Intégrales Itérées en Physique Combinatoire

Thèse encadrée par Gérard H. E. Duchamp et Jean-Gabriel Luque

Matthieu Deneufchâtel

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord,
Université Paris 13

27 septembre 2012

Plan

Soit X un alphabet et $k\langle X\rangle$ l'ensemble des polynômes non commutatifs sur X à coefficients dans k.

Définition

Le *produit de mélange* $⧢$: $X^* \times X^* \to \mathbb{N}\langle X\rangle$ est défini récursivement par :

$$\begin{cases} 1 ⧢ w = w ⧢ 1 = w \ ; \\ (au) ⧢ (bv) = a\Big(u ⧢ (bv)\Big) + b\Big((au) ⧢ v\Big) \end{cases}$$

pour tous u, v, $w \in X^*$ et $a, b, \in X$.

Exemple :

$$\begin{aligned} abd ⧢ ce &= abdce + abcde + abced \\ &+ acbde + acbed + acebd \\ &+ cabde + cabed + caebd + ceabd. \end{aligned}$$

Lien avec les intégrales itérées :
soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel de fonctions admettant des primitives sur $[a, b]$; notons

$$[f_1 \dots f_n] := \int_a^b dy_1 \int_a^{y_1} \dots \int_a^{y_{n-1}} dy_n\, f_1(y_1) \dots f_n(y_n).$$

Soit $(\phi_x)_{x \in X}$ une famille de fonctions.
À

$$w = x_{i_1} \dots x_{i_k},$$

on associe l'intégrale

$$[w] = \left[\phi_{x_{i_1}} \dots \phi_{x_{i_k}}\right].$$

Lemme de Chen [Chen, 1977]

$\forall\, u, v \in X^*$,

$$[u]\,[v] = [u \sqcup\!\sqcup v]\,.$$

- Intégrales de type Selberg et asymptotiques :
  - intégrales itérées ;
  - étude à l'aide de méthodes combinatoires (différences divisées, transformée binomiale).
- Hyperlogarithmes :
  - structure multiplicative donnée par $\sqcup\!\sqcup$;
  - étude des propriétés d'indépendance linéaire par méthodes combinatoires (polynômes non commutatifs).
- Dualité Poincaré-Birkhoff-Witt - Radford :

$$(k\langle X\rangle, \mathrm{conc}, 1_{X^*}, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \epsilon) \xleftrightarrow{\langle\cdot|\cdot\rangle} (k\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, 1_{X^*}, \Delta_{\mathrm{conc}}, \epsilon).$$

Plan

Mesure de Selberg :

$$\prod_{i=1}^{N} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{2c} dx_i.$$

Intégrale de type Selberg :

$$\langle f \rangle_{a,b,c}^{N} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{[0,1]^N} f(x_1, \dots, x_N) \prod_{i=1}^{N} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{2c} dx_i,$$

$a, b, c \in \mathbb{C}$.

- Apparaît dans l'étude des systèmes chaotiques quantiques.
- Étudiée à l'aide d'outils / méthodes combinatoires.

Objectifs :

- Calcul de l'intégrale pour f quelconque.
- Étude de la limite $N \to \infty$.

Résultat de base :

Intégrale de Selberg [Selberg, 1944]

$$S_N(a,b,c) := \int_{[0,1]^N} \prod_{i=1}^{N} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{2c} dx_i$$

$$= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma\Big(a+jc\Big)\Gamma\Big(b+jc\Big)\Gamma\Big(1+(j+1)c\Big)}{\Gamma\Big(a+b+(N+j-1)c\Big)\Gamma\Big(1+c\Big)}.$$

Objectif : Calcul de $\langle f \rangle^{\sharp}_{a,b,c,N} := \dfrac{\langle f \rangle^{N}_{a,b,c}}{\langle 1 \rangle^{N}_{a,b,c}}$.

Route :

- Utilisation du résultat suivant :

Intégrale de Selberg-Jack [Kaneko, 1993]

$$\langle P^{(\frac{1}{c})}_{\lambda} \rangle^{N}_{a,b,c} = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\Gamma\Big(\lambda_i - \lambda_j + c(j - i + 1)\Big)}{\Gamma\Big(\lambda_i - \lambda_j + c(j - i)\Big)}$$
$$\prod_{i=1}^{N} \frac{\Gamma\Big(\lambda_i + a + c(N - i)\Big)\Gamma\Big(b + c(N - i)\Big)}{\Gamma\Big(\lambda_i + a + b + c(2N - i - 1)\Big)}.$$

Objectif : Calcul de $\langle f\rangle^{\sharp}_{a,b,c,N} := \dfrac{\langle f\rangle^{N}_{a,b,c}}{\langle 1\rangle^{N}_{a,b,c}}$.

Route :

- Utilisation du résultat suivant :

Intégrale de Selberg-Jack [Kaneko, 1993]

$$\langle P_\lambda^{(\frac{1}{c})}\rangle^{N}_{a,b,c} = \prod_{1\leq i<j\leq N} \frac{\Gamma\Big(\lambda_i-\lambda_j+c(j-i+1)\Big)}{\Gamma\Big(\lambda_i-\lambda_j+c(j-i)\Big)} \prod_{i=1}^{N} \frac{\Gamma\Big(\lambda_i+a+c(N-i)\Big)\Gamma\Big(b+c(N-i)\Big)}{\Gamma\Big(\lambda_i+a+b+c(2N-i-1)\Big)}.$$

- Développement de f sur la base des polynômes de Jack P_λ.
- Étude asymptotique :
  - simplifications (nombre de facteurs (in)dépendant de N) ;
  - "bon" développement de f sur les polynômes de Jack.

Simplification [MD, 2010] [1]

Pour tout $c \in \mathbb{C}$,

$$\langle P_\lambda^{(\frac{1}{c})} \rangle^\sharp_{a,b,c,N} = \left[\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=i+1}^{\ell(\lambda)} \frac{\Gamma\Big(\lambda_i - \lambda_j + c(j-i+1)\Big)\Gamma\Big(c(j-i)\Big)}{\Gamma\Big(\lambda_i - \lambda_j + c(j-i)\Big)\Gamma\Big(c(j-i)+1\Big)} \right]$$

$$\left[\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{u=0}^{\lambda_i - 1} \frac{c(N+1-i)+u}{c(\ell(\lambda)+1-i)+u} \right] \left[\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=0}^{\lambda_i - 1} \frac{a+c(N-i)+j}{a+b+c(2N-i-1)+j} \right].$$

1. *How to compute Selberg-like integrals ?* MD, in Proceedings of the 13th Mons Days of Theoretical Computer, edited by the LAMFA, Amiens (2010).

Application : Calcul de

$$I_k := \langle p_k \rangle^{\sharp}_{a,b,c,N}, \quad p_k = \sum_i x_i^k.$$

Problème : Coefficient de $P_\lambda^{(c)}$ dans p_k ?

Lemme

Le coefficient de $P_\lambda^{(c)}$ dans p_k est égal à

$$\alpha_{\lambda,k} = k \frac{\displaystyle\prod_{\substack{(i,j)\in\lambda \\ (i,j)\neq(1,1)}} \Big((j-1) - c(i-1)\Big)}{\displaystyle\prod_{s\in\lambda} \Big(a_\lambda(s) + 1 + l_\lambda(s)c\Big)}.$$

Ne dépend pas du nombre de variables.

Étude asymptotique dans le cas $c = 1$ pour les sommes de puissance.

[CDLV, 2010] [2]

Pout tout $k > 0$,

$$I_k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} \prod_{j=-i}^{k-i-1} \frac{(N+j)(a+N+j-1)}{a+b+2N+j-2}.$$

2. *Asymptotics of Selberg-like integrals : The unitary case and Newton's interpolation formula*, C. Carré, MD, J.-G. Luque and P. Vivo, Journal of Mathematical Physics, 51 (12), 2010.

Transformée binomiale inverse : Si $\mathbb{F} = (f_i(x))_i$ est une suite de polynômes, elle est définie par

$$\mathfrak{B}_k^{-1}[\mathbb{F}] \ := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i(x).$$

- Degré ($\rightarrow$ existence de la limite) de la TBI de polynômes du type

$$P_i^k(x; a, b) := \prod_{j=0}^{k-i-1} (x + j + a) \prod_{j=0}^{i-1} (x - j + b) \ ;$$

- Coefficient dominant ($\rightarrow$ valeur de la limite) ;
- Utilisation des liens avec l'interpolation de Newton et les différences divisées (algèbre d'opérateurs).

Avec s_i : transposition $(i, i+1)$,

$$\partial_i = (1 - s_i)\frac{1}{x_i - x_{i+1}}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Pour tous $m \leq n$,

$$f\partial_{m\dots n} = f(y_m)\partial_{y_m y_{m+1}} \dots \partial_{y_n y_{n+1}}|_{y_i = i}.$$

De plus, $\partial_i := \partial_{i\dots i+1}$.

Lien avec l'interpolation de Newton [CDLV, 2010]

Soit $k < p$ deux entiers.
Soit F l'unique polynôme en y à coefficients dans $\mathbb{C}[x]$ de degré p (en y) interpolant les points $(0, f_0(x)), \dots, (p, f_p(x))$.
Alors

$$\mathfrak{B}_k^{-1}\left[\Big(f_i(x)\Big)_i\right] = k! F \partial_{0\dots p}.$$

Supposons que $a = a(N)$ et $b = b(N)$ sont des fonctions linéaires de N.

Existence de la limite [CDLV, 2010]

$$\left| \lim_{N\to\infty} \frac{I_k}{N} \right| < +\infty.$$

Supposons que $a = a(N)$ et $b = b(N)$ sont des fonctions linéaires de N.

Existence de la limite [CDLV, 2010]

$$\left| \lim_{N\to\infty} \frac{I_k}{N} \right| < +\infty.$$

Valeur de la limite [CDLV, 2010]

En posant $a = a_1 N + a_0$ et $b = b_1 N + b_0$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{I_k}{N} = \frac{1+a_1}{k(2+a_1+b_1)^k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left(\frac{1+a_1}{2+a_1+b_1} \right)^j \binom{j+k-1}{j} \sum_{i=0}^{k-1-j} (1+a_1)^i \binom{k}{i+j+1} \binom{k}{i}.$$

Conclusion - Perspectives :

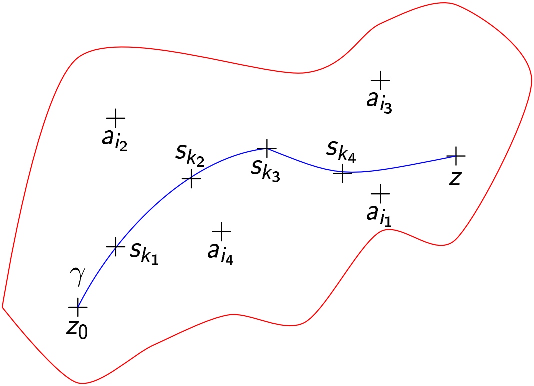
- Liens avec divers objets combinatoires (chemins de Dyck, triangle de Catalan, chemin sur des treillis...) ;
- Autres approches :
  - fonctions hypergéométriques (C. Krattenthaler) ;
  - chemin sur des treillis (M. Novaes) ;
- Limite dans le cas général ($c \in \mathbb{C}$; généralisation de l'approche par transformée binomiale ?).

Plan

a_i une famille de complexes $z_0 \neq a_{i_0}$.

Définition [Lappo-Danilevskiĭ, 1928]

$$L(a_{i_0},\ldots,a_{i_n}|z_0 \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} z) = \int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{s_n}\cdots\int_{z_0}^{s_1} \frac{ds_0}{s_0 - a_{i_0}}\cdots\frac{ds_n}{s_n - a_{i_n}}.$$



Questions et Objectifs :

- Liberté de la famille des hyperlogarithmes ? Sur quel corps ?
- Approche utilisant des méthodes de combinatoire algébrique.
- Généraliser les résultats connus sans utiliser la monodromie.
- Critère aussi général que possible (extension à des corps de fonctions).

Idée générale

- Encoder les hyperlogarithmes par des mots $\rightarrow$ Série génératrice non-commutative.
- Équation différentielle non-commutative.
- Étude des propriétés des solutions de ce type d'équations différentielles et de leurs coefficients.
- Utilisation de corps de fonctions : nécessité d'inverser des fonctions avec domaines de définition différents $\rightarrow$ corps de fonctions *à domaine variable*.

Ingrédients

- Séries (génératrices) non-commutatives à coefficients fonctionnels dans $\mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle$ où :
  - k-Algèbre différentielle $(\mathscr{A}, \mathrm{d})$ avec $\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}(a)\, b + a\, \mathrm{d}(b)$;
  - Dérivation des séries : $\mathbf{d}(S) = \sum \mathrm{d}(\langle S|w\rangle)w$.
- Équation différentielle non commutative de la forme $\mathbf{d}(S) = MS$ où
  - $\mathscr{C}$: sous-corps différentiel de $\mathscr{A}$: $\mathrm{d}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$ (par exemple : fractions rationnelles, fonctions méromorphes...) ;
  - Multiplicateur $M = \sum_{x\in X} u_x x$, $u_x \in \mathscr{C}$.
- On a besoin de la condition $\ker(\mathrm{d}) = k$.

Théorème général [DDMS, 2011] [3]

Soit $S \in \mathscr{A}\langle\langle X\rangle\rangle$ une solution de l'équation différentielle

$$\mathbf{d}(S) = MS \;;\; \langle S|1_{X^*}\rangle = 1.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

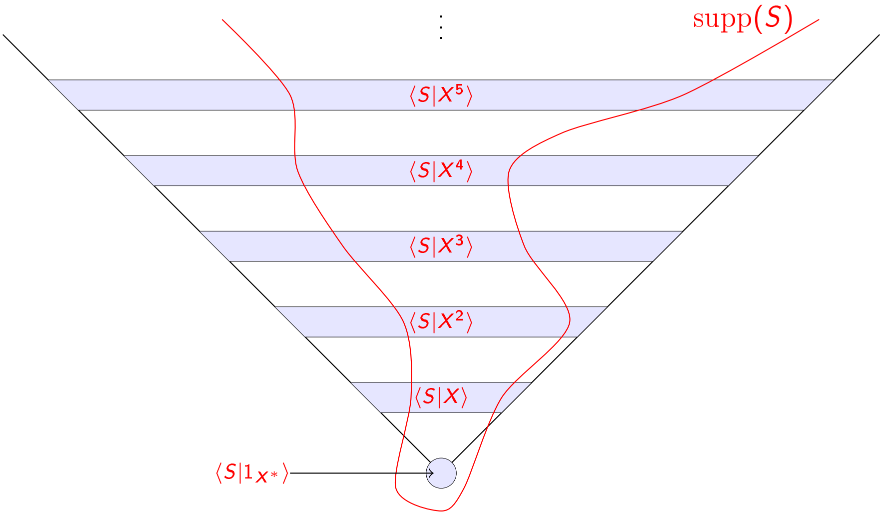
i) la famille $(\langle S|w\rangle)_{w\in X^*}$ des coefficients de S est linéairement indépendante sur $\mathscr{C}$.

ii) la famille des coefficients $(\langle S|x\rangle)_{x\in X\cup\{1_{X^*}\}}$ est linéairement indépendante sur $\mathscr{C}$.

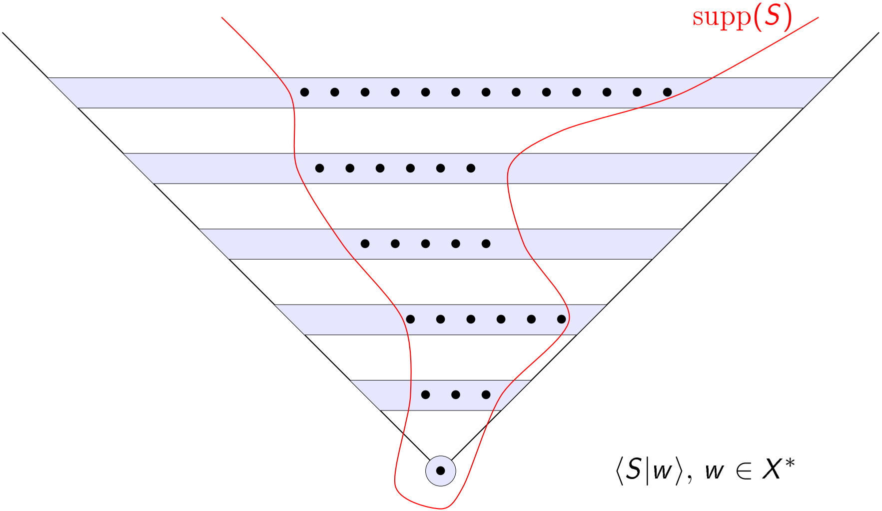
iii) la famille $(u_x)_{x\in X}$ est telle que, pour $f \in \mathscr{C}$ et $\alpha_x \in k$

$$\mathrm{d}(f) = \sum_{x\in X} \alpha_x u_x \Longrightarrow (\forall x \in X)(\alpha_x = 0).$$

3. *Independence of Hyperlogarithms over Function Fields via Algebraic Combinatorics*, MD, G. H. E. Duchamp V. Hoang Ngoc Minh and A. I. Solomon, 4th International Conference on Algebraic Informatics, Linz (2011). Proceedings, Lecture Notes in Computer Science, 6742, Springer.

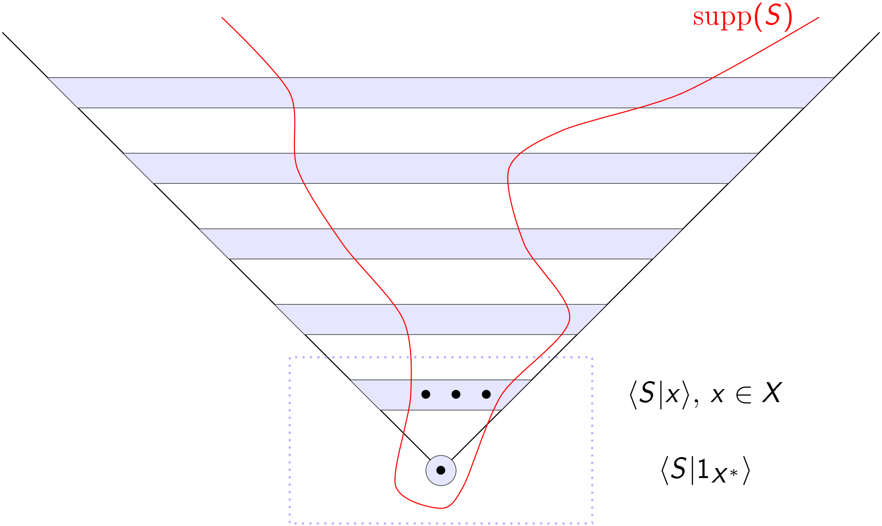


supp(S)
⋮
$\langle S|X^5\rangle$
$\langle S|X^4\rangle$
$\langle S|X^3\rangle$
$\langle S|X^2\rangle$
$\langle S|X\rangle$
$\langle S|1_{X^*}\rangle$



$\langle S|w\rangle$, $w \in X^*$

linéairement indépendants ?



linéairement indépendants ?

Encodage par des mots des hyperlogarithmes :

$$\begin{aligned}
\alpha_{z_0}^{z}(1_{X^*}) &= 1 ;\\
\alpha_{z_0}^{z}(x_i) &= \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{s-a_i},\ x_i \in X ;\\
\alpha_{z_0}^{z}(x_i w) &= \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{s-a_i}\,\alpha_{z_0}^{s}(w),\ x_i \in X,\ w \in X^*.
\end{aligned}$$

Encodage par des mots des hyperlogarithmes :

$$\begin{aligned}
\alpha_{z_0}^{z}(1_{X^*}) &= 1 \ ; \\
\alpha_{z_0}^{z}(x_i) &= \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{s-a_i},\ x_i \in X \ ; \\
\alpha_{z_0}^{z}(x_i w) &= \int_{z_0}^{z} \frac{ds}{s-a_i}\,\alpha_{z_0}^{s}(w),\ x_i \in X,\ w \in X^*.
\end{aligned}$$

Série génératrice : $L(z) = \sum_{w \in X^*} \alpha_{z_0}^{z}(w) w.$

Équation différentielle : $\frac{dL}{dz} = M(z)L(z)$ avec $M(z) = \sum_{x_i \in X} \frac{1}{z-a_i} x_i.$

Conséquence : Indépendance linéaire des hyperlogarithmes sur un corps de fonctions contenant les $u_i = \frac{1}{z-a_i}$.

Utilisation de corps de germes : ensemble de classes d'équivalence de fonctions pour la relation suivante :

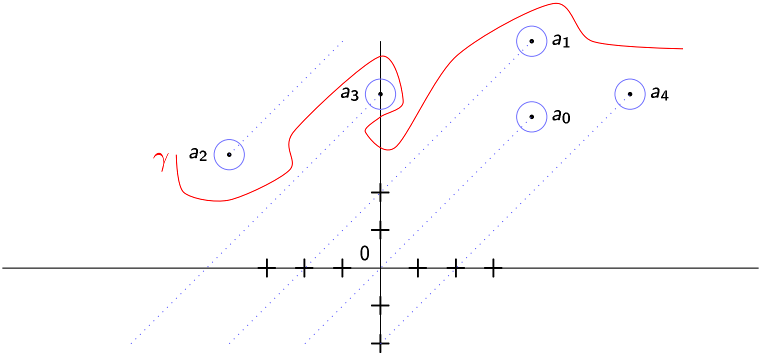
$$f \equiv g \Leftrightarrow \exists U \in F,\ U \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g),\ f\Big|_U = g\Big|_U$$

où F est une base de filtre.

Exemples de corps de germes :

- Fractions rationnelles ;
- Fonctions inessentielles en un point ;
- Fonctions qui ne présentent de singularité essentielle en aucun des points d'un ensemble $\{a_0, \ldots, a_n\}$.

Utilisation de bases de filtre d'ouverts de $\mathbb{C}$ comme ensemble de domaines de définition des fonctions.



[DD, 2011]

Étant donnés des points $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, la famille des hyperlogarithmes dont les singularités sont choisies parmi les a_i est libre sur le corps $\mathscr{L}_{a_1,\ldots,a_n}$ de germes de fonctions qui ne sont essentielles en aucun des points $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Plan

Dès que l'on a une série de Chen T :

$$\langle T | u \sqcup\!\sqcup v \rangle = \langle T | u \rangle \langle T | v \rangle$$

et une factorisation

$$\sum_{w \in X^*} w \otimes w = \prod_{i \in I}^{\sqcup\!\sqcup \otimes \mathrm{conc}} \exp\left(S_i \otimes P_i\right)$$

pour une paire $(P_w, S_w)_{w \in X^*}$ de bases en dualité,

on peut écrire

$$T = \prod_{i \in I} \exp\left(\langle T | S_i \rangle P_i\right).$$

- I un ensemble ordonné par $<$: $i_1 > \cdots > i_k > \ldots$
- $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des fonctions à support fini de I dans $\mathbb{N}$.
- "Base" e_{i_0} : $e_{i_0}(i) = \delta_{i\, i_0}$.
- $Y = (y_i)_{i \in I} \;\rightarrow\; Y^{\alpha} := y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} y_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots y_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$.
- $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
- $B = (b_i)_{i \in I}$ une base ordonnée de $\mathfrak{g}$.

- I un ensemble ordonné par $<$: $i_1 > \cdots > i_k > \ldots$
- $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des fonctions à support fini de I dans $\mathbb{N}$.
- "Base" e_{i_0} : $e_{i_0}(i) = \delta_{i\, i_0}$.
- $Y = (y_i)_{i \in I} \rightarrow Y^\alpha := y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} y_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \cdots y_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$.
- $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
- $B = (b_i)_{i \in I}$ une base ordonnée de $\mathfrak{g}$.

Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

Les éléments

$$B^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{N}^{(I)},$$

forment une base de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ appelée base de PBW.

Propriétés de dualité entre $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{U}^*(\mathfrak{g})$ via $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
$(S_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ base duale de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt $(B^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$:

$$\langle S_\alpha | B^\beta \rangle = \delta_{\alpha\,\beta}.$$

Factorisation de Schützenberger

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes B^\alpha = \prod_{i\in I}^{\rightarrow} \exp\left(S_{e_i} \otimes b_i\right).$$

Résolution de l'unité :

$$\Phi \ : \begin{cases} V^* \otimes V & \rightarrow \quad \mathcal{E}\mathrm{nd}^{finis}(V) \\ f \otimes v & \mapsto \quad (b \mapsto f(b)\cdot v)\,. \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes B_\alpha\right) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}$$: factorisation de l'identité.

Résultat classique pour $k\langle X\rangle$:

$$P_w = \begin{cases} w & \text{si} \quad |w| = 1 \,; \\ [P_{\ell_1}, P_{\ell_2}] & \text{si} \quad w = \ell \in \mathfrak{L}\mathrm{yn}(X) \text{ et } (\ell_1, \ell_2) = \sigma(\ell) \,; \\ P_{\ell_1}^{\alpha_1} \dots P_{\ell_n}^{\alpha_n} & \text{si} \quad w = \ell_{i_1}^{\alpha_1} \dots \ell_{i_n}^{\alpha_n} \text{ avec } \ell_1 > \dots > \ell_n. \end{cases}$$

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si} \quad |w| = 1 \,; \\ xS_u & \text{si} \quad w = xu \text{ et } w \in \mathfrak{L}\mathrm{yn}(X) \,; \\ \dfrac{S_{\ell_{i_1}}^{ш\alpha_1} ш \dots ш S_{\ell_{i_k}}^{ш\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_{i_1}^{\alpha_1} \dots \ell_{i_k}^{\alpha_k} \\ \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathfrak{L}\mathrm{yn}(X). \end{cases} \end{cases}$$

Factorisation de l'unité

$$\sum_{w \in X^*} w \otimes w = \prod_{\ell \in \mathfrak{L}\mathrm{yn}(X)}^{\rightarrow} \exp(S_\ell \otimes P_\ell).$$

Problème inverse : écrire la factorisation en partant d'une famille $(S_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ de $\mathfrak{U}^*(\mathfrak{g})$.
Quelles conditions sur S_α ? Sur la famille duale ?

Motivation : Intérêt pour la famille

$$S'_w = \begin{cases} \ell & \text{si } \ell \in \mathfrak{Lyn}(X)\ ; \\ \dfrac{S_{\ell_{i_1}}^{\sqcup\!\sqcup\alpha_1} \sqcup\!\sqcup \ldots \sqcup\!\sqcup S_{\ell_{i_k}}^{\sqcup\!\sqcup\alpha_k}}{\alpha_1!\ldots\alpha_k!} & \text{si } w = \ell_1^{\alpha_1}\ldots\ell_k^{\alpha_k}, \begin{cases} \ell_1 > \cdots > \ell_k \\ \ell_1,\ldots,\ell_k \in \mathfrak{Lyn}(X). \end{cases} \end{cases}$$

- Caractérisation de la famille duale $\left(B'_w\right)_{w\in X^*}$;
- Factorisation avec la paire (S', B') ?

Définition

On dit que $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ est multiplicative pour $\times$ si, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}$,

$$T_\alpha \times T_\beta = T_{\alpha+\beta} \text{ pour tous } \alpha,\ \beta\in\mathbb{N}^{(I)}.$$

CN à l'écriture de la factorisation de l'unité : Multiplicativité de la famille duale des S_α.

Définition

On dit que $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ est multiplicative pour $\times$ si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$,

$$T_\alpha \times T_\beta = T_{\alpha+\beta} \text{ pour tous } \alpha,\, \beta \in \mathbb{N}^{(I)}.$$

CN à l'écriture de la factorisation de l'unité : Multiplicativité de la famille duale des S_α.

Cas général : Si $\langle S_\alpha | P_\beta\rangle = \delta_{\alpha\,\beta},\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}^{(I)}$ et $\langle S_{e_i} | 1_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}\rangle = 0,\ \forall i \in I$,

Critère général

$(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ est multiplicative si et seulement si

$$\forall i \in I,\ \forall\beta \in \mathbb{N}^{(I)},\ |\beta| \geq 2,\ \langle S_{e_i} | P^\beta\rangle = 0.$$

Question : $\forall i \in I,\ \forall\beta \in \mathbb{N}^{(I)},\ |\beta| = 2,\ \langle S_{e_i} | P^\beta\rangle = 0\,?$

Application à la paire (B'_w, S'_w) **:** On considère $X = \{a, b\}$ avec $a < b$.

- $a^2b^2 \in \mathfrak{L}\mathrm{yn}(a, b)$;
- $B'_{a^2b^2} = a^2b^2 - 2abab + 2baba - b^2a^2$;
- $\sigma\left[(a^2b^2)^2\right] = (a^2b^2, a^2b^2)$ donc $B'^{(a^2b^2)^2} = \left(B'_{a^2b^2}\right)^2$;

$$
\begin{aligned}
B'^{a^2b^2a^2b^2} &= a^2b^2a^2b^2 - 2a^2b^2abab + 2a^2b^3aba \\
&- a^2b^4a^2 - 2ababa^2b^2 + 4abababab \\
&- 4abab^2aba + 2abab^3a^2 + 2baba^3b^2 \\
&- 4baba^2bab + 4babababa - 2babab^2a^2 \\
&- b^2a^4b^2 + 2b^2a^3bab - 2b^2a^2baba + b^2a^2b^2a^2
\end{aligned}
$$

donc

$$\langle a^2b^2abab | B'^{a^2b^2a^2b^2} \rangle \neq 0 \text{ avec } a^2b^2abab \in \mathfrak{L}\mathrm{yn}(a,b).$$

$$\begin{aligned}
B'^{a^2b^2a^2b^2} &= a^2b^2a^2b^2 - 2a^2b^2abab + 2a^2b^3aba \\
&- a^2b^4a^2 - 2ababa^2b^2 + 4abababab \\
&- 4abab^2aba + 2abab^3a^2 + 2baba^3b^2 \\
&- 4baba^2bab + 4babababa - 2babab^2a^2 \\
&- b^2a^4b^2 + 2b^2a^3bab - 2b^2a^2baba + b^2a^2b^2a^2
\end{aligned}$$

donc

$$\langle a^2b^2abab | B'^{a^2b^2a^2b^2} \rangle \neq 0 \text{ avec } a^2b^2abab \in \mathfrak{L}\mathrm{yn}(a,b).$$

Par conséquent, $\left(B'_w\right)_{w \in X^*}$ n'est pas multiplicative (et même : pour aucun ordre).

$$\begin{aligned}
B'^{a^2b^2a^2b^2} &= a^2b^2a^2b^2 - 2a^2b^2abab + 2a^2b^3aba \\
&- a^2b^4a^2 - 2ababa^2b^2 + 4abababab \\
&- 4abab^2aba + 2abab^3a^2 + 2baba^3b^2 \\
&- 4baba^2bab + 4babababa - 2babab^2a^2 \\
&- b^2a^4b^2 + 2b^2a^3bab - 2b^2a^2baba + b^2a^2b^2a^2
\end{aligned}$$

donc

$$\langle a^2b^2abab|B'^{a^2b^2a^2b^2}\rangle \neq 0 \text{ avec } a^2b^2abab \in \mathfrak{Lyn}(a,b).$$

Par conséquent, $\left(B'_w\right)_{w\in X^*}$ n'est pas multiplicative (et même : pour aucun ordre).

Conséquence : Pas de factorisation de l'unité avec les bases B'_w et S'_w.

Proposition

Soit P appartenant à $k\langle X\rangle$ et $\ell \in \mathfrak{Lyn}(X)$. Alors

$$P = B'_\ell \Longleftrightarrow \begin{cases} P = \ell + \sum_{\ell<u} \langle P|u\rangle u; \\ P \text{ est primitif}; \\ \forall \ell_1 \in \mathfrak{Lyn}(X),\ \langle P|\ell_1\rangle = \delta_{\ell\,\ell_1}. \end{cases}$$

Construction récursive des B'_ℓ

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et
$$\mathfrak{L}_\alpha = \{\ell_1 < \cdots < \ell_m\}$$
l'ensemble des mots de Lyndon multihomogènes de multidegré α.

$$\begin{array}{rcl}
B'_{\ell_m} & = & P_{\ell_m} \ ; \\
B'_{\ell_{m-1}} & = & P_{\ell_{m-1}} - \langle P_{\ell_{m-1}} | \ell_m \rangle B'_{\ell_m} \ ; \\
B'_{\ell_{m-2}} & = & P_{\ell_{m-2}} - \langle P_{\ell_{m-2}} | \ell_{m-1} \rangle B'_{\ell_{m-1}} - \langle P_{\ell_{m-2}} | \ell_m \rangle B'_{\ell_m} \ ; \\
\vdots & & \\
B'_{\ell_{m-k}} & = & P_{\ell_{m-k}} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \langle P_{\ell_{m-k}} | \ell_{m-k+j} \rangle B'_{\ell_{m-k+j}} \ ; \\
\vdots & &
\end{array}$$

Perspectives 1/2 :

$$\begin{tikzcd}
(k\langle X\rangle, {\color{red}\sqcup\!\sqcup}) & (k\langle X\rangle, {\color{red}\mathrm{conc}}) & \mathscr{L}_k(X) \\
S'_w \arrow[r, "\langle\cdot|\cdot\rangle"] & B'_w \arrow[dr] & \\
 & & B'_\ell,\ \ell \in \mathfrak{L}\mathrm{yn}(X) \arrow[dl, "\text{Thm PBW}"] \\
Q_w & B^w \arrow[l, "\langle\cdot|\cdot\rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

$\rightarrow$ Comparaison S'_w-Q_w.

Tests numériques (taille 8, temps important).

Perspectives 2/2 :

- Algèbre de quasi-mélange - Produit stuffle : avec $Y = \{y_i\}_{i\geq 1}$

$$\begin{cases} u \uplus 1 = 1 \uplus u = u; \\ y_i u \uplus y_j v = y_i(u \uplus y_j v) + y_j(y_i u \uplus v) + y_{i+j}(u \uplus v)\ ; \end{cases}$$

- Autres Perturbations/Généralisations :

$$xu \sqcup\!\sqcup_\phi yv = x(u \sqcup\!\sqcup_\phi yv) + y(xu \sqcup\!\sqcup_\phi v) + \phi(x,y) u \sqcup\!\sqcup_\phi v.$$

En fait abordées par le coproduit : si S est un semi-groupe,

$$\Delta_S(y_s) = \sum_{s_1+s_2=s} y_{s_1} \otimes y_{s_2},\ \forall s \in S.$$

$\rightarrow$ Un article en préparation.

Merci de votre attention !