Gog, Magog et Schützenberger

Hayat Cheballah

LIPN-Université Paris 13
Séminaire Combinatoire énumérative et analytique
LIAFA

31 mai 2011

Matrices à signes alternants(ASM)

Matrice carrée de $0, 1, -1$, telle que dans chaque ligne et dans chaque colonne

- Les 1 et -1 apparaissent alternativement.
- La somme sur chaque ligne et sur chaque colonne est égale à 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enumération des ASMs

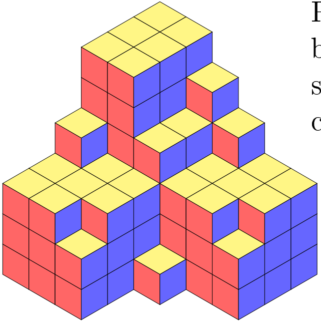
Formule d'énumération des ASMs [Mills,Robbins, Rumsey 80']

Le nombre d'ASMs de taille $n \times n$ est donné par

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$$

- [Zeilberger 96] $\Rightarrow$ démonstration de cette formule.
- [Propp] $\Rightarrow$ Modèle 6−sommets.
- [Kuperberg] $\Rightarrow$ Autre démonstration du théorème des ASMs

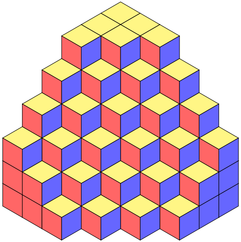
Partitions planes (PP) : elles peuvent être vues comme un empilement de cubes dans un coin.



PP est une 3D-partition : tableau bidimensionnel h de suites décroissantes d'entiers en ligne et en colonne

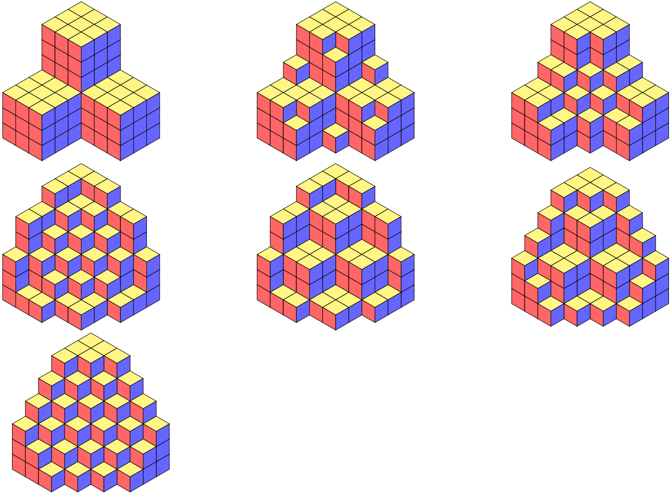
665433
664333
664332
4331
333
332

PP Totalement symétriques Auto-complémentaires (TSSCPP)



Les TSSCPPs de taille $2n \times 2n \times 2n$ sont munis de toutes les symétries de l'hexagone.

$\Rightarrow$ Domaine fondamental : douzième de l'hexagone original.



$$\left|(TSSCPPs)_{2n\times 2n\times 2n}\right| = A(n)$$

Triangles de Gelfand-Tsetlin de taille n

Arrangement triangulaire de $n(n+1)/2$ éléments $X = (x_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{n,1} & \leqslant & x_{n,2} & \leqslant & x_{n,3} & \leqslant & \cdots & \leqslant & x_{n,n}\\
 & x_{n-1,1} & \leqslant & x_{n-1,2} & \leqslant & \cdots & \leqslant & x_{n-1,n-1} & \\
 & & x_{n-2,1} & & \cdots & & x_{n-2,,n-2} & & \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \\
 & & & & x_{1,1} & & & &
\end{array}$$

Procédé

$$\mathbf{TSSCPPs}_{2n\times 2n\times 2n} \longleftrightarrow \mathbf{Magog}_n \longleftrightarrow \mathbf{Gog}_n \longleftrightarrow \mathbf{ASMs}_n$$

Triangle Gog de taille n

arrangement triangulaire de $n(n+1)/2$ éléments $\in [\![1, n]\!]$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_{n,1} & < & x_{n,2} & < & x_{n,3} & < & \cdots & < & x_{n,n} \\
 & x_{n-1,1} & < & x_{n-1,2} & < & \cdots & < & x_{n-1,n-1} & \\
 & & x_{n-2,1} & & \cdots & & x_{n-2,n-2} & & \\
 & & & \cdots & & \cdots & & & \\
 & & & & x_{1,1} & & & &
\end{array}
$$

Triangle Gog de taille n

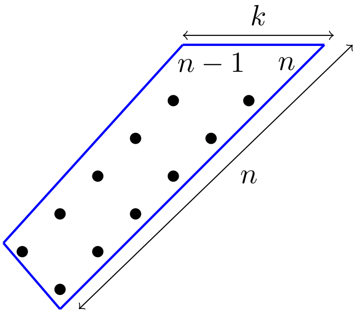
arrangement triangulaire de $n(n+1)/2$ éléments $\in [\![1, n]\!]$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & & & 2 & & & & 3 & & & & \cdots & & & & n \\
\shortparallel & & & & \shortparallel & & & & \shortparallel & & & & & & & & \shortparallel \\
x_{n,1} & & < & & x_{n,2} & & < & & x_{n,3} & & < & & \cdots & & < & & x_{n,n} \\
 & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & & & & & & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & \\
 & & x_{n-1,1} & & < & & x_{n-1,2} & & < & & \cdots & & < & & x_{n-1,n-1} & & \\
 & & & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & & & & & & & & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & & \\
 & & & & x_{n-2,1} & & & & \cdots & & & & x_{n-2,n-2} & & & & \\
 & & & & & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & & & & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & & & & \\
 & & & & & & \cdots & & & & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & \rotatebox{-45}{$\leqslant$} & & \rotatebox{45}{$\leqslant$} & & & & & & & \\
 & & & & & & & & x_{1,1} & & & & & & & &
\end{array}
$$

Gog Trapézoïdes

(k,n)Gog trapézoïdes

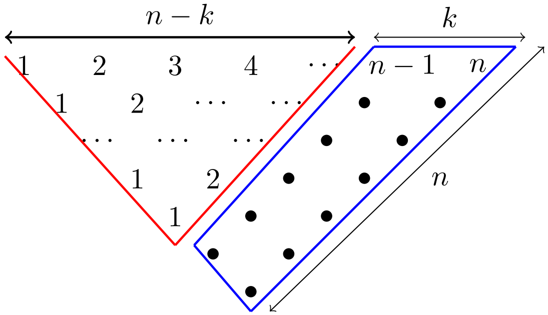
Triangle Gog de taille n $X = (x_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ tel que $x_{i,j} = j$ pour $i - j \geqslant k$



Gog Trapézoïdes

(k, n)Gog trapézoïdes

Triangle Gog de taille n $X = (x_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ tel que $x_{i,j} = j$ pour $i - j \geqslant k$



Triangles Magog

Triangles Magog de taille n

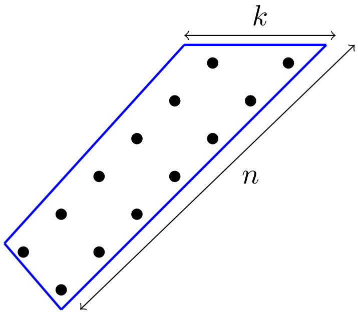
Arrangement triangulaire de $n(n+1)/2$ éléments $\in [\![1,n]\!]$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{n,1} & & \leqslant & & x_{n,2} & & \leqslant & & x_{n,3} & \leqslant & \cdots & & x_{n,n} \leqslant n \\
& \leqslant & & \geqslant & & \leqslant & & \geqslant & & & & \geqslant & \\
& & x_{n-1,1} & \leqslant & & & x_{n-1,2} & \leqslant & \cdots & \leqslant & x_{n-1,n-1} \leqslant n-1 & & \\
& & \leqslant & & & & & & & \geqslant & & & \\
& & & & x_{n-2,1} & & \cdots & & x_{n-2,n-2} \leqslant n-2 & & & & \\
& & & & \leqslant & & & & \geqslant & & & & \\
& & & & & \cdots & & \cdots & & & & & \\
& & & & & \leqslant & & \geqslant & & & & & \\
& & & & & & x_{1,1} \leqslant 1 & & & & & &
\end{array}
$$

Magog Trapézoïdes

(k, n)Magog trapézoïdes

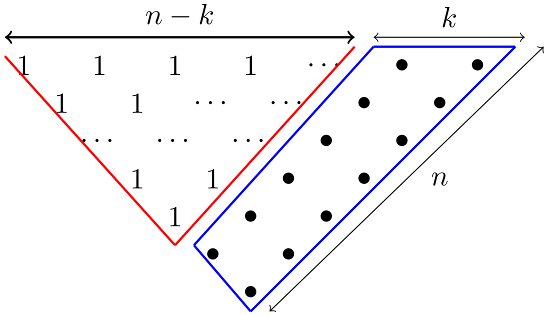
Triangle Magog $X = (x_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ tel que $x_{i,j} = 1$ pour $i - j \geqslant k$



Magog Trapézoïdes

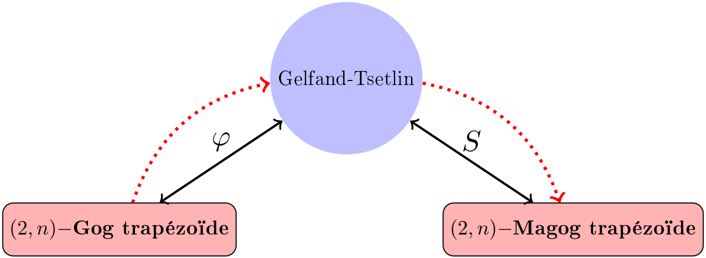
(k,n)Magog trapézoïdes

Triangle Magog $X = (x_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n}$ tel que $x_{i,j} = 1$ pour $i - j \geqslant k$



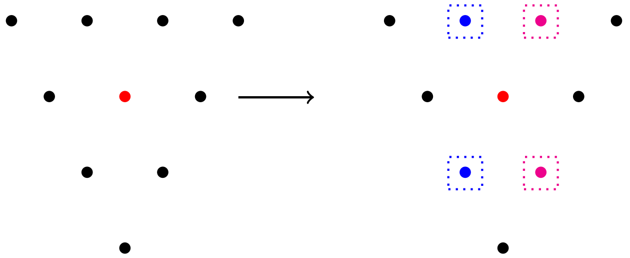
Nous construisons une bijection explicite entre les $(2, n)-$Gog trapézoïdes et les $(2, n)-$Magog trapézoïdes.
Cette construction se base sur deux opérations

- Involution de Schützenberger S.
- Transformation de l'Inversion φ.



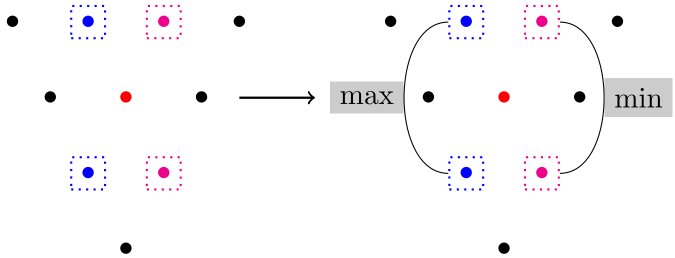
Involution de Schützenberger

Soit un trapézoïde de Gelfand-Tsetlin de taille n . Définissons l'opération τ sur un élément d'une ligne comme suit :



Involution de Schützenberger

Soit un Gelfand-Tsetlin trapézoïde de taille n . Définissons l'opération τ qui agit sur un élément d'une ligne comme suit :



$$\tau(\bullet) = \boxed{\max} + \boxed{\min} - \bullet$$

τ_i agit sur tous les éléments de la i^{me} ligne.

Involution de Schützenberger

Soit un Gog ou Magog trapézoïde de taille n. On note S l'involution de Schützenberger qui agit comme suit

$$S = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-1}\tau_1\tau_2\cdots\tau_{n-2}\cdots\tau_1\tau_2\tau_1$$

Exemple :

$$\begin{array}{ccccc}1&&6&&8\\&2&&8&\\&&4&&\end{array}\xrightarrow{\tau_1}\begin{array}{ccccc}1&&6&&8\\&2&&8&\\&&{\color{red}6}&&\end{array}\xrightarrow{\tau_2}\begin{array}{ccccc}1&&6&&8\\&{\color{red}5}&&{\color{red}6}&\\&&6&&\end{array}\xrightarrow{\tau_1}\begin{array}{ccccc}1&&6&&8\\&5&&6&\\&&{\color{red}5}&&\end{array}$$

Lemme :Caractérisation de la dernière diagonale de SX

Soit X un triangle de Gelfand-Tsetlin et $Y = SX$ son image par S, alors :

$$\begin{cases} Y_{nn} = & X_{nn} \\ Y_{kk} = & \max\limits_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \\ & \left[\left(\sum\limits_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}}\right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}}\right] \end{cases}$$

EXEMPLE

$$\left\{ Y_{kk} = \max_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}} \right] \right.$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 2 & 3 \\ & & 2 & 3 \\ & & & 2 \end{array} \xrightarrow{S} \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & 4 \\ & \bullet & \bullet \\ & & \bullet \end{array}$$

$$Y_{4,4} = X_{4,4} = 4$$

EXEMPLE

$$\left\{ Y_{kk} = \max_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}} \right] \right.$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array} \xrightarrow{S} \begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & 4 \\ & \bullet & & \bullet & & & \\ & & \bullet & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} Y_{3,3} &= \max_{4=j_0>j_1\geqslant 1} [(X_{j_0,j_0} - X_{j_1,j_1}) + X_{j_1+1,j_1}] = \\ &= \max(X_{4,4} - X_{3,3}) + X_{4,3}, (X_{4,4} - X_{2,2}) + X_{3,2} \\ &, \quad (X_{4,4} - X_{1,1}) + X_{2,1} = 4 \end{aligned}$$

EXEMPLE

$$\begin{cases} Y_{kk} = \displaystyle\max_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \\ \qquad \left[\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}}\right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}}\right] \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array} \xrightarrow{S} \begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & {\color{red}4} \\ & \bullet & & \bullet & & & \\ & & \bullet & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} {\color{red}Y_{3,3}} &= \max_{4=j_0>j_1\geqslant 1}[(X_{j_0,j_0} - X_{j_1,j_1}) + X_{j_1+1,j_1}] = \\ &= \max(X_{4,4} - X_{3,3}) + X_{4,3}, (X_{4,4} - X_{2,2}) + X_{3,2} \\ &, \quad (X_{4,4} - X_{1,1}) + X_{2,1} = {\color{red}4} \end{aligned}$$

EXEMPLE

$$\left\{ Y_{kk} = \max_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}} \right] \right.$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array} \xrightarrow{S} \begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & {\color{red}4} \\ & \bullet & & \bullet & & {\color{red}4} & \\ & & \bullet & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} {\color{red}Y_{3,3}} &= \max_{4=j_0>j_1\geqslant 1} [(X_{j_0,j_0} - X_{j_1,j_1}) + X_{j_1+1,j_1}] = \\ &= \max (X_{4,4} - X_{3,3}) + X_{4,3}, (X_{4,4} - X_{2,2}) + X_{3,2} \\ &, \quad (X_{4,4} - X_{1,1}) + X_{2,1} = {\color{red}4} \end{aligned}$$

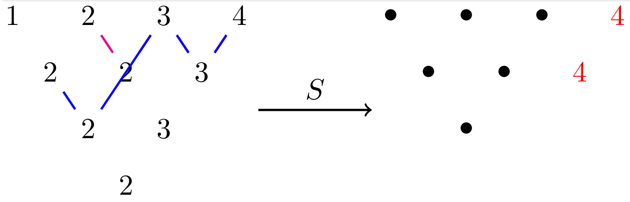
EXEMPLE

$$\left\{ Y_{kk} = \max_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}} \right] \right.$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array} \xrightarrow{S} \begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & \color{red}{4} \\ & \bullet & & \bullet & & \color{red}{4} & \\ & & \bullet & & & & \end{array}$$

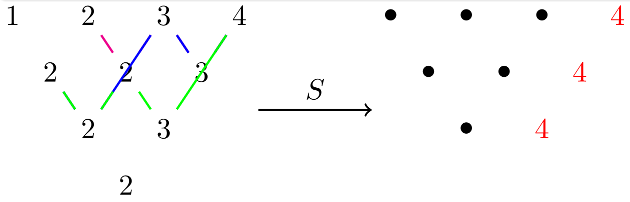
EXEMPLE

$$\left\{ Y_{kk} = \max_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}} \right] \right.$$



EXEMPLE

$$\left\{ Y_{kk} = \max_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}}\right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}}\right]\right.$$



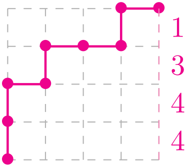
EXEMPLE

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{kk} = \displaystyle\max_{n=j_0>j_1>\cdots>j_{n-k}\geqslant 1} \\ \qquad \left[\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_{i+1}+i,j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k,j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array} \quad \xrightarrow{S} \quad \begin{array}{ccccccc} \bullet & & \bullet & & \bullet & & {\color{red}4} \\ & \bullet & & \bullet & & {\color{red}4} & \\ & & \bullet & & {\color{red}4} & & \\ & & & {\color{red}3} & & & \end{array}$$

Preuve :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array} \longrightarrow$$



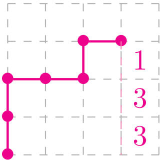
$$\longrightarrow (Sw)_1 = 1344$$

4			
3	3		
2	2	4	
1	1	2	4

Preuve :

1 2 3 4
2 2 3
2 3
2

$\longrightarrow$



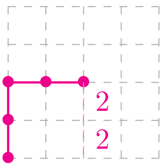
$\longrightarrow (Sw)_2 = 133$

$\downarrow$

4			
3	3		
2	2	4	
1	1	2	4

Preuve :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array}$$

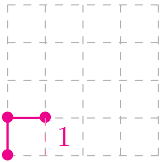


$\longrightarrow (Sw)_3 = 22$

4			
3	3		
2	2	4	
1	1	2	4

Preuve :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array} \longrightarrow$$



$$\longrightarrow (Sw)_4 = 1$$

$\downarrow$

4			
3	3		
2	2	4	
1	1	2	4

Preuve :

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{ccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 \\
& 2 & & 2 & & 3 & \\
& & 2 & & 3 & & \\
& & & 2 & & &
\end{array}
\arrow[r, "(Sw)_1 \cdot (Sw)_2 \cdot (Sw)_3 \cdot (Sw)_4"] \arrow[d]
& 1344 \cdot 133 \cdot 22 \cdot 1 \arrow[d, "\mathrm{RSK}"] \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
4 \\
\cline{1-1}
3 & 3 \\
\cline{1-2}
2 & 2 & 4 \\
\cline{1-3}
1 & 1 & 2 & 4 \\
\hline
\end{array}
\arrow[r, "S"]
&
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
4 \\
\cline{1-1}
3 & 4 \\
\cline{1-2}
2 & 3 & 3 \\
\cline{1-3}
1 & 1 & 1 & 2 \\
\hline
\end{array}
\end{tikzcd}
$$

Preuve :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & 2 & & 2 & & 3 & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & & & 2 & & & \end{array} \xrightarrow{(Sw)_1 \cdot (Sw)_2 \cdot (Sw)_3 \cdot (Sw)_4} 1344 \cdot 133 \cdot 22 \cdot 1$$

- $X_{n,n} - X_{j_1,j_1}$=Longueur de la sous suite croissante $\in S(w)_1$ constituée des lettres $\leqslant n - j_1$
- $X_{j_1+1,j_1} - X_{j_2+1,j_2}$=Longueur de la sous suite croissante $\in S(w)_2$ constituée des lettres $\in [n - j_1, n - j_2]$
- $\dots$

Triangle GOGAm

Définition :Triangle GOGAm

Un triangle GOGAm de taille n est un triangle de Gelfand-Tsetlin tel que son image par S est un triangle Magog de taille n.

Triangle GOGAm

Définition :Triangle GOGAm

Un triangle GOGAm de taille n est un triangle de Gelfand-Tsetlin tel que son image par S est un triangle Magog de taille n.

Proposition :Triangle GOGAm

$X = (X_{i,j})$ est un GOGAm $\Leftrightarrow$ $X_{n,n} \leqslant n$, $\forall \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$, et $n > j_1 > \cdots > j_{n-k} \geqslant 1$

$$X_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-k} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_i+i-1,j_i} \leqslant k$$

Triangle GOGAm

Définition :Triangle GOGAm

Un triangle GOGAm de taille n est un triangle de Gelfand-Tsetlin tel que son image par S est un triangle Magog de taille n.

Proposition :Triangle GOGAm

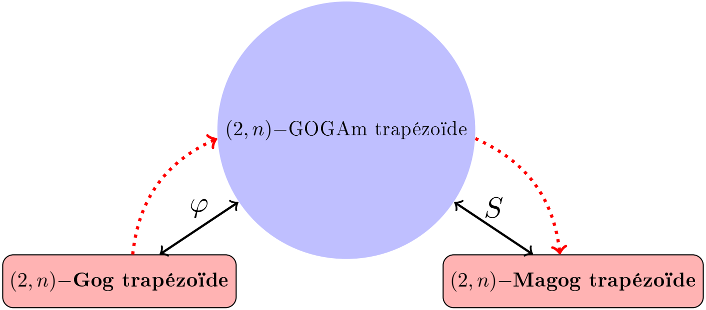
$X = (X_{i,j})$ est un GOGAm $\Leftrightarrow$ $X_{n,n} \leqslant n$, $\forall \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1$, et $n > j_1 > \cdots > j_{n-k} \geqslant 1$

$$X_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-k} X_{j_i+i,j_i} - X_{j_i+i-1,j_i} \leqslant k$$

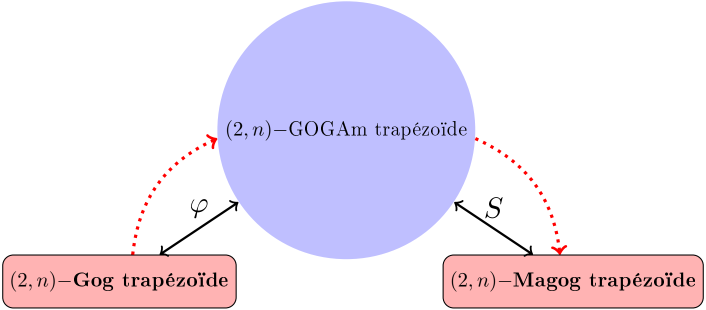
(k,n)GOGAm trapézoïde

Un (k,n)GOGAm trapézoïde ($k \leqslant n$) est un triangle GOGAm de taille n tel que $x_{i,j} = 1$ pour $i - j \geqslant k$

Et donc $\cdots$



Et donc ···



L'idée : Que fait φ ?

$$(2, n)\text{Gog trapézoïde} \longrightarrow (2, n)\text{GOGAm trapézoïde}$$

Et donc ···

L'idée : Que fait φ ?

$$(2,n)\text{Gog trapézoïde} \longrightarrow (2,n)\text{GOGAm trapézoïde}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 2 & & * & & n-2 & & n-1 & & n \\
 & * & & * & & * & & b_2 & & a_1 & \\
 & & 1 & & 2 & & * & & a_2 & & \\
 & & & 1 & & b_{n-2} & & * & & & \\
 & & & & b_{n-1} & & a_{n-2} & & & & \\
 & & & & & a_{n-1} & & & & &
\end{array}} \xrightarrow{\varphi} \boxed{\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & * & & 1 & & \beta_1 & & \alpha_0 \\
 & * & & * & & * & & \beta_2 & & \alpha_1 & \\
 & & 1 & & 1 & & * & & \alpha_2 & & \\
 & & & 1 & & \beta_{n-2} & & * & & & \\
 & & & & \beta_{n-1} & & \alpha_{n-2} & & & & \\
 & & & & & \alpha_{n-1} & & & & &
\end{array}}$$

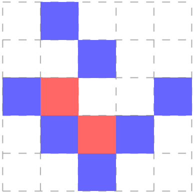
Et donc $\cdots$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 2 & & * & & n-2 & & n-1 & & n \\
& * & & * & & * & & b_2 & & a_1 & \\
& & 1 & & 2 & & * & & a_2 & & \\
& & & 1 & & b_{n-2} & & * & & & \\
& & & & b_{n-1} & & a_{n-2} & & & & \\
& & & & & a_{n-1} & & & & &
\end{array}} \xrightarrow{\varphi} \boxed{\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & * & & 1 & & \beta_1 & & \alpha_0 \\
& * & & * & & * & & \beta_2 & & \alpha_1 & \\
& & 1 & & 1 & & * & & \alpha_2 & & \\
& & & 1 & & \beta_{n-2} & & * & & & \\
& & & & \beta_{n-1} & & \alpha_{n-2} & & & & \\
& & & & & \alpha_{n-1} & & & & &
\end{array}}$$

Tel que

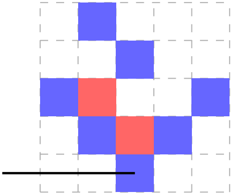
- $\alpha_0 \leqslant n$
- $\alpha_0 - \alpha_i + \beta_i \leqslant n-1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$
- $\alpha_0 - \alpha_i + \beta_i - \beta_j + 1 \leqslant j-1$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$

Inversion dans un triangle Gog



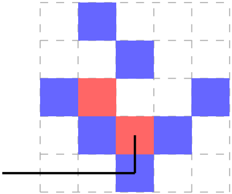
$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & 3 & & & &
\end{array}
$$

Inversion dans un triangle Gog



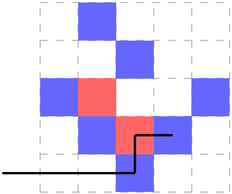
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
 & 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
 & & 1 & & 4 & & 5 & & \\
 & & & 2 & & 4 & & & \\
 & & & & 3 & & & &
\end{array}$$

Inversion dans un triangle Gog



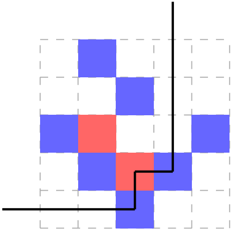
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & 3 & & & &
\end{array}$$

Inversion dans un triangle Gog



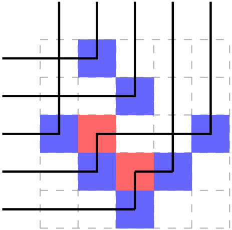
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & 3 & & & &
\end{array}$$

Inversion dans un triangle Gog



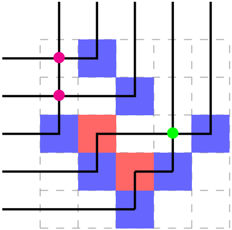
$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & 3 & & & &
\end{array}$$

Inversion dans un triangle Gog



$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
& 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & \\
& & & 2 & & 4 & & & \\
& & & & 3 & & & &
\end{array}
$$

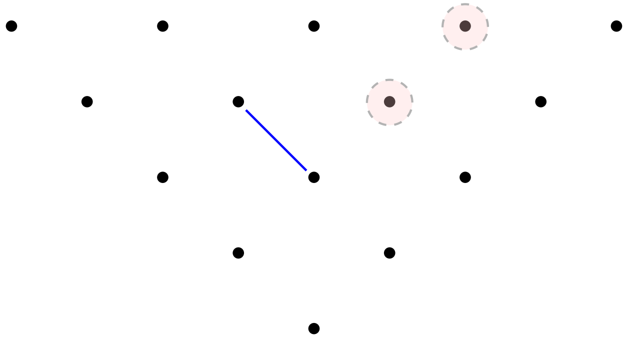
Inversion dans un triangle Gog



$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
 & 1 & & 3 & & 4 & & 5 & \\
 & & 1 & & 4 & & 5 & & \\
 & & & 2 & & 4 & & & \\
 & & & & 3 & & & &
\end{array}
$$

Inversion dans un triangle

Soit x un triangle Gog . x contient une inversion $(x_{i,j} = x_{i+1,j})$

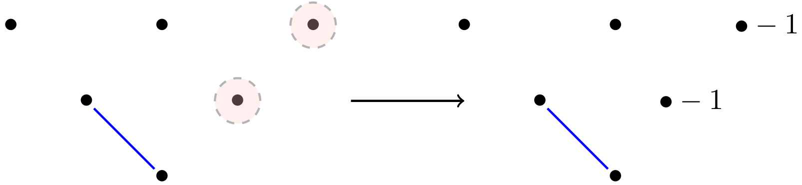


Les éléments  sont couverts par l'inversion.

Première approche

Transformation de l'inversion (φ)

La transformation de l'inversion diminue les éléments couverts par chaque inversion de 1



Première approche

Problème :

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 \\
& 1 & & 3 & & 4 & \\
& & 2 & & 3 & & \\
& & & 2 & & &
\end{array}
\quad \xrightarrow{\varphi} \quad
\begin{array}{ccccccc}
1 & & 1 & & 3 & \not\leq & 2 \\
& 1 & & 3 & \not\leq & 2 & \\
& & 2 & & 2 & & \\
& & & 2 & & &
\end{array}
$$

Première approche

Problème :

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 \\
& 1 & & 3 & & 4 & \\
& & 2 & & 3 & & \\
& & & 2 & & &
\end{array}
\xrightarrow{\varphi}
\begin{array}{ccccccc}
1 & & 1 & & 3 \not\leq & & 2 \\
& 1 & & 3 \not\leq & & 2 & \\
& & 2 & & 2 & & \\
& & & 2 & & &
\end{array}
$$

Solution

Traitement successif des inversions $\Rightarrow$ Ajout de diagonales NW-SE

Algorithme

- *Init.* Gog de taille 1 $\Rrightarrow$ $X^{(1)} = n$
- 1^{re} *étape* $\Rrightarrow$ 2 diagonales

$$\begin{array}{ccc} n-1 & & n \\ & a_1 & \end{array}$$

$a_1 = n-1$:

$$\begin{array}{ccc} n-1 & & n \\ & n-1 & \end{array} \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{ccc} n-1 & & n-1 \\ & n-1 & \end{array}$$

$a_1 = n$:

$$\begin{array}{ccc} n-1 & & n \\ & n & \end{array}$$

Hypothèse : k diagonales traitées

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
n-k+1 & & n-k+1 & & * & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
& n-k+1 & & * & & * & & v_2 & & u_1 & \\
& & * & & * & & * & & * & & \\
& & & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
& & & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
& & & & & u_{k-1} & & & & &
\end{array}
$$

Avec

- $u_0 \leqslant n$
- $u_0 - u_i + v_i \leqslant n - 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$
- $u_0 - u_i + v_i - v_j \leqslant j - 1$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant k-1$

- Insertion de la $k+1^{me}$diagonale

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\color{red}{n-k} & & n-k+1 & & n-k+1 & & * & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
& \color{red}{n-k} & & n-k+1 & & * & & * & & v_2 & & u_1 & \\
& & \color{red}{*} & & * & & * & & * & & * & & \\
& & & \color{red}{n-k} & & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
& & & & \color{red}{n-k} & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
& & & & & \color{red}{v_k} & & u_{k-1} & & & & & \\
& & & & & & \color{red}{u_k} & & & & & &
\end{array}
$$

- Insertion de la $k+1^{me}$diagonale

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
n-k & & n-k+1 & & n-k+1 & & * & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
& n-k & & n-k+1 & & * & & * & & v_2 & & u_1 & \\
& & * & & * & & * & & * & & * & & \\
& & & n-k & & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
& & & & n-k & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
& & & & & v_k & & u_{k-1} & & & & & \\
& & & & & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

4 cas :

1. $v_k = n-k = u_k$
2. $v_k = n-k < u_k$
3. $n-k < v_k = u_k$
4. $n-k < v_k < u_k$

- Insertion de la $k+1^{me}$ diagonale $\Rrightarrow X^{(k+1)}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
n-k & & n-k & & n-k & & * & & n-k & & v'_1 & & u'_0 \\
& n-k & & n-k & & * & & * & & v'_2 & & u'_1 & \\
& & * & & * & & * & & * & & * & & \\
& & & n-k & & n-k & & v'_{k-2} & & u'_{k-3} & & & \\
& & & & n-k & & v'_{k-1} & & u'_{k-2} & & & & \\
& & & & & v'_k & & u'_{k-1} & & & & & \\
& & & & & & u'_k & & & & & &
\end{array}
$$

Remarque

Dans tous les cas $u'_k = u_k$

1^{er} **cas** :$n-k=v_k=u_k$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
n-k & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
 & v_k & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

- $u'_i \longleftarrow u_i - 1$ pour $i \leqslant k-1$
- $v'_i \longleftarrow v_i - 1$ pour $i \leqslant k-1$
- $v'_k = v_k = n-k$

1^{er} **cas** : $n-k=v_k=u_k$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & n-k & & v_1-1 & & u_0-1 \\
 & & & & * & & v_2-1 & & u_1-1 & \\
 & & & * & & * & & * & & \\
 & & n-k & & v_{k-2}-1 & & u_{k-3}-1 & & & \\
 & {\color{red}n-k} & & v_{k-1}-1 & & u_{k-2}-1 & & & & \\
 & & {\color{red}n-k} & & u_{k-1}-1 & & & & & \\
 & & & {\color{red}n-k} & & & & & &
\end{array}
$$

Vérification $\Rrightarrow$ Le triangle obtenu est un Gelfand Tsetlin

- $u'_0 = n-1 \leqslant n$
- $u'_0 - u'_i + v'_i = u_0 - u_i + v_i \leqslant n-1$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$
- $u'_0 - u'_i + v'_i - v'_k = u_0 - u_i + v_i - 1 - (n-k) \leqslant n-1-1-(n-k) = k-2$

2^{me} **cas** :$v_k = n - k < u_k$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
n-k & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
 & v_k & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

- $u'_i \longleftarrow u_i$ pour $i \leqslant k-1$
- $v'_i \longleftarrow v_i - 1$ pour $i \leqslant k-1$
- $v'_k = v_k = n - k$

2^{me} **cas** :$v_k = n - k < u_k$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & n-k & & v_1-1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2-1 & & u_1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k & & v_{k-2}-1 & & u_{k-3} & & & \\
n-k & & v_{k-1}-1 & & u_{k-2} & & & & \\
 & n-k & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

Vérification $\Rrightarrow$ Le triangle obtenu est un Gelfand Tsetlin

- $u'_0 = u_0 \leqslant n$
- $u'_0 - u'_i + v'_i = u_0 - u_i + v_i - 1 \leqslant n - 2$, $u'_0 - u'_k + v'_k \leqslant n - 1$
- $u'_0 - u'_i + v'_i - v'_j + 1 \leqslant j - 1$

3^{me} cas : $n - k < v_k = u_k$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
n-k & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
 & v_k & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

- $u'_i \longleftarrow u_i - 1$ pour $i \leqslant k - 1$

3^{me} **cas** :$n-k < v_k = u_k$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k & & v_1 & & u_0-1 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1-1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k & & v_{k-2} & & u_{k-3}-1 & & & \\
n-k & & v_{k-1} & & u_{k-2}-1 & & & & \\
 & v_k & & u_{k-1}-1 & & & & & \\
 & & u_k & & & & & &
\end{array}$$

- $u'_i \longleftarrow u_i - 1$ pour $i \leqslant k-1$

3^{me} **cas** :$n - k < v_k = u_k$

2 cas :

(a) $X^{(k+1)}$ est un triangle de Gelfand-Tsetlin

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k & & v_1 & & u_0-1 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1-1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k & & v_{k-2} & & u_{k-3}-1 & & & \\
n-k & & v_{k-1} & & u_{k-2}-1 & & & & \\
 & v_k & & u_{k-1}-1 & & & & & \\
 & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

- $v'_i \longleftarrow v_i$ pour $i \leqslant k$

3^{me} cas : $n-k < v_k = u_k$

2 cas :

(b) $X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin

$\Rrightarrow \exists j \leqslant k-1$ tel que $u_j = v_j$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k+1 & & v_j & & u_{k-3} & & & \\
n-k & & v_{k-1} & & u_j & & & & \\
 & v_k & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

3^{me} **cas** :$n-k < v_k = u_k$

2 cas :

(b) $X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin
$\Rightarrow \exists j \leqslant k-1$ tel que $u_j = v_j$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & n-k & & v_1-1 & & u_0-1 \\
 & & & & & * & & v_2-1 & & u_1-1 & \\
 & & & & * & & * & & * & & \\
 & & & n-k & & v_j-1 & & u_{k-3}-1 & & & \\
 & & n-k & & v_{k-1}-1 & & u_j-1 & & & & \\
 & & & n-k & & u_{k-1}-1 & & & & & \\
 & & & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

- $v'_k \longleftarrow n-k$
- $v'_i \longleftarrow v_i - 1$ pour $i \leqslant k-1$

4^{me} **cas** :$n-k < v_k < u_k$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
\color{red}{n-k} & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
 & \color{red}{v_k} & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & \color{red}{u_k} & & & & & &
\end{array}
$$

4^{me} **cas** : $n-k < v_k < u_k$

2 cas :

(a) $v_k \leqslant v_{k-1} \Rrightarrow X^{(k+1)}$ est un triangle de Gelfand-Tsetlin

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
\color{red}{n-k} & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
 & \color{red}{v_k} & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & \color{red}{u_k} & & & & & &
\end{array}
$$

- $v'_i \longleftarrow v_i$ pour $i \leqslant k$
- $u'_i \longleftarrow u_i$ pour $i \leqslant k$

4^{me} **cas** : $n-k < v_k < u_k$

2 cas :

(b) $v_k > v_{k-1} \Rrightarrow X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & * & & * & & \\
 & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
\color{red}{n-k} & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
 & \color{red}{v_k} & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & \color{red}{u_k} & & & & & &
\end{array}
$$

- $v'_i \longleftarrow v_i$ pour $i \leqslant k$
- $u'_i \longleftarrow u_i$ pour $i \leqslant k$

4^{me} **cas** :$n-k < v_k < u_k$

2 cas :

(b) $v_k > v_{k-1} \not\Rightarrow X^{(k+1)}$ n'est pas un GT

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & v_{k-3} & & * & & \\
 & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
{\color{red}n-k} & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
 & {\color{red}v_k} & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & {\color{red}u_k} & & & & & &
\end{array}
$$

- Soit $l = \max\{i | v_{k-i} \leqslant v_k - i\}$

4^{me} **cas** : $n-k < v_k < u_k$

2 cas :

(b) $v_k > v_{k-1} \Rrightarrow X^{(k+1)}$ n'est pas un GT

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k+1 & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & \color{blue}{v_{k-l}} & & * & & \\
 & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} & & & \\
\color{red}{n-k} & & v_{k-1} & & u_{k-2} & & & & \\
 & \color{red}{v_k} & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & \color{red}{u_k} & & & & & &
\end{array}$$

- Soit $l = \max\{i | v_{k-i} \leqslant v_k - i\}$

4^{me} **cas** : $n-k < v_k < u_k$

2 cas :

(b) $v_k > v_{k-1} \Rrightarrow X^{(k+1)}$ n'est pas un GT

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & n-k & & v_1 & & u_0 \\
 & & & * & & v_2 & & u_1 & \\
 & & * & & v_k - l & & * & & \\
 & n-k & & n-k & & u_{k-3} & & & \\
n-k & & n-k & & u_{k-2} & & & & \\
 & n-k & & u_{k-1} & & & & & \\
 & & u_k & & & & & &
\end{array}
$$

- Soit $l = \max\{i | v_{k-i} \leqslant v_k - i\}$
  - $v'_k = v'_{k-1} = \cdots = v'_{k-l+1} \longleftarrow n-k$
  - $v'_{k-l} \longleftarrow v_k - l$
  - $v'_i \longleftarrow v_i$ pour $i < k-l$

Preuve de l'algorithme

Remarque

Les règles (1), (2), $(3a)$ et $(4a)$ $\Rrightarrow$ Diminution de 1 des éléments couverts.

- On montre (sans trop de difficultés) que (1), (2), $(3a)$, $(3b)$, et $(4a)$ $\Rrightarrow$ GOGAm

Preuve de l'algorithme

Remarque

Les règles (1), (2), $(3a)$ et $(4a)$ $\Rrightarrow$ Diminution de 1 des éléments couverts.

- On montre (sans trop de difficultés) que (1), (2), $(3a)$, $(3b)$, et $(4a)$ $\Rrightarrow$ GOGAm

Lemme

Juste aprés (1) ou (2), La règle $(3b)$ ne peut être appliquée

$$\begin{array}{ccccc} n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} \\ & n-k+1 & & u_{k-2} & \\ & & n-k+1 & & \end{array}$$

Preuve de l'algorithme

Remarque

Les règles (1), (2), (3a) et (4a) $\Rrightarrow$ Diminution de 1 des éléments couverts.

- On montre (sans trop de difficultés) que (1), (2), (3a), (3b), et (4a) $\Rrightarrow$ GOGAm

Lemme1

Juste aprés (1) ou (2), La règle (3b) ne peut être appliquée

Preuve pour (1)

$$\begin{array}{cccccc}
 & n-k+1 & & v_{k-2} & & u_{k-3} \\
n-k & & n-k+1 & & u_{k-2} & \\
 & v_k & & n-k+1 & & \\
 & & u_k & & &
\end{array}$$

Lemme2

Si $(4b)$ appliquée à l'étape k, alors à l'étape précédente les règles $(3b)$ ou $(4b)$ ont été appliquées

Lemme2

Si $(4b)$ appliquée à l'étape k, alors à l'étape précédente les règles $(3b)$ ou $(4b)$ ont été appliquées

Preuve

Par l'absurde (Sinon $v_{k-1} \geqslant v_k$)

Lemme2

Si $(4b)$ appliquée à l'étape k, alors à l'étape précédente les règles $(3b)$ ou $(4b)$ ont été appliquées

Lemme3

Si $(4b)$ appliquée à $X^{(k)}$, alors à $X^{(k-l)}$, $X^{(k-l+1)}$, $\cdots$, à $X^{(k-1)}$ soit $(3b)$ ou $(4b)$ de plus

$$v_{k-1} = \cdots = v_{k-l} = n - k + 1$$

Lemme2

Si $(4b)$ appliquée à l'étape k, alors à l'étape précédente les règles $(3b)$ ou $(4b)$ ont été appliquées

Lemme3

Si $(4b)$ appliquée à $X^{(k)}$, alors à $X^{(k-l)}$, $X^{(k-l+1)}$, $\cdots$, à $X^{(k-1)}$ soit $(3b)$ ou $(4b)$ de plus

$$v_{k-1} = \cdots = v_{k-l} = n - k + 1$$

Lemme4

Si $(4b)$ ou $(3b)$ à $X^{(k)}$, alors $\exists i < k - l$ tel que $u'_i = v'_i$

Lemme2

Si $(4b)$ appliquée à l'étape k, alors à l'étape précédente les règles $(3b)$ ou $(4b)$ ont été appliquées

Lemme3

Si $(4b)$ appliquée à $X^{(k)}$, alors à $X^{(k-l)}$, $X^{(k-l+1)}$, $\cdots$, à $X^{(k-1)}$ soit $(3b)$ ou $(4b)$ de plus

$$v_{k-1} = \cdots = v_{k-l} = n - k + 1$$

Lemme4

Si $(4b)$ ou $(3b)$ à $X^{(k)}$, alors $\exists i < k - l$ tel que $u'_i = v'_i$

Preuve

- Par définition pour $(3b)$
- Pour $(4b)$:Lemme2+ $(3b)$ ou $(4b)$ préservent les inversions+Lemme3 $\Rrightarrow i < k - l$

Vérification : $(4b)$ à $X^{(k)}$

$v'_{k-l} \longleftarrow v_k - l$ et $v_{k-l-1} > v_k - l - 1$ et $v'_{k-l-1} > v'_{k-l}$

$\Rrightarrow$ $X^{(k+1)}$ est un triangle de Gelfand Tsetlin

- $u'_0 = u_0 \leqslant n$
- $u'_0 - u'_i + v'_i \leqslant n - 1$ $(u'_i = u'_i$ et $v'_i \leqslant v_i)$
  $u'_0 - u'_{k-l} + v'_{k-l} \leqslant n - 1$ $(u'_{k-l} = u_{k-l} \geqslant u_k > v_k - l = v'_{k-l})$
  $u'_0 - u'_k + v'_k \leqslant n - 1$ $(u'_k > v'_k)$

Exemple :$(2, 20)$Gog trapézoïde :

20

Exemple :$(2, 20)$Gog trapézoïde :

$$\begin{array}{ccc} 19 & & 19 \\ & 19 & \end{array}$$

Exemple :$(2, 20)$Gog trapézoïde :

$$\begin{array}{ccccc}
12 & & 19 & & 19 \\
& 18 & & 19 & \\
& & 18 & &
\end{array}$$

Exemple :$(2, 20)$Gog trapézoïde :

$$\begin{array}{ccccc}
12 & & 18 & & 18 \\
& 12 & & 18 & \\
& & 18 & &
\end{array}$$

Exemple :$(2, 20)$Gog trapézoïde :

$$\begin{array}{ccccc}
 & 12 & & 18 & & 18 \\
11 & & 12 & & 18 & \\
 & 17 & & 18 & & \\
 & & 17 & & &
\end{array}$$

Exemple :$(2,20)$Gog trapézoïde :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 11 & & 17 & & 17 \\
11 & & 11 & & 17 & \\
 & 11 & & 17 & & \\
 & & 17 & & &
\end{array}$$

Exemple :$(2,20)$Gog trapézoïde :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 11 & & 17 & & 17 \\
 & 11 & & 11 & & 17 & \\
10 & & 11 & & 17 & & \\
 & 16 & & 17 & & & \\
 & & 16 & & & &
\end{array}
$$

Exemple :$(2,20)$Gog trapézoïde :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 10 & & 16 & & 16 \\
 & 10 & & 10 & & 16 & \\
10 & & 10 & & 16 & & \\
 & 10 & & 16 & & & \\
 & & 16 & & & &
\end{array}
$$

Exemple :$(2, 20)$Gog trapézoïde :

			10		16		16
		10		10		16	
	10		10		16		
9		10		16			
	13		16				
		15					

Exemple :$(2,20)$Gog trapézoïde :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & 9 & & 16 & & 16 \\
 & & 9 & & 10 & & 16 & \\
 & 9 & & 9 & & 16 & & \\
9 & & 9 & & 16 & & & \\
 & 9 & & 16 & & & & \\
 & & 15 & & & & &
\end{array}$$

Théorème

Cet algorithme est une bijection