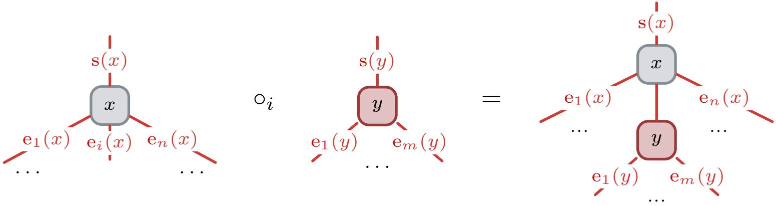
Opérades colorées

Dans une opérade colorée, tout élément x d'arité n possède une couleur de sortie $\mathrm{s}(x)$ et des couleurs d'entrée $\mathrm{e}_i(x)$, $i \in [n]$, prises dans un ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs :



.

La composition partielle est partiellement définie dans une opérade colorée : $x \circ_i y$ est défini ssi $\mathrm{s}(y) = \mathrm{e}_i(x)$:



.

Une opérade colorée possède une unité $\mathbf{1}_c$ pour chaque couleur $c \in \mathscr{C}$.

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

telle que

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

telle que

- si (a, x, u) est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est a et sa ie couleur d'entrée est u_i ;

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

telle que

- si (a, x, u) est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est a et sa i^{e} couleur d'entrée est u_i ;
- si (a, x, u) et (b, y, v) sont deux éléments de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ tels que $u_i = b$,

  $$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \hookleftarrow_i v),$$

  où $u \hookleftarrow_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la i^{e} lettre de u par v.

Opérades à bourgeons

Soient $\mathcal{O}$ une opérade non colorée et $\mathscr{C}$ un ensemble fini.

L'opérade à bourgeons de $\mathcal{O}$ est l'opérade colorée $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ telle que

$$\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})(n) := \mathscr{C} \times \mathcal{O}(n) \times \mathscr{C}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

telle que

- si (a, x, u) est un élément de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, sa couleur de sortie est a et sa i^{e} couleur d'entrée est u_i ;
- si (a, x, u) et (b, y, v) sont deux éléments de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ tels que $u_i = b$,

  $$(a, x, u) \circ_i (b, y, v) := (a, x \circ_i y, u \hookleftarrow_i v)\,,$$

  où $u \hookleftarrow_i v$ est le mot obtenu en remplaçant la i^{e} lettre de u par v.

Proposition

La construction $\mathcal{O} \mapsto \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est un foncteur de la catégorie des opérades non colorées vers la catégorie des opérades $\mathscr{C}$-colorées.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathsf{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathsf{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs, les éléments de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As})$ sont des triplets

$$(a, \star_n, u_1 \dots u_n)$$

avec $a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}$

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathsf{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs, les éléments de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As})$ sont des triplets

$$(a, \star_n, u_1 \dots u_n)$$

avec $a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}$.

On peut ainsi voir $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As})$ comme une opérade colorée de mots sur $\mathscr{C}$ dont la composition partielle est une substitution.

L'opérade à bourgeons de l'opérade associative

L'opérade associative As est définie par

- $\mathsf{As}(n) := \{\star_n\}, n \geqslant 1$;
- $\star_n \circ_i \star_m := \star_{n+m-1}$.

Pour tout ensemble $\mathscr{C}$ de couleurs, les éléments de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As})$ sont des triplets

$$(a, \star_n, u_1 \dots u_n)$$

avec $a, u_1, \dots, u_n \in \mathscr{C}$

On peut ainsi voir $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathsf{As})$ comme une opérade colorée de mots sur $\mathscr{C}$ dont la composition partielle est une substitution.

Exemple

Dans $\mathrm{B}_{\{1,2,3\}}(\mathsf{As})$,

$$(2, \star_4, 3112) \circ_2 (1, \star_3, 233) = (2, \star_6, 323312).$$

Grammaires à bourgeons

Une grammaire à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

Grammaires à bourgeons

Une grammaire à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;

Grammaires à bourgeons

Une grammaire à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;

Grammaires à bourgeons

Une grammaire à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;

Grammaires à bourgeons

Une grammaire à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;
- I est un sous-ensemble de couleurs initiales de $\mathscr{C}$;

Grammaires à bourgeons

Une grammaire à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;
- I est un sous-ensemble de couleurs initiales de $\mathscr{C}$;
- T est un sous-ensemble de couleurs finales de $\mathscr{C}$.

Grammaires à bourgeons

Une grammaire à bourgeons $\mathcal{B}$ est un quintuplet $(\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ où

- $\mathcal{O}$ est une opérade non colorée ;
- $\mathscr{C}$ est un ensemble fini de couleurs ;
- $\mathfrak{R}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ de règles de production ;
- I est un sous-ensemble de couleurs initiales de $\mathscr{C}$;
- T est un sous-ensemble de couleurs finales de $\mathscr{C}$.

Les grammaires à bourgeons servent à spécifier des ensembles d'éléments de $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \to x_2$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x_2 = x_1 \circ_i r$.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \to x_2$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x_2 = x_1 \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\to$ est la relation de dérivation.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \to x_2$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x_2 = x_1 \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\to$ est la relation de dérivation.

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \to \cdots \to x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Langages

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \to x_2$$

à condition qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathfrak{R}$ tels que $x_2 = x_1 \circ_i r$.

La clôture réflexive et transitive de $\to$ est la relation de dérivation.

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \to \cdots \to x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Le langage de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $\mathrm{L}(\mathcal{B})$ des éléments engendrés par $\mathcal{B}$.

Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathsf{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$\mathfrak{R} := \{(1,$  $, 22), (1,$  $, 111)\} .$

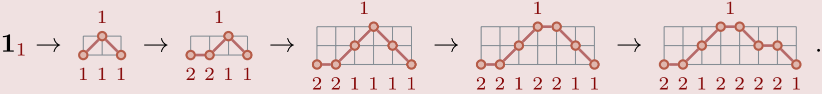
Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathsf{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(1,$$  $$, 22), (1,$$  $$, 111)\}.$$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations



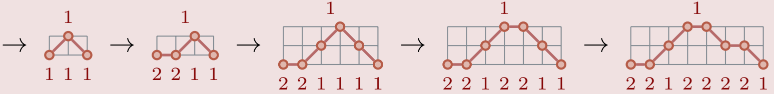
Génération de chemins de Motzkin particuliers

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathrm{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où

$\mathfrak{R} := \{(1,$  $, 22), (1,$  $, 111)\}.$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations

$\mathbf{1}_1 \rightarrow$ 

.

Proposition

$\mathrm{L}(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des chemins de Motzkin sans pas horizontaux consécutifs.

Ces chemins sont dénombrés par la suite **A104545** :

$$1, 1, 1, 3, 5, 11, 25, 55, 129, 303, 721, 1743.$$

Langages synchrones

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \rightsquigarrow x_2$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_{|x_1|} \in \mathfrak{R}$ tels que $x_2 = x_1 \circ \left[r_1, \dots, r_{|x_1|}\right]$.

Langages synchrones

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \rightsquigarrow x_2$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_{|x_1|} \in \mathfrak{R}$ tels que $x_2 = x_1 \circ \left[r_1, \dots, r_{|x_1|}\right]$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightsquigarrow$ est la relation de dérivation synchrone.

Langages synchrones

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \rightsquigarrow x_2$$

à condition qu'il existe $r_1, \ldots, r_{|x_1|} \in \mathfrak{R}$ tels que $x_2 = x_1 \circ \left[r_1, \ldots, r_{|x_1|}\right]$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightsquigarrow$ est la relation de dérivation synchrone.

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x$$

où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Langages synchrones

Un ensemble $\mathfrak{R}$ de règles de production décrit une règle de réécriture sur $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$: pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, on pose

$$x_1 \rightsquigarrow x_2$$

à condition qu'il existe $r_1, \dots, r_{|x_1|} \in \mathfrak{R}$ tels que $x_2 = x_1 \circ \left[r_1, \dots, r_{|x_1|}\right]$.

La clôture réflexive et transitive de $\rightsquigarrow$ est la relation de dérivation synchrone.

Un élément $x \in \mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$ est engendré de manière synchrone par $\mathcal{B}$ si

$$\mathbf{1}_c \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x$$

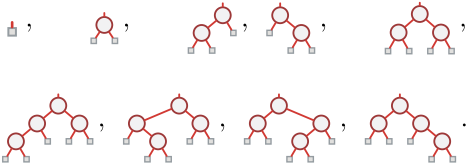
où $c \in I$ et toutes les couleurs de $\mathrm{e}(x)$ sont dans T.

Le langage synchrone de $\mathcal{B}$ est l'ensemble $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B})$ des éléments engendrés de manière synchrone par $\mathcal{B}$.

Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne x de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

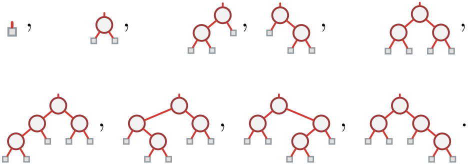
Les premiers arbres binaires équilibrés sont



Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne x de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

Les premiers arbres binaires équilibrés sont



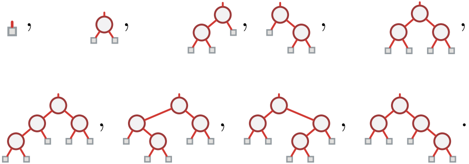
Ces arbres sont dénombrés par la suite **A006265** :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70.$$

Arbres binaires équilibrés

Un arbre binaire équilibré est un arbre binaire $\mathfrak{t}$ tel que, pour tout nœud interne x de $\mathfrak{t}$, la hauteur du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit de $\mathfrak{t}$ diffèrent d'au plus 1.

Les premiers arbres binaires équilibrés sont



Ces arbres sont dénombrés par la suite **A006265** :

$$1, 1, 2, 1, 4, 6, 4, 17, 32, 44, 60, 70.$$

Leur série génératrice est $F(x, 0)$ où

$$F(x, y) = x + F(x^2 + 2xy, x).$$

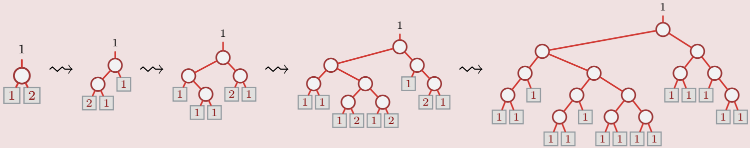
Génération d’arbres binaires équilibrés

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathsf{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où $\mathsf{Mag} := \mathfrak{F}(\{\mathsf{a}\})$, $|\mathsf{a}| := 2$ et

$\mathfrak{R} := \Big\{ \Big(1,$  $, 11\Big), \Big(1,$  $, 12\Big), \Big(1,$  $, 21\Big), (2, \mathbf{1}, 1) \Big\}.$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations synchrones

$\mathbf{1}_1 \rightsquigarrow$  .

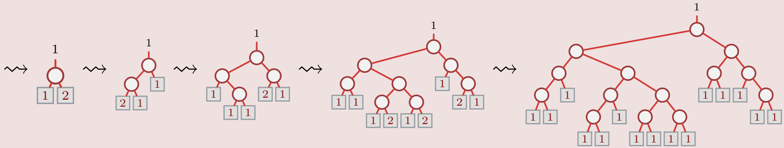
Génération d'arbres binaires équilibrés

Soit la grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathsf{Mag}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1\})$ où $\mathsf{Mag} := \mathfrak{F}(\{\mathsf{a}\})$, $|\mathsf{a}| := 2$ et

$\mathfrak{R} := \Big\{ \Big(1,$  $, 11\Big), \Big(1,$  $, 12\Big), \Big(1,$  $, 21\Big), (2, \mathbf{1}, 1) \Big\}.$

Exemple

Il y a dans $\mathcal{B}$ les dérivations synchrones

$\mathbf{1}_1$ 

.

Proposition

$\mathrm{L_S}(\mathcal{B})$ est en bijection avec l'ensemble des arbres binaires équilibrés.

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

Soit la grammaire à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathsf{As}, V \sqcup T, \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T)$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(\mathbf{x}, \star_{|u|}, u\right) : (\mathbf{x}, u) \in P \right\}.$$

Émulation des grammaires non contextuelles

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire non contextuelle propre, c.-à-d., telle que pour tout $(\mathbf{x}, u) \in P$, $|u| \geqslant 1$.

Soit la grammaire à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathsf{As}, V \sqcup T, \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T)$$

où

$$\mathfrak{R} := \left\{ \left(\mathbf{x}, \star_{|u|}, u\right) : (\mathbf{x}, u) \in P \right\}.$$

Proposition

L'application $\mathrm{e} : \mathrm{L}(\mathcal{B}) \to W$, où W est l'ensemble des mots engendrés par G, est une bijection.

Ainsi, toute grammaire non contextuelle propre peut être émulée par une grammaire à bourgeons reposant sur l'opérade associative As.

Émulation des grammaires non contextuelles

Exemple

Soit $G := (\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{a, b\}, P, \mathbf{x})$ une grammaire non contextuelle propre où

$$P := \{(\mathbf{x}, a), (\mathbf{x}, b\mathbf{y}), (\mathbf{y}, b), (\mathbf{y}, \mathbf{xy})\}.$$

La grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathsf{As}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, a, b\}, \mathfrak{R}, \{\mathbf{x}\}, \{a, b\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \star_1, a), (\mathbf{x}, \star_2, b\mathbf{y}), (\mathbf{y}, \star_1, b), (\mathbf{y}, \star_2, \mathbf{xy})\}$$

émule G.

Émulation des grammaires non contextuelles

Exemple

Soit $G := (\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{a, b\}, P, \mathbf{x})$ une grammaire non contextuelle propre où

$$P := \{(\mathbf{x}, a), (\mathbf{x}, b\mathbf{y}), (\mathbf{y}, b), (\mathbf{y}, \mathbf{xy})\}.$$

La grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathsf{As}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, a, b\}, \mathfrak{R}, \{\mathbf{x}\}, \{a, b\})$ où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \star_1, a), (\mathbf{x}, \star_2, b\mathbf{y}), (\mathbf{y}, \star_1, b), (\mathbf{y}, \star_2, \mathbf{xy})\}$$

émule G.

La suite de dérivations

$$\mathbf{x} \to b\mathbf{y} \to b\mathbf{xy} \to bb\mathbf{yy} \to bbb\mathbf{y} \to bbb\mathbf{xy} \to bbba\mathbf{y} \to bbbab$$

dans G donne lieu à la suite de dérivations

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathbf{x}} &\to (\mathbf{x}, \star_2, b\mathbf{y}) \to (\mathbf{x}, \star_3, b\mathbf{xy}) \to (\mathbf{x}, \star_4, bb\mathbf{yy}) \to (\mathbf{x}, \star_4, bbb\mathbf{y}) \\ &\to (\mathbf{x}, \star_5, bbb\mathbf{xy}) \to (\mathbf{x}, \star_5, bbba\mathbf{y}) \to (\mathbf{x}, \star_5, bbbab) \end{aligned}$$

dans $\mathcal{B}$.

Émulation des grammaires d'arbres régulières

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire d'arbres régulière.

Soit la grammaire à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathfrak{F}(T \setminus T(0)), V \sqcup T(0), \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T(0))$$

où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u) : (\mathbf{x}, \mathfrak{t}_u) \in P\},$$

où $\mathfrak{t}_u$ est le $V \sqcup T$-arbre obtenu en étiquetant les feuilles de $\mathfrak{t}$ par u.

Émulation des grammaires d'arbres régulières

Soit $G := (V, T, P, \mathbf{s})$ une grammaire d'arbres régulière.

Soit la grammaire à bourgeons

$$\mathcal{B} := (\mathfrak{F}(T \setminus T(0)), V \sqcup T(0), \mathfrak{R}, \{\mathbf{s}\}, T(0))$$

où

$$\mathfrak{R} := \{(\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u) : (\mathbf{x}, \mathfrak{t}_u) \in P\},$$

où $\mathfrak{t}_u$ est le $V \sqcup T$-arbre obtenu en étiquetant les feuilles de $\mathfrak{t}$ par u.

Proposition

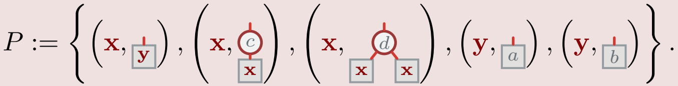
L'application $\phi : \mathrm{L}(\mathcal{B}) \to W$ définie par $\phi((\mathbf{x}, \mathfrak{t}, u)) := \mathfrak{t}_u$, où W est l'ensemble des $V \sqcup T$-arbres engendrés par G, est une bijection.

Ainsi, toute grammaire d'arbres régulière propre peut être émulée par une grammaire à bourgeons reposant sur une opérade libre.

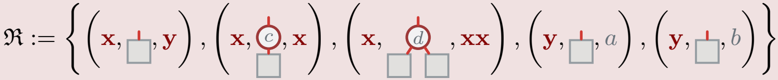
Émulation des grammaires d'arbres régulières

Exemple

Soit $G := (\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{a, b, c, d\}, P, \mathbf{x})$ la grammaire d'arbres régulière où $|a| := 0$, $|b| := 0$, $|c| := 1$, $|d| := 2$ et



La grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathfrak{F}(\{c, d\}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, a, b\}, \mathfrak{R}, \{\mathbf{x}\}, \{a, b\}))$ où

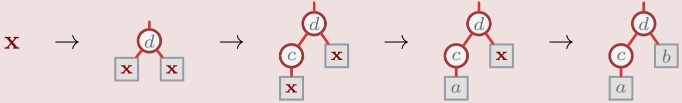


émule G.

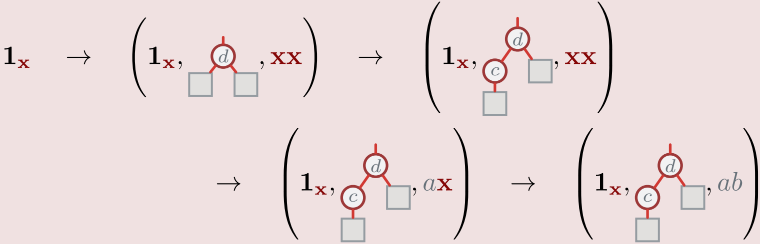
Émulation des grammaires d'arbres régulières

Exemple

La suite de dérivations



dans G donne lieu à la suite de dérivations



dans $\mathcal{B}$.

Plan

Séries, grammaires et dénombrement

Produit pré-Lie

Soit $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

Produit pré-Lie

Soit $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

Produit pré-Lie

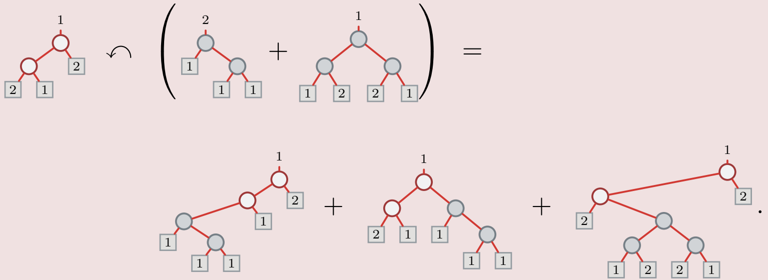
Soit $\mathcal{C}$ une opérade colorée.

Le produit pré-Lie $\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \langle z, \mathbf{g} \rangle .$$

Exemple

Voici un calcul sur des $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathsf{Mag})$-séries :



Propriétés du produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\curvearrowleft$ est

- bilinéaire ;
- défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche (mais pas à droite), où $\mathbf{u}$ est la série des unités colorées de $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathbf{u} := \sum_{c \in \mathscr{C}} \mathbf{1}_c,$$

avec $\mathscr{C}$ l'ensemble des couleurs de $\mathcal{C}$.

Propriétés du produit pré-Lie

Le produit pré-Lie $\curvearrowleft$ est

- bilinéaire ;
- défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche (mais pas à droite), où $\mathbf{u}$ est la série des unités colorées de $\mathcal{C}$ définie par

$$\mathbf{u} := \sum_{c \in \mathscr{C}} \mathbf{1}_c,$$

avec $\mathscr{C}$ l'ensemble des couleurs de $\mathcal{C}$.

Proposition

Le produit pré-Lie vérifie

$$(\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{g}) \curvearrowleft \mathbf{h} - \mathbf{f} \curvearrowleft (\mathbf{g} \curvearrowleft \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \curvearrowleft \mathbf{h}) \curvearrowleft \mathbf{g} - \mathbf{f} \curvearrowleft (\mathbf{h} \curvearrowleft \mathbf{g}).$$

Ainsi, $(\mathbb{K} \langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle, \curvearrowleft)$ est une algèbre pré-Lie.

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell - 1} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell - 1} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft *} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell}.$$

Étoile pré-Lie

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

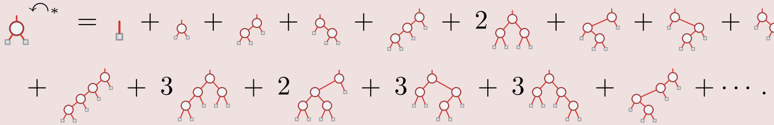
$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{si } \ell = 0, \\ \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell-1} \curvearrowleft \mathbf{f} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étoile pré-Lie de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\curvearrowleft *} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\curvearrowleft \ell}.$$

Exemple

Voici un calcul sur des $\mathrm{B}_{\{1\}}(\mathrm{Mag})$-séries :



Les coefficients de cette série se calculent par la formule des équerres sur les arbres binaires [**Knuth**, 1973].

Propriétés de l'étoile pré-Lie

Un sous-ensemble S de $\mathcal{C}(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur S.

Propriétés de l'étoile pré-Lie

Un sous-ensemble S de $\mathcal{C}(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur S.

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Propriétés de l'étoile pré-Lie

Un sous-ensemble S de $\mathcal{C}(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur S.

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \right\rangle = \delta_{x, \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y, z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \right\rangle \left\langle z, \mathbf{f} \right\rangle .$$

Propriétés de l'étoile pré-Lie

Un sous-ensemble S de $\mathcal{C}(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$ si tout $x \in \mathcal{C}(1)$ admet un nombre fini de factorisations sur S.

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \right\rangle = \delta_{x, \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y,z \in \mathcal{C} \\ i \in [|y|] \\ x = y \circ_i z}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\curvearrowleft *} \right\rangle \left\langle z, \mathbf{f} \right\rangle .$$

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \curvearrowleft \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\curvearrowleft *}$.

Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \ldots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \ldots, z_{|y|}\right]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle .$$

Produit de composition

Le produit de composition $\mathbf{f} \odot \mathbf{g}$ de deux séries $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sur $\mathcal{C}$ est défini par

$$\langle x, \mathbf{f} \odot \mathbf{g} \rangle := \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \dots, z_{|y|} \right]}} \langle y, \mathbf{f} \rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{g} \rangle .$$

Exemple

Voici un calcul sur des $\mathrm{B}_{\{1,2,3\}}(\mathsf{As})$-séries :

$$(2, \star_3, 211) \odot ((2, \star_1, 3) + (1, \star_2, 21) + (2, \star_2, 23)) =$$

$$(2, \star_5, 32121) + (2, \star_6, 232121).$$

Propriétés du produit de composition

Le produit de composition $\odot$ est

- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche et à droite.

Propriétés du produit de composition

Le produit de composition $\odot$ est

- linéaire à gauche (mais pas à droite) ;
- défini totalement si les $\mathcal{C}(n)$ sont finis ;
- admet $\mathbf{u}$ comme unité à gauche et à droite.

Proposition

Le produit de composition est associatif.

Ainsi, $(\mathbb{K}\langle\langle\mathcal{C}\rangle\rangle, \odot, \mathbf{u})$ est un monoïde.

Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot \ell} := \underbrace{\mathbf{f} \odot \cdots \odot \mathbf{f}}_{\times \ell}.$$

Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot \ell} := \underbrace{\mathbf{f} \odot \cdots \odot \mathbf{f}}_{\times \ell}.$$

L'étoile pour la composition de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\odot *} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\odot \ell}.$$

Étoile pour la composition

Pour tout $\ell \geqslant 0$, soit

$$\mathbf{f}^{\odot_\ell} := \underbrace{\mathbf{f} \odot \cdots \odot \mathbf{f}}_{\times \ell}.$$

L'étoile pour la composition de $\mathbf{f}$ est la série sur $\mathcal{C}$

$$\mathbf{f}^{\odot_*} := \sum_{\ell \geqslant 0} \mathbf{f}^{\odot_\ell}.$$

Exemple

Voici un calcul sur des $\mathrm{B}_{\{1,2\}}(\mathsf{As})$-séries :

$$((1, \star_2, 22) + (2, \star_2, 11))^{\odot_*} = (1, \star_1, 1) + (2, \star_2, 2) + (1, \star_2, 22)$$
$$+ (2, \star_2, 11) + (1, \star_4, 1111) + (2, \star_4, 2222) + (1, \star_8, 2^8) + (2, \star_8, 1^8)$$
$$+ (1, \star_{16}, 1^{16}) + (2, \star_{16}, 2^{16}) + \cdots .$$

Propriétés de l'étoile pour la composition

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\odot *}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Propriétés de l'étoile pour la composition

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\odot_*}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot_*} \right\rangle = \delta_{x, \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y, z_1, \dots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \dots, z_{|y|}\right]}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\odot_*} \right\rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{f} \rangle .$$

Propriétés de l'étoile pour la composition

Lemme

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, $\mathbf{f}^{\odot_*}$ est une série sur $\mathcal{C}$ bien définie.

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$,

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot_*} \right\rangle = \delta_{x,\mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}} + \sum_{\substack{y, z_1, \ldots, z_{|y|} \in \mathcal{C} \\ x = y \circ \left[z_1, \ldots, z_{|y|}\right]}} \left\langle y, \mathbf{f}^{\odot_*} \right\rangle \prod_{i \in [|y|]} \langle z_i, \mathbf{f} \rangle .$$

Proposition

Si $\mathbf{f}$ est une série sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1)$ factorise finiment $\mathcal{C}$, l'équation

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admet comme solution unique $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot_*}$.

Éléments inversibles pour $\odot$

Proposition

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ où S factorise finiment $\mathscr{C}$, les équations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admettent toutes deux une unique solution notée $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot-1}$.

Éléments inversibles pour $\odot$

Proposition

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ où S factorise finiment $\mathscr{C}$, les équations

$$\mathbf{f} \odot \mathbf{x} = \mathbf{u} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x} \odot \mathbf{f} = \mathbf{u}$$

admettent toutes deux une unique solution notée $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{\odot -1}$.

Proposition

Si $\mathrm{Supp}(\mathbf{f})(1) = \{\mathbf{1}_c : c \in \mathscr{C}\} \sqcup S$ où S factorise finiment $\mathscr{C}$, $\mathbf{f}^{\odot -1}$ est une $\mathscr{C}$-série vérifiant

$$\left\langle x, \mathbf{f}^{\odot -1} \right\rangle = \frac{1}{\left\langle \mathbf{1}_{\mathrm{s}(x)}, \mathbf{f} \right\rangle} \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(S) \\ \mathrm{eval}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{t}) = x}} (-1)^{\deg(\mathfrak{t})} \prod_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \frac{\langle \mathrm{lb}(v), \mathbf{f} \rangle}{\prod_{j \in [|v|]} \left\langle \mathbf{1}_{\mathrm{e}_j(v)}, \mathbf{f} \right\rangle}.$$

Ainsi, le monoïde $(\mathbb{K}\langle\langle \mathcal{C} \rangle\rangle, \odot)$ contient un (grand) groupe formé par les séries dont le support vérifie la condition formulée ci-dessus.

Séries des équerres

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

La série des équerres de $\mathcal{B}$ est

$$\operatorname{equ}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\curvearrowleft *} \odot \mathbf{t},$$

où

$$\mathbf{i} := \sum_{c \in I} \mathbf{1}_c,$$

$$\mathbf{r} := \sum_{r \in \mathfrak{R}} r,$$

$$\mathbf{t} := \sum_{c \in T} \mathbf{1}_c.$$

Le fait de multiplier $\mathbf{r}^{\curvearrowleft *}$ à gauche et à droite par $\mathbf{i}$ et $\mathbf{t}$ revient à ne garder que les termes dont les couleurs de sortie sont dans I et les couleurs d'entrée dans T.

Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade, $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{O}$ un ensemble générant $\mathcal{O}$ et la grammaire à bourgeons $\mathcal{B}_{\mathcal{O},\mathfrak{G}} := (\mathcal{O}, \{1\}, \mathfrak{G}, \{1\}, \{1\})$.

Les coefficients $\langle x, \mathrm{equ}(\mathcal{B}_{\mathcal{O},\mathfrak{G}})\rangle$ définissent une statistique sur les éléments de $\mathcal{O}$ analogue à celle des équerres propre aux arbres.

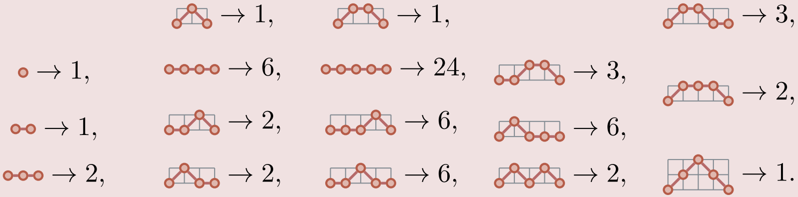
Analogues de la statistique des équerres

Soient $\mathcal{O}$ une opérade, $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{O}$ un ensemble générant $\mathcal{O}$ et la grammaire à bourgeons $\mathcal{B}_{\mathcal{O},\mathfrak{G}} := (\mathcal{O}, \{1\}, \mathfrak{G}, \{1\}, \{1\})$.

Les coefficients $\langle x, \mathrm{equ}(\mathcal{B}_{\mathcal{O},\mathfrak{G}}) \rangle$ définissent une statistique sur les éléments de $\mathcal{O}$ analogue à celle des équerres propre aux arbres.

Exemple

Pour $\mathcal{B}_{\mathsf{Motz},\mathfrak{G}}$ avec $\mathfrak{G} := \{$  ,  $\}$, nous obtenons une statistique type équerres pour les chemins de Motzkin :



Graphes de dérivation

Les coefficients de $\mathrm{equ}(\mathcal{B})$ s'interprètent de manière combinatoire.

Graphes de dérivation

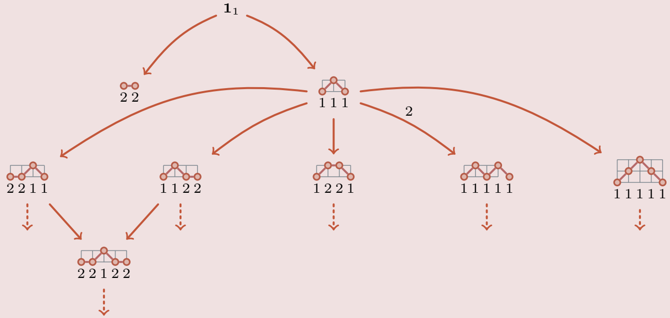
Les coefficients de $\mathrm{equ}(\mathcal{B})$ s'interprètent de manière combinatoire.

Le graphe de dérivation de $\mathcal{B}$ est le multigraphe orienté $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ tel que

- ses sommets sont les éléments dérivables depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$;
- il y a un arc de x_1 vers x_2 si $x_1 \to x_2$ (avec une multiplicité).

Exemple

Le graphe de dérivation de $\mathcal{B} := (\mathsf{Motz}, \{1, 2\}, \mathfrak{R}, \{1\}, \{1, 2\})$ où
$\mathfrak{R} := \{(1,$  $, 22), (1,$  $, 111)\}$ est



Graphes de dérivation et série des équerres

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{equ}(\mathcal{B}) \rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers x.

Graphes de dérivation et série des équerres

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{equ}(\mathcal{B})\rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers x.

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{equ}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \frac{\deg(\mathfrak{t})!}{\prod_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \deg(\mathfrak{t}_v)} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Graphes de dérivation et série des équerres

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, pour tout $x \in \mathrm{L}(\mathcal{B})$, le coefficient $\langle x, \mathrm{equ}(\mathcal{B})\rangle$ est le nombre de multichemins dans $\mathrm{DG}(\mathcal{B})$ depuis $\mathbf{1}_c$, $c \in I$, vers x.

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{equ}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \frac{\deg(\mathfrak{t})!}{\prod_{v \in \mathrm{N}(\mathfrak{t})} \deg(\mathfrak{t}_v)} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{equ}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}).$$

Séries synchrones

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\operatorname{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}.$$

Séries synchrones

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}.$$

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}_{\mathrm{par}}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Séries synchrones

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

La série synchrone de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot \mathbf{r}^{\odot_*} \odot \mathbf{t}.$$

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{sync}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}_{\mathrm{par}}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$, alors $\mathrm{Supp}(\mathrm{sync}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B})$.

Series syntaxiques

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

La série syntaxique de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

Series syntaxiques

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

La série syntaxique de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Series syntaxiques

Soit $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ une grammaire à bourgeons.

La série syntaxique de $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) := \mathbf{i} \odot (\mathbf{u} - \mathbf{r})^{\odot_{-1}} \odot \mathbf{t}.$$

Théorème

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{synt}(\mathcal{B}) = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \in \mathfrak{F}(\mathfrak{R}) \\ \mathrm{s}(\mathfrak{t}) \in I \\ \mathrm{e}(\mathfrak{t}) \in T^*}} \mathrm{eval}_{\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})}(\mathfrak{t}).$$

Proposition

Si $\mathfrak{R}(1)$ factorise finiment $\mathrm{B}_{\mathscr{C}}(\mathcal{O})$,

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{synt}(\mathcal{B})) = \mathrm{L}(\mathcal{B}).$$

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer.

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer.

Soit une grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ telle que

1. $\mathrm{L}(\mathcal{B}) = X$ (resp. $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B}) = X$);
2. la série $\mathrm{synt}(\mathcal{B})$ (resp. $\mathrm{sync}(\mathcal{B})$) ne possède que des coefficients 0 ou 1.

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer.

Soit une grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ telle que

1. $\mathrm{L}(\mathcal{B}) = X$ (resp. $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B}) = X$);
2. la série $\mathrm{synt}(\mathcal{B})$ (resp. $\mathrm{sync}(\mathcal{B})$) ne possède que des coefficients 0 ou 1.

Dans ce cas, on a

$$\mathbf{f}_X = \mathrm{synt}(\mathcal{B}) \qquad (\text{resp. } \mathbf{f}_X = \mathrm{sync}(\mathcal{B}))$$

où $\mathbf{f}_X$ est la X-série caractéristique de X.

Un outil pour le dénombrement

Soit X un ensemble d'objets combinatoires que l'on souhaite dénombrer.

Soit une grammaire à bourgeons $\mathcal{B} := (\mathcal{O}, \mathscr{C}, \mathfrak{R}, I, T)$ telle que

1. $\mathrm{L}(\mathcal{B}) = X$ (resp. $\mathrm{L}_{\mathrm{S}}(\mathcal{B}) = X$);
2. la série $\mathrm{synt}(\mathcal{B})$ (resp. $\mathrm{sync}(\mathcal{B})$) ne possède que des coefficients 0 ou 1.

Dans ce cas, on a

$$\mathbf{f}_X = \mathrm{synt}(\mathcal{B}) \qquad \text{(resp. } \mathbf{f}_X = \mathrm{sync}(\mathcal{B})\text{)}$$

où $\mathbf{f}_X$ est la X-série caractéristique de X.

On peut alors utiliser $\mathcal{B}$ pour obtenir une formule de récurrence pour dénombrer les éléments de X.