Structure algébrique des opérateurs de Fliess

Loïc Foissy

7 avril 2015

Opérateurs de Fliess

Soit $X = \{x_0, x_1\}$ un alphabet. A chaque mot $w \in X^*$, on associe un opérateur de Fliess :

$$F_w : \left\{ \begin{array}{rcl} L^1_{loc}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^1_{loc}(\mathbb{R}) \\ f & \longrightarrow & F_w(f), \end{array} \right.$$

défini par récurrence sur la longueur :

$$F_\emptyset(f) = 1$$

$$F_{x_i w}(f)(t) = \int_0^t f_i(s) F_w(f)(s) ds,$$

avec $f_0 = 1$ et $f_1 = f$.

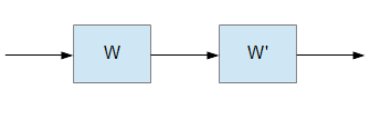
On étend F par linéarité et continuité à $\mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$.

Exemples

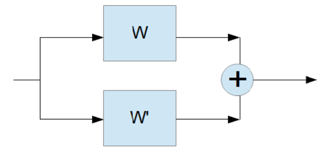
- $F_{x_0}(f)(t) = t.$
- $F_{x_1}(f)(t) = \int_0^t f(s)ds.$
- $F_{x_0x_0}(f)(t) = \frac{t^2}{2}.$
- $F_{x_0x_1}(f)(t) = \int_0^t \int_0^s f(r)\, dr\, ds.$
- $F_{x_1x_0}(f)(t) = \int_0^t f(s)s\, ds.$
- $F_{x_1x_1}(f)(t) = \int_0^t \int_0^s f(r)f(s)\, dr\, ds.$

Opérations sur les opérateurs de Fliess

- Composition $F_{w'} \circ F_w$

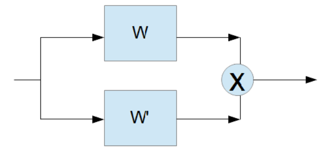


- Addition $F_w + F_{w'}$



Théorème (Fliess, 1981)

Produits des opérateurs de Fliess :

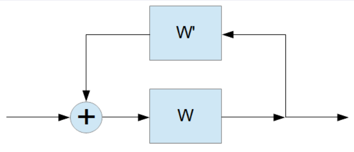


$$F_w F_{w'} = F_{w \sqcup\!\sqcup w'}.$$

Si $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{x_0, x_1\}$:

$$y_1 y_2 \sqcup\!\sqcup y_3 y_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_2 y_4 + y_3 y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 y_2 + y_3 y_1 y_4 y_2 + y_3 y_4 y_1 y_2.$$

Produit Feedback



$$\begin{aligned} F_w \star F_{w'} &= F_w + F_w \circ F_{w'} \circ F_w + F_w \circ F_{w'} \circ F_w \circ F_{w'} \circ F_w + \ldots \\ &= F_w \circ \left(Id + F_{w'} \circ F_w + (F_{w'} \circ F_w)^{\circ 2} + \ldots \right) \\ &= F_w \circ (Id - F_{w'} \circ F_w)^{\circ -1}. \end{aligned}$$

Questions

1. Composition des opérateurs de Fliess.
2. Composition de séries formelles d'opérateurs de Fliess.
3. Inversion de séries formelles d'opérateurs de Fliess.

Théorème (Ferfera, 1980)

Il existe un produit associatif $\circ$ sur $\mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle$ tel que pour tout $c, d \in \mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle$:

$$(Id + F_c) \circ (Id + F_d) = Id + F_{c\circ d}.$$

Théorème (Gray, Duffaut Espinosa, 2011)

L'ensemble suivant est un groupe :

$$(\{Id + F_c \mid c \in \mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle\}, \circ)$$

De façon équivalente, $(\mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle, \circ)$ est un groupe.

$$a = a_\emptyset + a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_{00} x_0^2 + a_{01} x_0 x_1 + a_{10} x_1 x_0 + a_{11} x_1^2 + \ldots,$$
$$b = b_\emptyset + b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_{00} x_0^2 + b_{01} x_0 x_1 + b_{10} x_1 x_0 + b_{11} x_1^2 + \ldots,$$
$$c = c_\emptyset + c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_{00} x_0^2 + c_{01} x_0 x_1 + c_{10} x_1 x_0 + c_{11} x_1^2 + \ldots;$$

si $c = a \circ b$, alors :

$$\begin{aligned}
c_\emptyset &= a_\emptyset + b_\emptyset,\\
c_0 &= a_0 + b_0 + a_1 b_\emptyset,\\
c_{00} &= a_{00} + b_{00} + a_{01} b_\emptyset + a_{10} b_\emptyset + a_{11} b_\emptyset^2 + a_1 b_0,\\
c_{01} &= a_{01} + b_{01} + a_{11} b_\emptyset + a_1 b_1,\\
c_{10} &= a_{10} + b_{10} + a_{11} b_\emptyset,\\
c_{11} &= a_{11} + b_{11}.
\end{aligned}$$

Algèbre des coordonnées sur ce groupe :

1. Pour tout mot $u \in X^*$,

$$X_u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{v \in X^*} a_v v & \longrightarrow & a_u. \end{array} \right.$$

2. L'algèbre $\mathcal{H} = \mathbb{R}[X_u, u \in X^*]$ hérite d'un coproduit défini par :

$$\Delta(X_u)(f \otimes g) = X_u(f \circ g),$$

Pour tout $f, g \in \mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$. Ainsi, $\mathcal{H}$ est une bigèbre.

Algèbre des coordonnées sur ce groupe :

1. Pour tout mot $u \in X^*$,

$$X_u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{v \in X^*} a_v v & \longrightarrow & a_u. \end{array} \right.$$

2. L'algèbre $\mathcal{H} = \mathbb{R}[X_u, u \in X^*]$ hérite d'un coproduit défini par :

$$\Delta(X_u)(f \otimes g) = X_u(f \circ g),$$

Pour tout $f, g \in \mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$. Ainsi, $\mathcal{H}$ est une bigèbre.

Coproduit

$$
\begin{aligned}
\Delta(X_\emptyset) &= X_\emptyset \otimes 1 + 1 \otimes X_\emptyset,\\
\Delta(X_{x_0}) &= X_{x_0} \otimes 1 + 1 \otimes X_{x_0} + X_{x_1} \otimes X_\emptyset,\\
\Delta(X_{x_0^2}) &= X_{x_0^2} \otimes 1 + 1 \otimes X_{x_0^2} + X_{x_0x_1} \otimes X_\emptyset + X_{x_1x_0} \otimes X_\emptyset\\
&\quad + X_{x_1x_1} \otimes X_\emptyset^2 + X_{x_1} \otimes X_{x_0},\\
\Delta(X_{x_0x_1}) &= X_{x_0x_1} \otimes 1 + 1 \otimes X_{x_0x_1} + X_{x_1x_1} \otimes X_\emptyset + X_{x_1} \otimes X_{x_1},\\
\Delta(X_{x_1x_0}) &= X_{x_1x_0} \otimes 1 + 1 \otimes X_{x_1x_0} + X_{x_1x_1} \otimes X_\emptyset.
\end{aligned}
$$

On peut ainsi calculer les coefficients de l'inverse de $c \in \mathbb{R}\langle\langle x_0, x_1\rangle\rangle$ par récurrence sur la longueur.

Description récursive du coproduit

1. Si $i \in \{0,1\}$,on pose $\theta_i(X_u) = X_{x_i u}$.
2. Soit $\Delta_{ш}$ le coproduit de débattage :

$$\begin{aligned}
\Delta_{ш}(X_\emptyset) &= X_\emptyset \otimes X_\emptyset,\\
\Delta_{ш}(X_a) &= X_a \otimes X_\emptyset + X_\emptyset \otimes X_a,\\
\Delta_{ш}(X_{ab}) &= X_{ab} \otimes X_\emptyset + X_a \otimes X_b + X_b \otimes X_a + X_\emptyset \otimes X_{ab},\\
\Delta_{ш}(X_{abc}) &= X_{abc} \otimes X_\emptyset + X_a \otimes X_{bc} + X_b \otimes X_{ac} + X_c \otimes X_{ab}\\
&\quad + X_{ab} \otimes X_c + X_{ac} \otimes X_b + X_{bc} \otimes X_a + X_\emptyset \otimes X_{abc}.
\end{aligned}$$

Description récursive du coproduit

On pose $\tilde{\Delta}(X) = \Delta(X) - 1 \otimes X$ pour tout $X \in \mathcal{H}$.

1. $\tilde{\Delta}(X_\emptyset) = X_\emptyset \otimes 1$.
2. $\tilde{\Delta} \circ \theta_0 = (\theta_0 \otimes Id) \circ \tilde{\Delta} + (\theta_1 \otimes m) \circ (\tilde{\Delta} \otimes Id) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup}$.
3. $\tilde{\Delta} \circ \theta_1 = (\theta_1 \otimes Id) \circ \tilde{\Delta}$.

Graduation

Soit $u = y_1 \dots y_n \in X^*$.

$$deg(u) = n + 1 + \sharp\{i \mid y_i = x_0\}.$$

Ceci induit une graduation connexe de la bigèbre $\mathcal{H}$, qui est en conséquence une algèbre de Hopf.

Idée de la preuve. Pour cette graduation,

- θ_0 est homogène de degré 2.
- θ_1 est homogène de degré 1.
- $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$ est homogène de degré 1.

Donc $\tilde{\Delta}$ est homogène de degré 0.

Graduation

Soit $u = y_1 \dots y_n \in X^*$.

$$deg(u) = n + 1 + \sharp\{i \mid y_i = x_0\}.$$

Ceci induit une graduation connexe de la bigèbre $\mathcal{H}$, qui est en conséquence une algèbre de Hopf.

Idée de la preuve. Pour cette graduation,

- θ_0 est homogène de degré 2.
- θ_1 est homogène de degré 1.
- $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$ est homogène de degré 1.

Donc $\tilde{\Delta}$ est homogène de degré 0.

Soit $V = Vect(X_w \mid w \in X^*)$.

$$\begin{aligned}
V_1 &= Vect(X_\emptyset),\\
V_2 &= Vect(X_1),\\
V_3 &= Vect(X_0, X_{11}),\\
V_4 &= Vect(X_{01}, X_{10}, X_{111}),\\
V_5 &= Vect(X_{00}, X_{011}, X_{101}, X_{110}, X_{1111}).
\end{aligned}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$dim(V_k)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$dim(\mathcal{H}_k)$	1	1	2	4	8	15	30	56	108	203	384

Soit $V = Vect(X_w \mid w \in X^*)$.

$$\begin{aligned} V_1 &= Vect(X_\emptyset), \\ V_2 &= Vect(X_1), \\ V_3 &= Vect(X_0, X_{11}), \\ V_4 &= Vect(X_{01}, X_{10}, X_{111}), \\ V_5 &= Vect(X_{00}, X_{011}, X_{101}, X_{110}, X_{1111}). \end{aligned}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$dim(V_k)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$dim(\mathcal{H}_k)$	1	1	2	4	8	15	30	56	108	203	384

On a observé les faits suivants :

1. $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf graduée, connexe, commutative.
2. Son dual gradué $\mathcal{H}^*$ est une algèbre de Hopf graduée, connexe, cocommutative.
3. Par le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore, $\mathcal{H}^*$ est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
4. $\tilde{\Delta}(V) \subseteq V \otimes \mathcal{H}$,donc $\mathfrak{g}$ possède un produit pré-Lie $\bullet$. Pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$:

$$(x \bullet y) \bullet z - x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet z) \bullet y - x \bullet (z \bullet y).$$

On a observé les faits suivants :

1. $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf graduée, connexe, commutative.
2. Son dual gradué $\mathcal{H}^*$ est une algèbre de Hopf graduée, connexe, cocommutative.
3. Par le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore, $\mathcal{H}^*$ est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
4. $\tilde{\Delta}(V) \subseteq V \otimes \mathcal{H}$,donc $\mathfrak{g}$ possède un produit pré-Lie $\bullet$. Pour tous $x, y, z \in \mathfrak{g}$:

$$(x \bullet y) \bullet z - x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet z) \bullet y - x \bullet (z \bullet y).$$

Description de $\mathfrak{g}$

Comme espace vectoriel, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\langle x_0, x_1 \rangle$. Le produit pré-Lie est défini par récurrence :

$$\begin{aligned} \emptyset \bullet v &= 0, \\ (x_0 u) \bullet v &= x_0(u \bullet v), \\ (x_1 u) \bullet v &= x_1(u \bullet v) + x_0(u \sqcup\!\sqcup v), \end{aligned}$$

pour tous $u, v \in X^*$.

$$
\begin{array}{lll}
x_0 \bullet x_0 = 0 & x_0 \bullet x_0x_0 = 0 & x_1 \bullet x_0x_0 = x_0x_0x_0 \\
x_0 \bullet x_1 = 0 & x_0 \bullet x_0x_1 = 0 & x_1 \bullet x_0x_1 = x_0x_0x_1 \\
x_1 \bullet x_0 = x_0x_0 & x_0 \bullet x_1x_0 = 0 & x_1 \bullet x_1x_0 = x_0x_1x_0 \\
x_1 \bullet x_1 = x_0x_1 & x_0 \bullet x_1x_1 = 0 & x_1 \bullet x_1x_1 = x_0x_1x_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x_0x_0 \bullet x_0 = 0 & x_0x_0 \bullet x_1 = 0 \\
x_0x_1 \bullet x_0 = x_0x_0x_0 & x_0x_1 \bullet x_1 = x_0x_0x_1 \\
x_1x_0 \bullet x_0 = 2x_0x_0x_0 & x_1x_0 \bullet x_1 = x_0x_0x_1 + x_0x_1x_0 \\
x_1x_1 \bullet x_0 = x_1x_0x_0 + x_0x_1x_0 + x_0x_0x_1 & x_1x_1 \bullet x_1 = x_1x_0x_1 + 2x_0x_1x_1
\end{array}
$$

$\mathbb{R}\langle x_0, x_1\rangle$ est une algèbre de Hopf pour le produit de battage et le coproduit de déconcaténation :

$$\Delta(y_1 \ldots y_n) = \sum_{i=0}^{n} y_1 \ldots y_i \otimes y_{i+1} \ldots y_n.$$

Théorème

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}\langle x_0, x_1\rangle$:

$$(x \sqcup\!\sqcup y) \bullet z = (x \bullet z) \sqcup\!\sqcup y + x \sqcup\!\sqcup (y \bullet z).$$

Pour tous $x, y \in B$:

$$\Delta(x \bullet y) = x^{(1)} \otimes x^{(2)} \bullet y + x^{(1)} \bullet y^{(1)} \otimes x^{(2)} \sqcup\!\sqcup y^{(2)}.$$

$\mathfrak{g}$ est une bigèbre Com-Pré-Lie.

Soit V un espace vectoriel ; $T(V)$ est une algèbre de Hopf pour le produit de battage $\sqcup\!\sqcup$ et le coproduit de déconcaténation Δ.

Théorème

Soit $f : \longrightarrow V$ un endomorphisme.On définit un coproduit $\bullet$ sur $T(V)$ par :

$$\begin{aligned} \emptyset \bullet v &= 0, \\ xu \bullet v &= x(u \bullet v) + f(x)(u \sqcup\!\sqcup v), \end{aligned}$$

pour tous $u, v \in T(V)$, $x \in V$. Alors $(T(V), \sqcup\!\sqcup, \bullet, \Delta)$ est une bigèbre Com-Pré-Lie que l'on note $T(V, f)$.

Exemple 1

On prend $V = Vect(x_0, x_1)$ et :

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $T(V, f) = \mathfrak{g}$.

Exemple 3

On prend $V = Vect(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et :

$$f_i(x_j) = \delta_{i,j} x_0.$$

L'algèbre pré-Lie correspondant à la composition des opérateurs de Fliess en dimension n est la somme directe des $T(V, f_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Exemple 3

On prend $V = Vect(x)$ et $f = Id$. Alors $T(V, f) = \mathbb{R}[x]$ et :

$$x^k \sqcup\!\sqcup x^l = \binom{k+l}{k} x^{k+l},$$

$$x^k \bullet x^l = \binom{k+l}{k-1} x^{k+l}.$$

Théorème

Pour tout $\sigma \in Sh(k,l)$, on pose :

$$m_k(\sigma) = \max\{i \leq k \mid \sigma(1) = 1, \ldots, \sigma(i) = i\}.$$

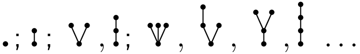
Si $x_1, \ldots, x_{k+l} \in V$:

$$x_1 \ldots x_k \bullet x_{k+1} \ldots x_{k+l} = \sum_{\sigma \in Sh(k,l)} \sum_{i=1}^{m_k(\sigma)} (Id^{\otimes(i-1)} \otimes f \otimes Id^{\otimes(k+l-i)})\sigma.(x_1 \ldots x_{k+l}).$$

$$x_1 x_2 \bullet x_3 = f(x_1)x_2x_3 + x_1 f(x_2)x_3 + f(x_1)x_3x_2.$$

Algèbre pré-Lie à un générateur : $PL(1)$.

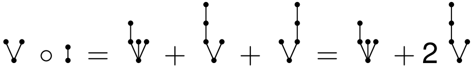
1. Bases donnée par les arbres enracinés :



2. Produit donné par les greffes :

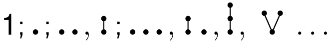
$$T \bullet T' = \sum_{s \in Vert(T)} \text{greffe de } T' \text{ sur } s.$$

Par exemple :



Le dual de l'algèbre enveloppante de $PL(1)$ est l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer $\mathcal{H}_{CK}$.

- Base : forêts enracinées.

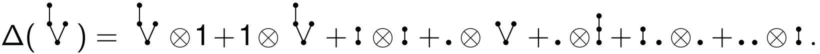


- Produit : union disjointe.

- Le coproduit est donné par les coupes admissibles :

$$\Delta(T) = \sum_{c \text{ admissible cut}} P^c(T) \otimes R^c(T).$$

c									totale
Admissible ?	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	oui
$W^c(t)$									
$R^c(t)$					$\times$			$\times$	1
$P^c(t)$	1				$\times$			$\times$	



Théorème

L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{CK}$ est une bigèbre Com-Pré-Lie avec le produit pré-Lie défini par :

$$F \bullet G = \sum_{s \in Vert(F)} \text{greffe de } G \text{ sur } s.$$

L'algèbre Com-Pré-Lie libre à un générateur possède une description semblable.

Soit $\mathfrak{g}' = T(V, f)$ et $x \in V$.Il existe un unique morphisme d'algèbres pré-Lie :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} PL(1) & \longrightarrow & \mathfrak{g}' \\ \bullet & \longrightarrow & x. \end{array} \right.$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
\phi(\bullet) &= x,\\
\phi\left(\substack{\bullet\\ |\\ \bullet}\right) &= f(x)x,\\
\phi\left(\substack{\bullet\ \ \bullet\\ \vee}\right) &= 2f^2(x)xx,\\
\phi\left(\substack{\bullet\\ |\\ \bullet\\ |\\ \bullet}\right) &= f^2(x)f(x)x,\\
\phi\left(\substack{\bullet\ \ \ \ \\ |\ \ \ \ \\ \bullet\ \ \bullet\\ \vee}\right) &= 2f^2(x)f(x)xx + f^2(x)xf(x)x.
\end{aligned}$$

Extensions linéaires

Soit T un arbre enraciné à n sommets. Une extension linéaire de T est une bijection $\sigma : Vert(T) \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ telle que :

$$\mathbf{I}^{j}_{i} \text{ in } T \Longrightarrow \sigma(i) < \sigma(j).$$

L'ensemble des extensions linéaires de T est notée $L(T)$.

Théorème

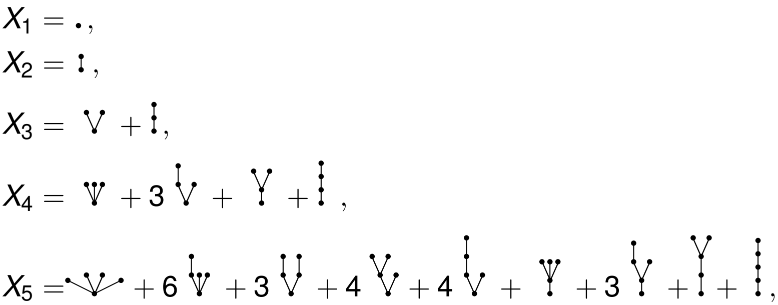
Pour tout arbre enraciné T à n sommets :

$$\phi(T) = \sum_{\sigma \in L(T)} f^{fert(\sigma(1))}(x) \ldots f^{fert(\sigma(n))}(x).$$

On prend $\mathfrak{g}' = T(V, f)$ avec $V = Vect(x)$ et $f(x) = x$. Le morphisme ϕ peut se transposer en un morphisme :

$$\phi^* : \mathcal{U}(\mathfrak{g}')^* \longrightarrow \mathcal{H}_{CK}.$$

Son image est une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_{CK}$ notée A. En tant qu'algèbre, elle est engendrée par les éléments :



$\vdots$

Théorème

On définit une famille d'éléments de $\mathcal{H}_{CK}$ par :

- $X_1 = ..$
- $X_{n+1} = X_n \bullet .$ pour tout $n \geq 1$.

La sous-algèbre A engendrée par ces éléments est une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_{CK}$, connue sous le nom de sous-algèbre de Connes-Moscovici.