Sur l’arbre des semigroupes numériques

Jean Fromentin

Laboratoire LMPA
Université du Littoral, Calais

Semigroupe numérique

- **Définition : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :**

Semigroupe numérique

- **Définition : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :**
  - **$i)$ 0 appartient à S ;**

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

Semigroupe numérique

- **Définition : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :**
  - **$i)$ 0 appartient à S ;**
  - **$ii)$ S est stable par addition ;**
  - **$iii)$ S est de complément fini.**

- **Exemples :**

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples** :
  - $\{$impairs$\}$

Semigroupe numérique

- **Définition :** Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples :**
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples** :
  - {impairs} : **Non** pas $i)$
  - $\{\text{impairs}\} \cup \{0\}$

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples** :
  - {impairs} : **Non** pas $i)$
  - {impairs} $\cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$

Semigroupe numérique

- **Définition :** Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples :**
  - {impairs} : **Non** pas $i)$
  - {impairs} $\cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - {pairs}

Semigroupe numérique

- **Définition :** Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples :**
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples** :
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$
  - $\{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples** :
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$
  - $\{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples** :
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$
  - $\{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Semigroupe numérique

- **Définition :** Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples :**
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$
  - $\{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Semigroupe numérique

- **Définition :** Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples :**
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$
  - $\{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples** :
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$
  - $\{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Semigroupe numérique

- **Définition** : Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples** :
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$
  - $\{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$: **Oui**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Semigroupe numérique

- **Définition :** Un s.g.n. S est une partie de $\mathbb{N}$ tel que :
  - $i)$ 0 appartient à S ;
  - $ii)$ S est stable par addition ;
  - $iii)$ S est de complément fini.

- **Exemples :**
  - $\{$impairs$\}$: **Non** pas $i)$
  - $\{$impairs$\} \cup \{0\}$: **Non** pas $ii)$
  - $\{$pairs$\}$: **Non** pas $iii)$
  - $\{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$: **Oui**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow$ S désigne un s.g.n. et S^* l'ensemble $S \setminus \{0\}$.

Irréductibles

- **Définition : Un élément a de S^* est irréductible si**

Irréductibles

- **Définition : Un élément a de S^* est irréductible si**

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

Irréductibles

- **Définition** : Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0,3,6\} \sqcup [8,+\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0,3,6\} \sqcup [8,+\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3, 8$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3, 8$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0,3,6\} \sqcup [8,+\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3, 8$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0,3,6\} \sqcup [8,+\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10$

Irréductibles

- **Définition :** Un élément a de S^* est **irréductible** si

$$\forall (c,b) \in S^2,\ a = b + c \Longrightarrow b = 0 \text{ ou } c = 0$$

On note $\mathrm{Irr}(S)$ l'ensemble des éléments irréductibles de S.

- **Exemple :** $S = \{0,3,6\} \sqcup [8,+\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\rightsquigarrow \mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

  - $m = \min(S^*)$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**

			m												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

  - $m = \min(S^*)$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**

			m												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**

  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**

  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**

  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**

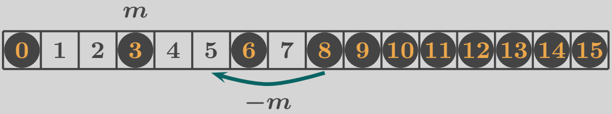
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



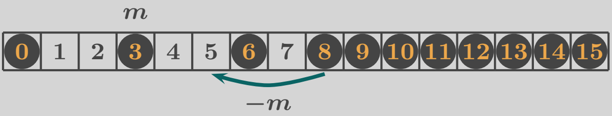
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ **implique** $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



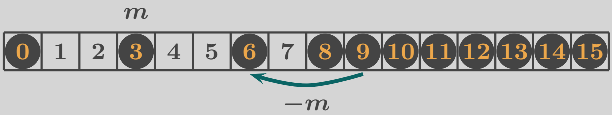
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



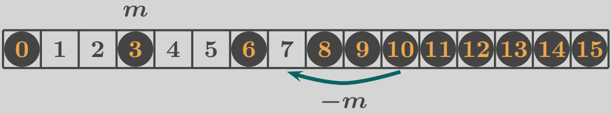
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8$$

Irréductibles

- **Proposition :** L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.

- **Démonstration :**



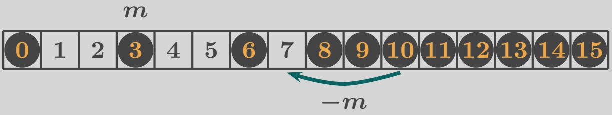
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



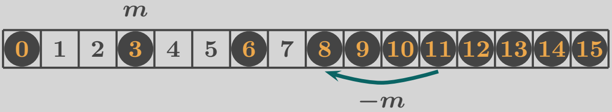
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8, 10$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



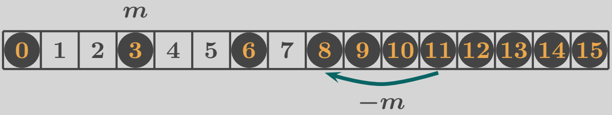
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8, 10$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



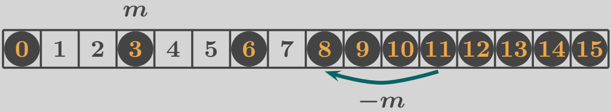
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8, 10\}$$

Irréductibles

- **Proposition :** L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.

- **Démonstration :**



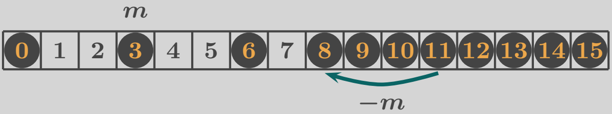
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8, 10\}$$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



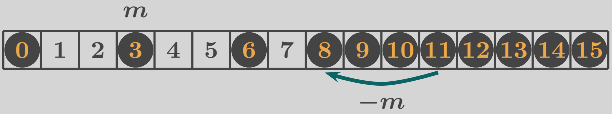
  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8, 10\}$ (en général il n'y a pas égalité)

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

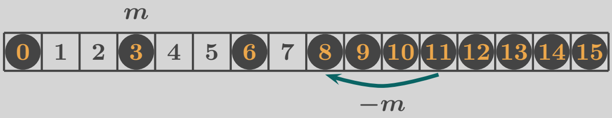
$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8, 10\} \quad \text{(en général il n'y a pas égalité)}$$

  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq m + (\mathbb{N} \setminus S^*)$

Irréductibles

- **Proposition : L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

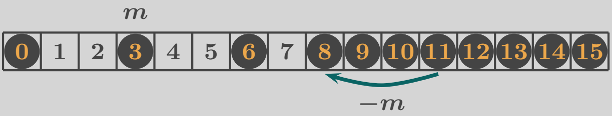
$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8, 10\} \quad \text{(en général il n'y a pas égalité)}$$

  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq m + (\mathbb{N} \setminus S^*)$
  - $\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S)) \leqslant \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S^*) < +\infty$

Irréductibles

- **Proposition :** **L'ensemble $\mathrm{Irr}(S)$ est fini.**

- **Démonstration :**



  - $m = \min(S^*)$
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ implique $a - m \notin S^*$

$$\mathrm{Irr}(S) \subseteq \{3, 8, 10\} \quad \text{(en général il n'y a pas égalité)}$$

  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq m + (\mathbb{N} \setminus S^*)$
  - $\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S)) \leqslant \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S^*) < +\infty$ ∎

Générateurs

- **Définition** : Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

Générateurs

- **Définition** : **Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :**

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \dots, a_n \in A,\ b = a_1 + \dots + a_n$$

Générateurs

- **Définition : Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :**

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, ..., a_n \in A,\ b = a_1 + ... + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

Générateurs

- **Définition** : Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ b = a_1 + \ldots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition** : Le plut petit ensemble générateur de S est

Générateurs

- **Définition : Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :**

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, ..., a_n \in A,\ b = a_1 + ... + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition : Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.**

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ b = a_1 + \ldots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ b = a_1 + \ldots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ b = a_1 + \ldots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ b = a_1 + \ldots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$= \varnothing$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \dots, a_n \in A,\ b = a_1 + \dots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$= 3$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ b = a_1 + \ldots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$$= 3 + 3$$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, ..., a_n \in A,\ b = a_1 + ... + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$= 8$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \dots, a_n \in A,\ b = a_1 + \dots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$= 3 + 3 + 3$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, ..., a_n \in A,\ b = a_1 + ... + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$= 10$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ b = a_1 + \ldots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition : Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.**

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$= 3 + 8$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A,\ b = a_1 + \ldots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$= 3 + 3 + 3 + 3$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Générateurs

- **Définition :** Un ensemble $A \subseteq S$ engendre S si :

$$\forall b \in S,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \exists a_1, \dots, a_n \in A,\ b = a_1 + \dots + a_n$$

On pose alors $S = \langle A \rangle$.

- **Proposition :** Le plut petit ensemble générateur de S est $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$= 3 + 10$

$\mathrm{Irr}(S) = \{3, 8, 10\}$

Problème du Frobenius

Problème du Frobenius

- **Problème : Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.**

Problème du Frobenius

- **Problème :** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Proposition (Sylvester 1884) :**
  Pour $\mathrm{Irr}(S) = \{a, b\}$, on a

Problème du Frobenius

- **Problème :** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Proposition (Sylvester 1884) :**
  Pour $\mathrm{Irr}(S) = \{a, b\}$, on a
  $$F(S) = ab - a - b.$$

Problème du Frobenius

- **Problème :** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Proposition (Sylvester 1884) :**
  Pour $\mathrm{Irr}(S) = \{a, b\}$, on a

$$F(S) = ab - a - b.$$

$\rightsquigarrow$ Et pour $\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S)) = 3$?

Problème du Frobenius

- **Problème :** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Proposition (Sylvester 1884) :**
  Pour $\mathrm{Irr}(S) = \{a, b\}$, on a

$$F(S) = ab - a - b.$$

$\rightsquigarrow$ Et pour $\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S)) = 3$?

- **Théorème (Curtis 1990) :**
  Il n'existe pas de famille de polynômes $P_1, \ldots, P_k$ vérifiant

Problème du Frobenius

- **Problème :** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Proposition (Sylvester 1884) :**
  Pour $\mathrm{Irr}(S) = \{a, b\}$, on a

$$F(S) = ab - a - b.$$

$\rightsquigarrow$ Et pour $\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S)) = 3$?

- **Théorème (Curtis 1990) :**
  Il n'existe pas de famille de polynômes $P_1, \ldots, P_k$ vérifiant

$$\forall a, b, c \; \exists i \;\; F(\langle a, b, c \rangle) = P_i(a, b, c).$$

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Théorème (Ramírez-Alfonsín 1994) :**
  Le problème de Frobenius (FP) est

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Théorème** (**Ramírez-Alfonsín** 1994) :
  Le problème de Frobenius (**FP**) est **NP-dur**.

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Théorème (Ramírez-Alfonsín 1994) :**
  Le problème de Frobenius (FP) est NP-dur.

- **Démonstration :**

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Théorème** (**Ramírez-Alfonsín** 1994) :
  Le problème de Frobenius (**FP**) est **NP-dur**.

- **Démonstration** : Réduction polynomiale de **IKP** à **FP**.

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Théorème** (**Ramírez-Alfonsín** 1994) :
  Le problème de Frobenius (**FP**) est **NP-dur**.

- **Démonstration** : Réduction polynomiale de **IKP** à **FP**. ∎

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Théorème (Ramírez-Alfonsín 1994) :**
  Le problème de Frobenius (FP) est NP-dur.

- **Démonstration :** Réduction polynomiale de IKP à FP. ■

- **Théorème (Kannan 1991) :**
  Si le cardinal de $\mathrm{Irr}(S)$ est fixé alors

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Théorème (Ramírez-Alfonsín 1994) :**
  Le problème de Frobenius (FP) est NP-dur.

- **Démonstration :** Réduction polynomiale de IKP à FP. ■

- **Théorème (Kannan 1991) :**
  Si le cardinal de $\mathrm{Irr}(S)$ est fixé alors (FP) est polynomial.

Frobenius : Complexité

- **Problème:** Déterminer $F(S) = \max(\mathbb{N} \setminus S)$ à partir de $\mathrm{Irr}(S)$.

- **Théorème (Ramírez-Alfonsín 1994) :**
  Le problème de Frobenius (FP) est NP-dur.

- **Démonstration :** Réduction polynomiale de IKP à FP. ■

- **Théorème (Kannan 1991) :**
  Si le cardinal de $\mathrm{Irr}(S)$ est fixé alors (FP) est polynomial.

- **Démonstration :** Le problème FP se ramène au calcul
  du covering radius d'un certain simplex. ■

Conjecture de Wilf

Conjecture de Wilf

- **Définition : On pose :**

Conjecture de Wilf

- **Définition : On pose :**
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$

Conjecture de Wilf

- **Définition** : On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;

Conjecture de Wilf

- **Définition : On pose :**
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$

Conjecture de Wilf

- **Définition : On pose :**
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ **le genre de** S **;**
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ **le conducteur de** S**.**

Conjecture de Wilf

- **Définition** : On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) : On a toujours

Conjecture de Wilf

- **Définition** : On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) : On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) **:** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$

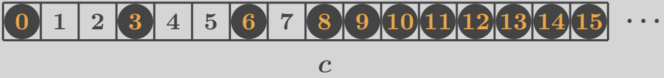
Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) : On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$



Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) **:** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c(S) = 8$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
								c								

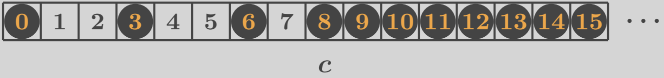
Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) **:** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c(S) = 8$, $g(S) = 5$.



Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture (Wilf 1978) :** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c(S) = 8$, $g(S) = 5$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$

c

Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) **:** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c(S) = 8$, $g(S) = 5$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$

c

  - on a bien $\frac{3}{8} \geqslant \frac{1}{3}$.

Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) **:** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c(S) = 8$, $g(S) = 5$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
								c								

  - on a bien $\frac{3}{8} \geqslant \frac{1}{3}$.

Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) **:** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c(S) = 8$, $g(S) = 5$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
•	•	•	•	•	•	•	•	c								

  - on a bien $\dfrac{3}{8} \geqslant \dfrac{1}{3}$.

Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture** (**Wilf** 1978) **:** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c(S) = 8$, $g(S) = 5$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
•	•	•	•	•	•	•	•	c								

  - on a bien $\frac{3}{8} \geqslant \frac{1}{3}$.

Conjecture de Wilf

- **Définition :** On pose :
  - $g(S) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus S)$ le **genre** de S ;
  - $c(S) = F(S) + 1 = \max(\mathbb{N} \setminus S) + 1$ le **conducteur** de S.

- **Conjecture (Wilf 1978) :** On a toujours

$$\frac{c(S) - g(S)}{c(S)} \geqslant \frac{1}{\mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S))}$$

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c(S) = 8$, $g(S) = 5$.

  - on a bien $\frac{3}{8} \geqslant \frac{1}{3}$.

Un peu de combinatoire : n_g

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition** : On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition :** On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples :**

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition** : On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples** :
  - on a $n_0 =$

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition :** On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples :**
  - on a $n_0 = \operatorname{card}\{\mathbb{N}\}$

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition** : On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples** :
  - on a $n_0 = \operatorname{card}\{\mathbb{N}\} = 1$

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition** : On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples** :
  - on a $n_0 = \text{card}\{\mathbb{N}\} = 1$
  - on a $n_1 =$

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition :** On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples :**
  - on a $n_0 = \text{card}\{\mathbb{N}\} = 1$
  - on a $n_1 = \text{card}\{\mathbb{N} \setminus \{1\}$

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition :** On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples :**
  - on a $n_0 = \text{card}\{\mathbb{N}\} = 1$
  - on a $n_1 = \text{card}\{\mathbb{N} \setminus \{1\}\}$

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition** : On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples** :
  - on a $n_0 = \text{card}\{\mathbb{N}\} = 1$
  - on a $n_1 = \text{card}\{\mathbb{N} \setminus \{1\}\} = 1$

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition :** On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples :**
  - on a $n_0 = \operatorname{card}\{\mathbb{N}\} = 1$
  - on a $n_1 = \operatorname{card}\{\mathbb{N} \setminus \{1\}\} = 1$
  - on a $n_2 =$

Un peu de combinatoire : n_g

Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition :** On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples :**
  - on a $n_0 = \operatorname{card}\{\mathbb{N}\} = 1$
  - on a $n_1 = \operatorname{card}\{\mathbb{N} \setminus \{1\}\} = 1$
  - on a $n_2 = \operatorname{card}\{\mathbb{N} \setminus \{1,2\}, \mathbb{N} \setminus \{1,3\}\}$

Un peu de combinatoire : n_g

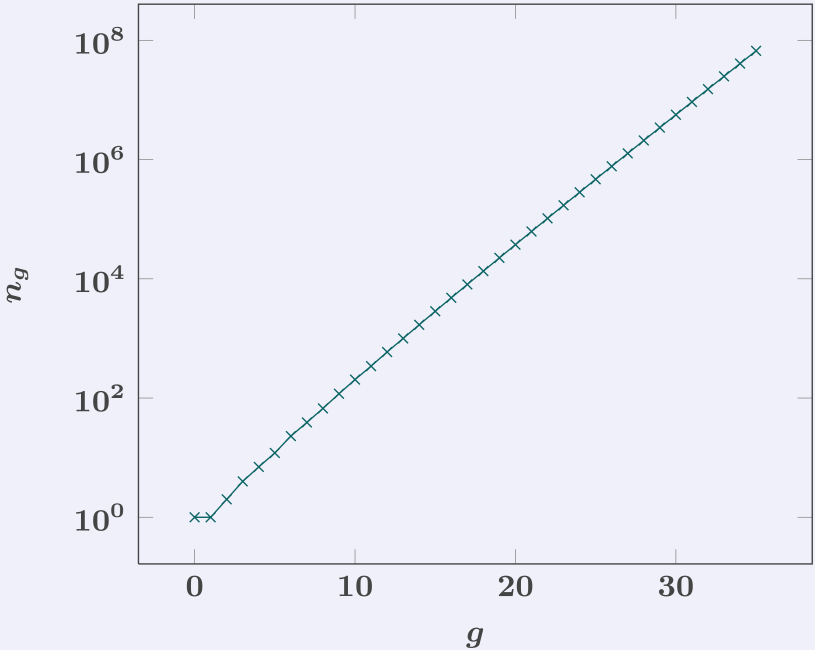
Le genre de S est le cardinal de $\mathbb{N} \setminus S$.

- **Définition :** On note n_g le nombre de s.g.n. de genre g.

- **Exemples :**
  - on a $n_0 = \operatorname{card}\{\mathbb{N}\} = 1$
  - on a $n_1 = \operatorname{card}\{\mathbb{N} \setminus \{1\}\} = 1$
  - on a $n_2 = \operatorname{card}\{\mathbb{N} \setminus \{1,2\}, \mathbb{N} \setminus \{1,3\}\} = 2$

Valeurs connues de n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284		
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840		
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522		
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		



10^8
10^6
10^4
10^2
10^0
n_g
0
10
20
30
g

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.
L'ensemble $S \cup \{c-1\}$ est un s.g.n de genre $g-1$.

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.
L'ensemble $S \cup \{c-1\}$ est un s.g.n de genre $g-1$.

- **Proposition : Soit S un s.g.n. et $x \in S$.**

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.
L'ensemble $S \cup \{c-1\}$ est un s.g.n de genre $g-1$.

- **Proposition** : Soit S un s.g.n. et $x \in S$.
  L'ensemble $S_x = S \setminus \{x\}$ est un s.g.n ssi $x \in \mathrm{Irr}(S)$.

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.
L'ensemble $S \cup \{c-1\}$ est un s.g.n de genre $g-1$.

- **Proposition** : Soit S un s.g.n. et $x \in S$.
  L'ensemble $S_x = S \setminus \{x\}$ est un s.g.n ssi $x \in \mathrm{Irr}(S)$.

$\rightsquigarrow g(S_x) = g(S) + 1$.

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.
L'ensemble $S \cup \{c-1\}$ est un s.g.n de genre $g-1$.

- **Proposition :** Soit S un s.g.n. et $x \in S$.
  L'ensemble $S_x = S \setminus \{x\}$ est un s.g.n ssi $x \in \mathrm{Irr}(S)$.

$\rightsquigarrow g(S_x) = g(S) + 1$.

Si T es un s.g.n de genre $g > 0$, il existe

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.
L'ensemble $S \cup \{c-1\}$ est un s.g.n de genre $g-1$.

- **Proposition** : Soit S un s.g.n. et $x \in S$.
  L'ensemble $S_x = S \setminus \{x\}$ est un s.g.n ssi $x \in \operatorname{Irr}(S)$.

$\rightsquigarrow g(S_x) = g(S) + 1$.

Si T es un s.g.n de genre $g > 0$, il existe

- un s.g.n S de genre $g-1$;

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.
L'ensemble $S \cup \{c-1\}$ est un s.g.n de genre $g-1$.

- **Proposition** : Soit S un s.g.n. et $x \in S$.
  L'ensemble $S_x = S \setminus \{x\}$ est un s.g.n ssi $x \in \mathrm{Irr}(S)$.

$\rightsquigarrow g(S_x) = g(S) + 1$.

Si T es un s.g.n de genre $g > 0$, il existe
- un s.g.n S de genre $g-1$;
- un irréductible $x \geqslant c(S)$;

Idée

Soit S est un s.g.n. de genre g et de conducteur c.
L'ensemble $S \cup \{c-1\}$ est un s.g.n de genre $g-1$.

- **Proposition** : Soit S un s.g.n. et $x \in S$.
  L'ensemble $S_x = S \setminus \{x\}$ est un s.g.n ssi $x \in \mathrm{Irr}(S)$.

$\rightsquigarrow g(S_x) = g(S) + 1$.

Si T es un s.g.n de genre $g > 0$, il existe
- un s.g.n S de genre $g-1$;
- un irréductible $x \geqslant c(S)$;

tels que $T = S_x$.

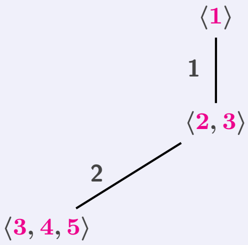
Arbre des semigroupes numériques

$\langle \mathbf{1} \rangle$

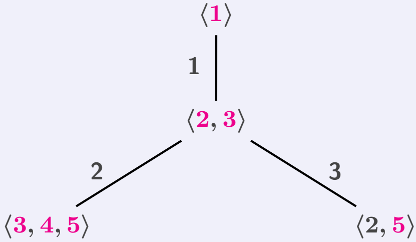
Arbre des semigroupes numériques

$$\begin{tikzcd} \langle \mathbf{1} \rangle \arrow[d, dash, "\mathbf{1}"'] \\ \langle \mathbf{2}, \mathbf{3} \rangle \end{tikzcd}$$

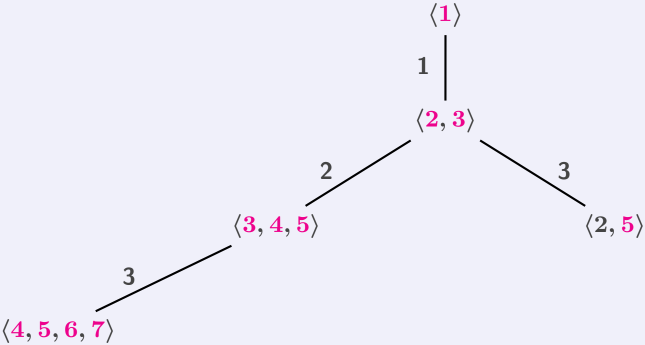
Arbre des semigroupes numériques



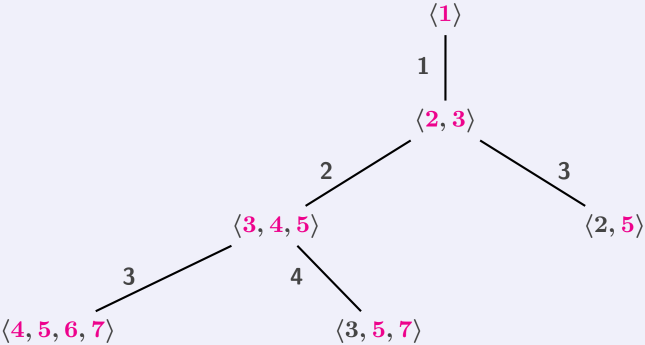
Arbre des semigroupes numériques



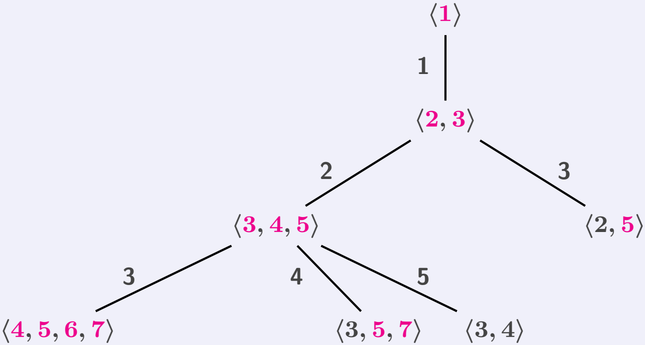
Arbre des semigroupes numériques



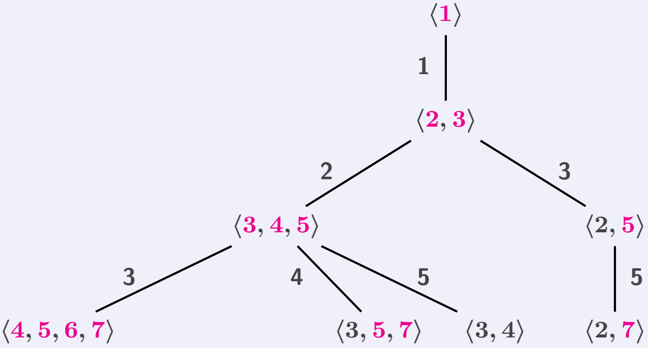
Arbre des semigroupes numériques



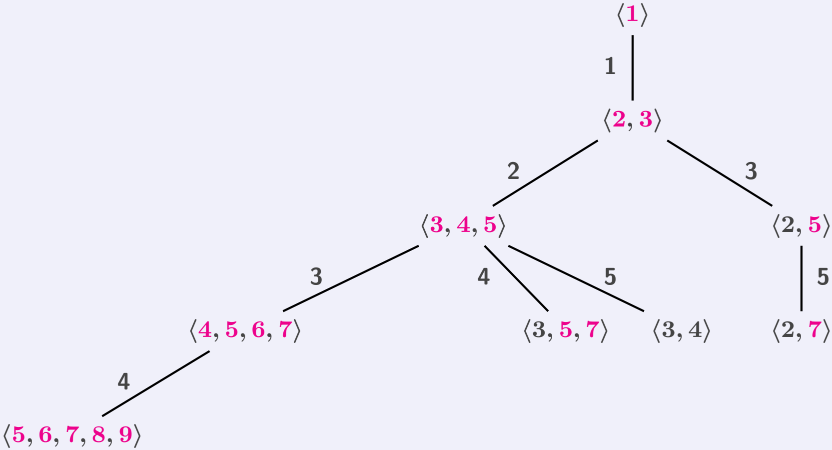
Arbre des semigroupes numériques



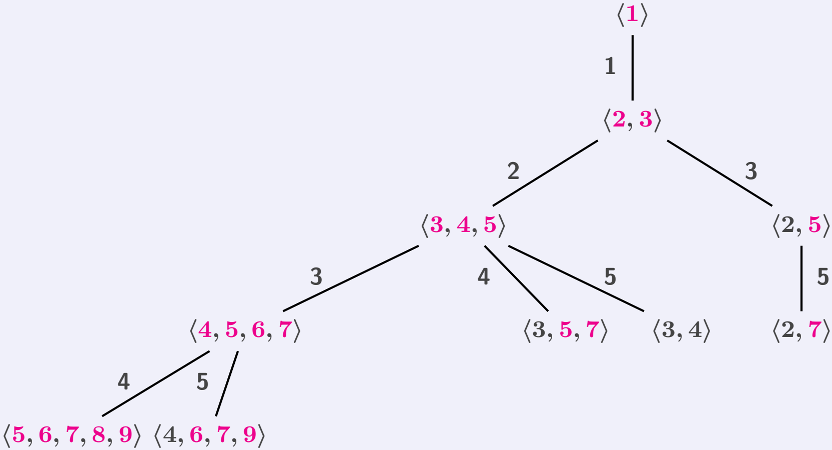
Arbre des semigroupes numériques



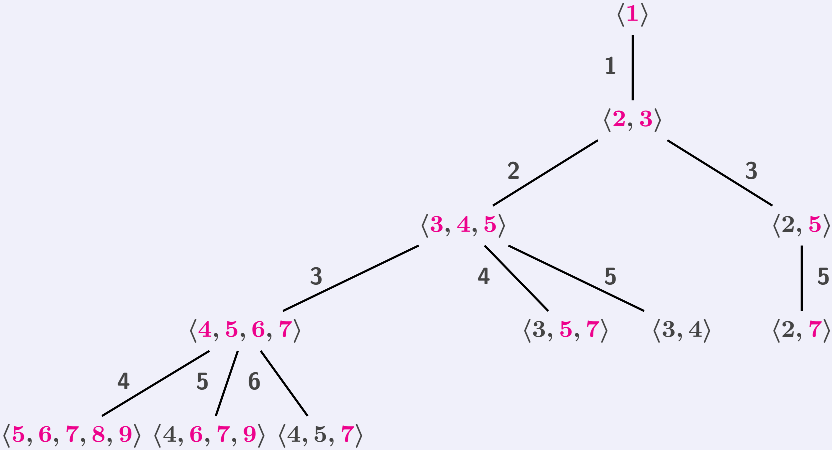
Arbre des semigroupes numériques



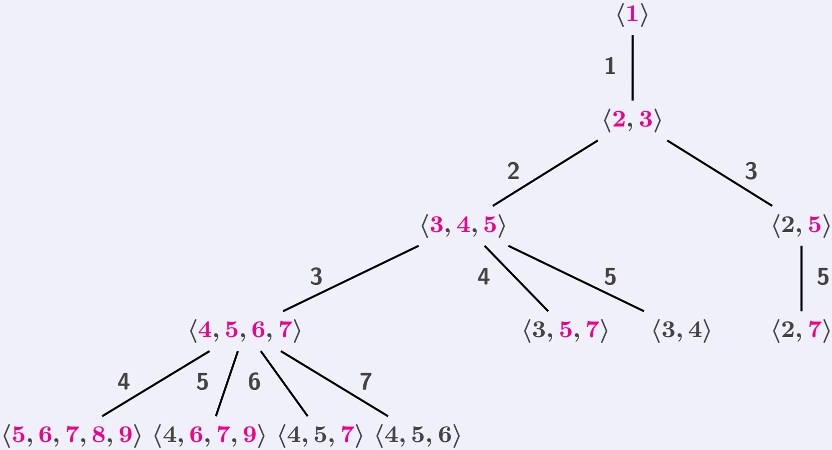
Arbre des semigroupes numériques



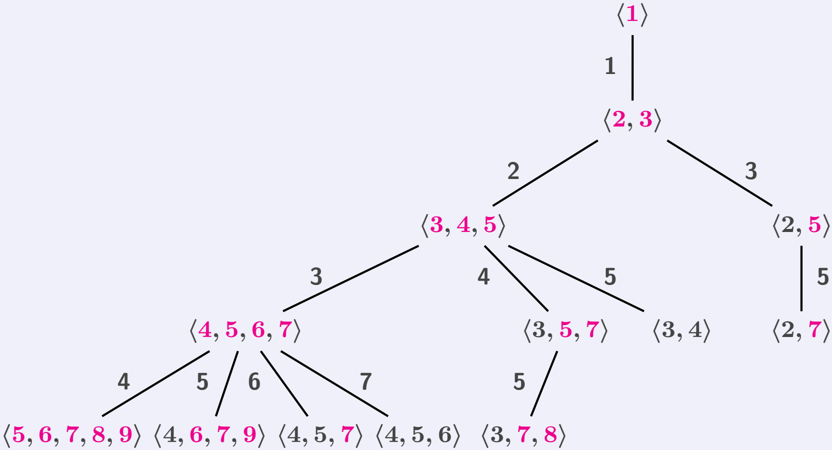
Arbre des semigroupes numériques



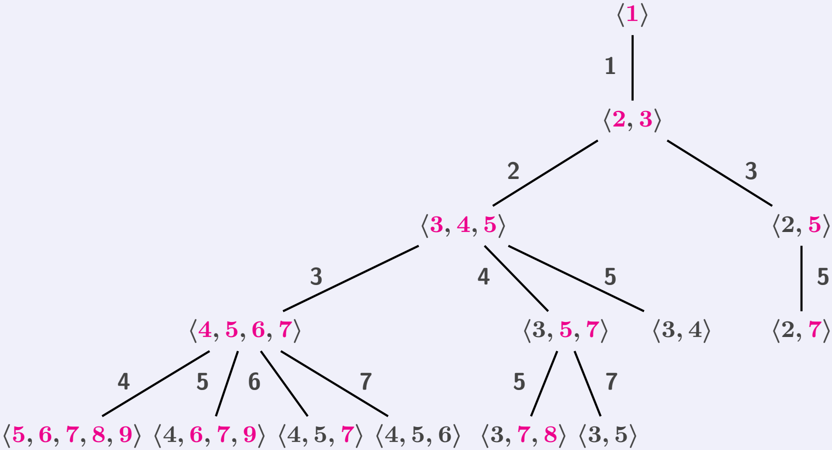
Arbre des semigroupes numériques



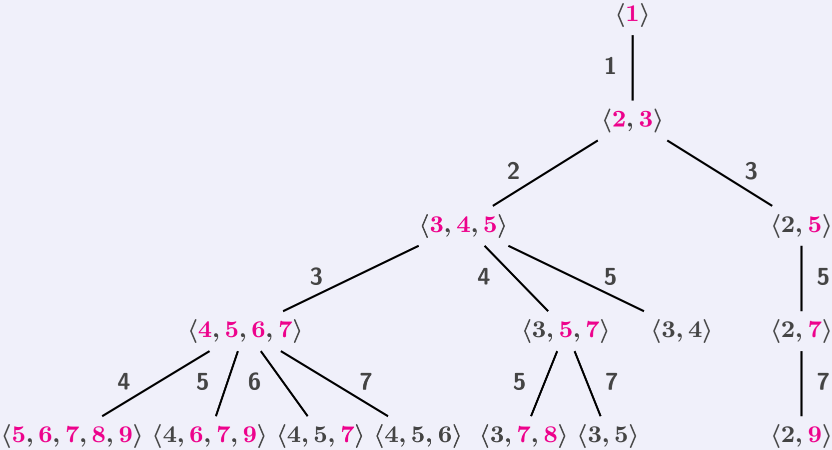
Arbre des semigroupes numériques



Arbre des semigroupes numériques



Arbre des semigroupes numériques



Représentation : Apéry

- **Question** : Comment représenter un semigroupe numérique ?

Représentation : Apéry

- **Question** : Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition** : Soit $m = \min(S^*)$. On pose

Représentation : Apéry

- **Question :** Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition :** Soit $m = \min(S^*)$. On pose
$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

Représentation : Apéry

- **Question :** Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition :** Soit $m = \min(S^*)$. On pose

$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

$\rightsquigarrow$ utilisé par M. Delgado, P. Garcia-Sanchez et J. Morais dans le package `numericalsgps` de `GAP`

Représentation : Apéry

- **Question :** Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition :** Soit $m = \min(S^*)$. On pose

$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

$\rightsquigarrow$ utilisé par M. Delgado, P. Garcia-Sanchez et J. Morais dans le package `numericalsgps` de `GAP`

- **Proposition :** On a

Représentation : Apéry

- **Question** : Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition** : Soit $m = \min(S^*)$. On pose
$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

$\rightsquigarrow$ utilisé par M. Delgado, P. Garcia-Sanchez et J. Morais dans le package `numericalsgps` de `GAP`

- **Proposition** : On a
  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq \mathrm{Ape}(S)$;

Représentation : Apéry

- **Question :** Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition :** Soit $m = \min(S^*)$. On pose
$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

$\rightsquigarrow$ utilisé par M. Delgado, P. Garcia-Sanchez et J. Morais dans le package `numericalsgps` de `GAP`

- **Proposition :** On a
  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq \mathrm{Ape}(S)$;
  - $c(S) = \max(\mathrm{Ape}(S)) - m + 1$;

Représentation : Apéry

- **Question** : Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition** : Soit $m = \min(S^*)$. On pose
$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

$\rightsquigarrow$ utilisé par M. Delgado, P. Garcia-Sanchez et J. Morais dans le package `numericalsgps` de `GAP`

- **Proposition** : On a
  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq \mathrm{Ape}(S)$;
  - $c(S) = \max(\mathrm{Ape}(S)) - m + 1$;
  - $\mathrm{card}(\mathrm{Ape}(S)) = m$.

Représentation : Apéry

- **Question :** Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition :** Soit $m = \min(S^*)$. On pose
$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

$\rightsquigarrow$ utilisé par M. Delgado, P. Garcia-Sanchez et J. Morais dans le package `numericalsgps` de `GAP`

- **Proposition :** On a
  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq \mathrm{Ape}(S)$;
  - $c(S) = \max(\mathrm{Ape}(S)) - m + 1$;
  - $\mathrm{card}(\mathrm{Ape}(S)) = m$.

$\rightsquigarrow$ calcul de $\mathrm{Ape}(S_x)$ pas si évident

Représentation : Apéry

- **Question :** Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition :** Soit $m = \min(S^*)$. On pose

$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

$\rightsquigarrow$ utilisé par M. Delgado, P. Garcia-Sanchez et J. Morais dans le package `numericalsgps` de `GAP`

- **Proposition :** On a
  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq \mathrm{Ape}(S)$;
  - $c(S) = \max(\mathrm{Ape}(S)) - m + 1$;
  - $\mathrm{card}(\mathrm{Ape}(S)) = m$.

$\rightsquigarrow$ calcul de $\mathrm{Ape}(S_x)$ pas si évident (à partir de $\mathrm{Ape}(S)$) ;

Représentation : Apéry

- **Question** : Comment représenter un semigroupe numérique ?

- **Définition** : Soit $m = \min(S^*)$. On pose

$$\mathrm{Ape}(S) = \{a \in S \mid a - m \notin S\}$$

$\rightsquigarrow$ utilisé par M. Delgado, P. Garcia-Sanchez et J. Morais dans le package `numericalsgps` de `GAP`

- **Proposition** : On a
  - $\mathrm{Irr}(S) \subseteq \mathrm{Ape}(S)$;
  - $c(S) = \max(\mathrm{Ape}(S)) - m + 1$;
  - $\mathrm{card}(\mathrm{Ape}(S)) = m$.

$\rightsquigarrow$ calcul de $\mathrm{Ape}(S_x)$ pas si évident (à partir de $\mathrm{Ape}(S)$) ;

$\rightsquigarrow$ pas assez « élémentaire » pour nous.

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

  $\rightsquigarrow$ Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

Représentation : tableau

- **Fait** : $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

  $\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Représentation : tableau

- **Fait** : $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

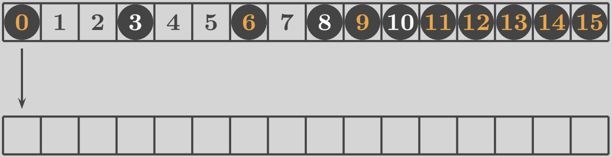
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si** $a \geqslant c(S) + m(S)$, **alors** $a - m(S)$ **appartient aussi à** S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

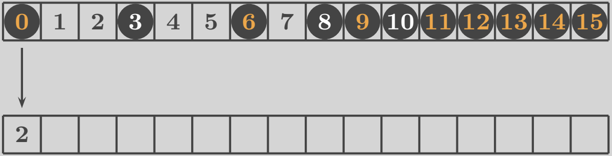


Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

  $\rightsquigarrow$ Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:



Représentation : tableau

- **Fait** : $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

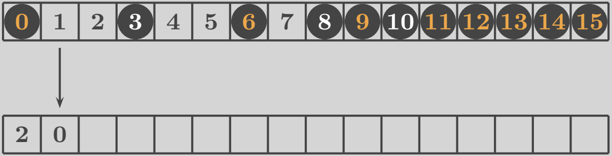
2															

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

  ⇝ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

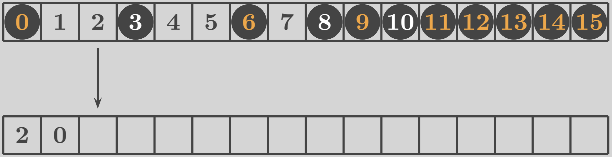


Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

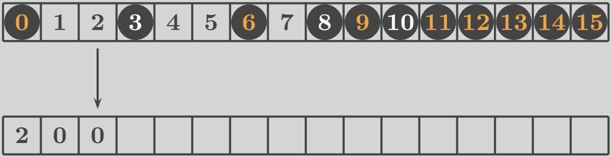


Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

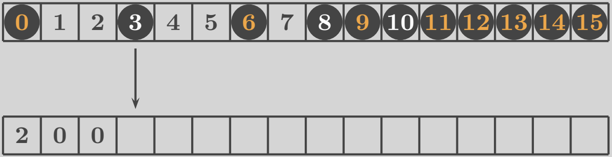


Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

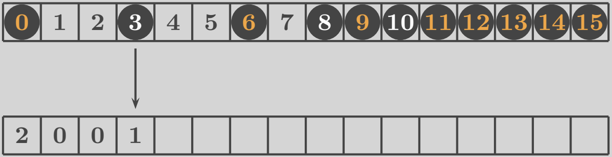


Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si** $a \geqslant c(S) + m(S)$**, alors** $a - m(S)$ **appartient aussi à** S**.**

Représentation de S **par un tableau de taille** $c(S) + m(S)$ **:**

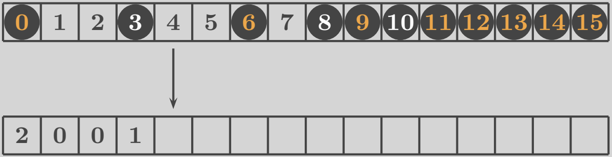


Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

  ⇝ Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:



Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\downarrow$

2	0	0	1	0											

Représentation : tableau

- **Fait** : $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$$\downarrow$$

2	0	0	1	0											

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\downarrow$

2	0	0	1	0	0										

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2	0	0	1	0	0										

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

  $\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$\downarrow$

2	0	0	1	0	0	2									

Représentation : tableau

- **Fait :** $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	2	2	2	2

Représentation : tableau

- **Fait** : $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S)+m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ Si $a \geqslant c(S)+m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.

Représentation de S par un tableau de taille $c(S)+m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	2	2	2	2

- $c(S) = 8$;
- $m(S) = 3$.

Représentation : tableau

- **Fait** : $\mathrm{Irr}(S)$ est inclus dans $[0, c(S) + m(S)[$.

$\rightsquigarrow$ **Si $a \geqslant c(S) + m(S)$, alors $a - m(S)$ appartient aussi à S.**

Représentation de S par un tableau de taille $c(S) + m(S)$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1

- $c(S) = 8$;
- $m(S) = 3$.

Représentation : tableau

- **Question : Comment calculer $\mathtt{tab}(S_x)$ à partir de $\mathtt{tab}(S)$?**

Représentation : tableau

- **Question : Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?**
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

Représentation : tableau

- **Question : Comment calculer $\mathtt{tab}(S_x)$ à partir de $\mathtt{tab}(S)$?**
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ **et** $x = 8$

Représentation : tableau

- **Question : Comment calculer $\mathtt{tab}(S_x)$ à partir de $\mathtt{tab}(S)$?**
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ **et** $x = 8$

- $\mathtt{tab}(S) = $

2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1

Représentation : tableau

- **Question : Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?**
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

- $\texttt{tab}(S) = \boxed{2 \mid 0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1 \mid 2 \mid 1}$ $\quad c = 8,\ m = 3$

Représentation : tableau

- **Question : Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?**
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

- $\texttt{tab}(S) = $

2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1

$c = 8$, $m = 3$

Représentation : tableau

- **Question** : Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

- $\texttt{tab}(S) = \boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ $\qquad c = 8,\ m = 3$
- $\texttt{tab}(S_8) = \boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$

Représentation : tableau

- **Question : Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?**
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10\rangle$ **et** $x = 8$

- $\texttt{tab}(S) =$

2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$c = 8,\ m = 3$

- $\texttt{tab}(S_8) =$

2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1

Représentation : tableau

- **Question :** Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

$c = 8$, $m = 3$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\texttt{tab}(S) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1
$\texttt{tab}(S_8) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1

Représentation : tableau

- **Question : Comment calculer** $\texttt{tab}(S_x)$ **à partir de** $\texttt{tab}(S)$ **?**
  $\rightsquigarrow$ **avec** $x \in \mathrm{Irr}(S)$ **et** $x \geqslant c(S)$**.**

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

- $\texttt{tab}(S) = $ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | $c = 8,\ m = 3$

$\texttt{tab}(S)$	2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\texttt{tab}(S_8)$	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1

$c = 8,\ m = 3$

Représentation : tableau

- **Question** : Comment calculer $\mathtt{tab}(S_x)$ à partir de $\mathtt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

- $\mathtt{tab}(S) =$

2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$c = 8$, $m = 3$

- $\mathtt{tab}(S_8) =$

2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1

$c = 9$, $m = 3$

Représentation : tableau

- **Question** : **Comment calculer $\mathtt{tab}(S_x)$ à partir de $\mathtt{tab}(S)$?**
  $\rightsquigarrow$ **avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.**

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ **et** $x = 8$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
◦ $\mathtt{tab}(S) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1		$c = 8,\ m = 3$
◦ $\mathtt{tab}(S_8) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	2	$c = 9,\ m = 3$

Représentation : tableau

- **Question :** Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

- $\texttt{tab}(S) = $ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | — $c = 8$, $m = 3$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	
2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	2

- $\texttt{tab}(S_8) = $ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | — $c = 9$, $m = 3$

Représentation : tableau

- **Question :** Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
∘ $\texttt{tab}(S) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1		$c = 8,\ m = 3$
∘ $\texttt{tab}(S_8) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	2	$c = 9,\ m = 3$

Représentation : tableau

- **Question :** Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
∘ $\texttt{tab}(S) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1		$c = 8$, $m = 3$
∘ $\texttt{tab}(S_8) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	2	$c = 9$, $m = 3$

Représentation : tableau

- **Question :** Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

- $\texttt{tab}(S) = \boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ $\quad c = 8,\ m = 3$

  $\phantom{\texttt{tab}(S) =}$ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

- $\texttt{tab}(S_8) = \boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}$ $\quad c = 9,\ m = 3$

Représentation : tableau

- **Question :** Comment calculer $\mathtt{tab}(S_x)$ à partir de $\mathtt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
∘ $\mathtt{tab}(S) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1		$c = 8$, $m = 3$
∘ $\mathtt{tab}(S_8) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	2	$c = 9$, $m = 3$

Représentation : tableau

- **Question** : **Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?**
  $\rightsquigarrow$ **avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.**

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ **et** $x = 8$

- $\texttt{tab}(S) = $

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	

  $c = 8,\ m = 3$

- $\texttt{tab}(S_8) = $

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1

  $c = 9,\ m = 3$

$\rightsquigarrow S_8 = \langle 3, 10, 11 \rangle$

Représentation : tableau

- **Question :** Comment calculer $\texttt{tab}(S_x)$ à partir de $\texttt{tab}(S)$?
  $\rightsquigarrow$ avec $x \in \mathrm{Irr}(S)$ et $x \geqslant c(S)$.

$S = \langle 3, 8, 10 \rangle$ et $x = 8$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
◦ $\texttt{tab}(S) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1		$c = 8$, $m = 3$
◦ $\texttt{tab}(S_8) =$	2	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1	$c = 9$, $m = 3$

$\rightsquigarrow S_8 = \langle 3, 10, 11 \rangle$

$\rightsquigarrow$ **Complexité en** $O((c(S_x) + m(S_x)) \times \mathrm{card}(\mathrm{Irr}(S_x)))$.

Exploration de l'arbre

M. Bras-Amoros et `numericalsgs` utilisent un parcours en largeur.

Exploration de l'arbre

M. Bras-Amoros et `numericalsgs` utilisent un parcours en largeur.

$\rightsquigarrow$ **calcul de L_g (liste des s.g.n. de genre g) à partir de L_{g-1}.**

Exploration de l'arbre

M. Bras-Amoros et `numericalsgs` utilisent un parcours en largeur.

$\rightsquigarrow$ **calcul de L_g (liste des s.g.n. de genre g) à partir de L_{g-1}.**

$\rightsquigarrow$ **M.Bras-Amoros : 18 jours pour calculer L_{50} à partir de L_{49}.**

Exploration de l'arbre

M. Bras-Amoros et `numericalsgs` utilisent un parcours en largeur.

$\rightsquigarrow$ **calcul de L_g (liste des s.g.n. de genre g) à partir de L_{g-1}.**

$\rightsquigarrow$ **M.Bras-Amoros : 18 jours pour calculer L_{50} à partir de L_{49}.**

- $\rightsquigarrow$ **Le fichier compressé de L_{50} fait 3.6GB.**

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

Pour atteindre le genre G, une pile de taille

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

Pour atteindre le genre G, une pile de taille $\dfrac{G(G+1)}{2}$ suffit.

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

Pour atteindre le genre G, une pile de taille $\frac{G(G+1)}{2}$ suffit.

$\rightsquigarrow$ Soit 2485 pour $G = 70$.

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

Pour atteindre le genre G, une pile de taille $\dfrac{G(G+1)}{2}$ suffit.

$\rightsquigarrow$ **Soit 2485 pour $G = 70$.**

Avantage : Consommation mémoire (ou accès disque) infime.

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

Pour atteindre le genre G, une pile de taille $\frac{G(G+1)}{2}$ suffit.

$\rightsquigarrow$ Soit 2485 pour $G = 70$.

Avantage : Consommation mémoire (ou accès disque) infime.

Inconvenient : On n'a pas la liste L_g des s.g.n. de genre g.

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

Pour atteindre le genre G, une pile de taille $\dfrac{G(G+1)}{2}$ suffit.

$\leadsto$ Soit 2485 pour $G = 70$.

Avantage : Consommation mémoire (ou accès disque) infime.

Inconvenient : On n'a pas la liste L_g des s.g.n. de genre g.

$\leadsto$ C'est aussi un avantage.

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

Pour atteindre le genre G, une pile de taille $\dfrac{G(G+1)}{2}$ suffit.

$\rightsquigarrow$ Soit 2485 pour $G = 70$.

Avantage : Consommation mémoire (ou accès disque) infime.

Inconvenient : On n'a pas la liste L_g des s.g.n. de genre g.

$\rightsquigarrow$ C'est aussi un avantage.

$\rightsquigarrow$ Pour atteindre le genre G il faut commencer depuis 0.

Exploration de l'arbre : optimisation

Parcours en profondeur préfixé à l'aide d'une pile.

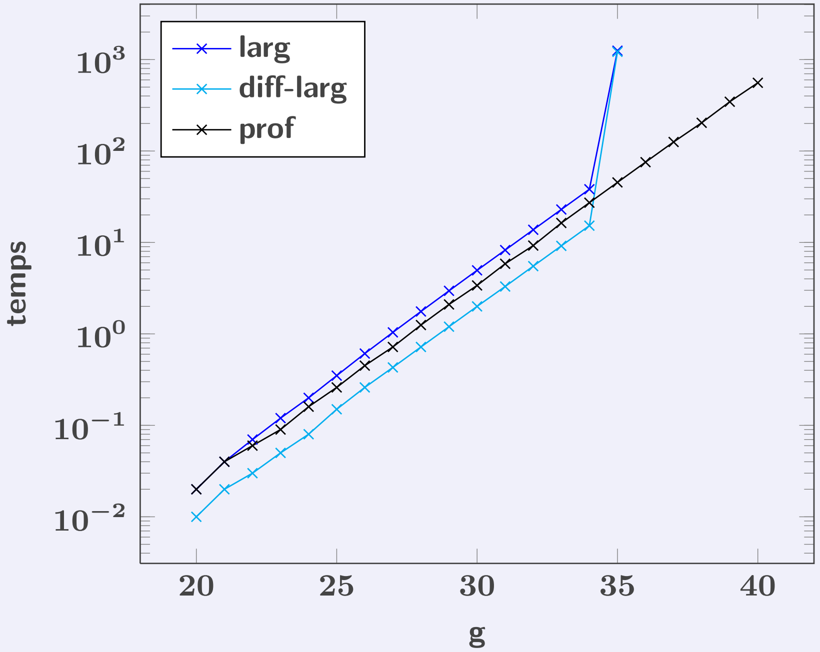
Pour atteindre le genre G, une pile de taille $\dfrac{G(G+1)}{2}$ suffit.

$\rightsquigarrow$ Soit 2485 pour $G = 70$.

Avantage : Consommation mémoire (ou accès disque) infime.

Inconvenient : On n'a pas la liste L_g des s.g.n. de genre g.

- $\rightsquigarrow$ C'est aussi un avantage.
- $\rightsquigarrow$ Pour atteindre le genre G il faut commencer depuis 0.
  - $\rightsquigarrow$ peut-être plus lent.



larg
diff-larg
prof
temps
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
20
25
30
35
40
g

Degré de décomposition

- **Définition : Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose**

Degré de décomposition

- **Définition : Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose**

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

Degré de décomposition

- **Définition : Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose**

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

Degré de décomposition

- **Définition : Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose**

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ **Pour tout $b \in d_S(a)$,**

Degré de décomposition

- **Définition : Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose**

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ **Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$**

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\ = \langle 3, 8, 10\rangle$.

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\; = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{$

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \operatorname{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\; = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{0$

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\; = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$

Degré de décomposition

- **Définition** : Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \operatorname{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple** : $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\ = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$, $\delta_S(0) = 1$.

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\; = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$, $\delta_S(0) = 1$.
  - $D_S(1) =$

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\ = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$, $\delta_S(0) = 1$.
  - $D_S(1) = \emptyset$

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\ = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$, $\delta_S(0) = 1$.
  - $D_S(1) = \emptyset$, $\delta_S(1) = 0$.

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\; = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$, $\delta_S(0) = 1$.
  - $D_S(1) = \emptyset$, $\delta_S(1) = 0$.
  - $D_S(3) = \{0\}$

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\ = \langle 3, 8, 10\rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$, $\delta_S(0) = 1$.
  - $D_S(1) = \emptyset$, $\delta_S(1) = 0$.
  - $D_S(3) = \{0\}$, $\delta_S(3) = 1$.

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

  et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\; = \langle 3, 8, 10\rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$, $\delta_S(0) = 1$.
  - $D_S(1) = \emptyset$, $\delta_S(1) = 0$.
  - $D_S(3) = \{0\}$, $\delta_S(3) = 1$.
  - $D_S(6) = \{0, 3\}$

Degré de décomposition

- **Définition :** Pour $a \in \mathbb{N}$ on pose

$$D_S(a) = \{b \in S \text{ tel que } a - b \in S \text{ et } 2b \leqslant a\}$$

et $\delta_S(a) = \mathrm{card}(D_S(a))$.

$\rightsquigarrow$ Pour tout $b \in d_S(a)$, on a $a = b + c$ avec $b, c \in S$ et $b \leqslant c$.

- **Exemple :** $S = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[\; = \langle 3, 8, 10 \rangle$.
  - $D_S(0) = \{0\}$, $\delta_S(0) = 1$.
  - $D_S(1) = \emptyset$, $\delta_S(1) = 0$.
  - $D_S(3) = \{0\}$, $\delta_S(3) = 1$.
  - $D_S(6) = \{0, 3\}$, $\delta_S(6) = 2$.

Degré de décomposition

- **Proposition : Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :**

Degré de décomposition

- **Proposition** : Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :
  - $a \in S^*$ ssi $\delta_S(a) \geqslant 1$.

Degré de décomposition

- **Proposition** : Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :
  - $a \in S^*$ ssi $\delta_S(a) \geqslant 1$.
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ ssi $\delta_S(a) = 1$.

Degré de décomposition

- **Proposition : Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :**
  - $a \in S^*$ **ssi** $\delta_S(a) \geqslant 1$.
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ **ssi** $\delta_S(a) = 1$.

- **Proposition : Soit $x \in \mathrm{Irr}(S)$ avec $x \geqslant c(S)$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on a**

Degré de décomposition

- **Proposition :** Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :
  - $a \in S^*$ ssi $\delta_S(a) \geqslant 1$.
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ ssi $\delta_S(a) = 1$.

- **Proposition :** Soit $x \in \mathrm{Irr}(S)$ avec $x \geqslant c(S)$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta_{S_x}(a) = \begin{cases} \delta_S(a) - 1 \\ \end{cases}$$

Degré de décomposition

- **Proposition** : Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :
  - $a \in S^*$ ssi $\delta_S(a) \geqslant 1$.
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ ssi $\delta_S(a) = 1$.

- **Proposition** : Soit $x \in \mathrm{Irr}(S)$ avec $x \geqslant c(S)$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta_{S_x}(a) = \begin{cases} \delta_S(a) - 1 & \text{si } a \in S \text{ et } a - x \in S; \\ & \end{cases}$$

Degré de décomposition

- **Proposition** : Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :
  - $a \in S^*$ ssi $\delta_S(a) \geqslant 1$.
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ ssi $\delta_S(a) = 1$.

- **Proposition** : Soit $x \in \mathrm{Irr}(S)$ avec $x \geqslant c(S)$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta_{S_x}(a) = \begin{cases} \delta_S(a) - 1 & \text{si } a \in S \text{ et } a - x \in S; \\ \delta_S(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Degré de décomposition

- **Proposition : Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :**
  - $a \in S^*$ ssi $\delta_S(a) \geqslant 1$.
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ ssi $\delta_S(a) = 1$.

- **Proposition : Soit $x \in \mathrm{Irr}(S)$ avec $x \geqslant c(S)$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on a**

$$\delta_{S_x}(a) = \begin{cases} \delta_S(a) - 1 & \text{si } a \geqslant x \text{ et } a - x \in S; \\ \delta_S(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Degré de décomposition

- **Proposition** : Pour $a \in \mathbb{N}^*$ on a :
  - $a \in S^*$ ssi $\delta_S(a) \geqslant 1$.
  - $a \in \mathrm{Irr}(S)$ ssi $\delta_S(a) = 1$.

- **Proposition** : Soit $x \in \mathrm{Irr}(S)$ avec $x \geqslant c(S)$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta_{S_x}(a) = \begin{cases} \delta_S(a) - 1 & \text{si } a \geqslant x \text{ et } \delta_S(a-x) \geqslant 1; \\ \delta_S(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau $\texttt{tab}(S)$:

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau `tab`(S) :

$$[\delta_S(0), \delta_S(1), ..., \delta_S(c(S) + m(S) - 1)]$$

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau $\texttt{tab}(S)$:

$$[\delta_S(0), \delta_S(1), ..., \delta_S(c(S) + m(S) - 1)]$$

$\rightsquigarrow$ $\texttt{tab}(S_x)$ **nécessite** $\delta_S(a)$ **pour** $a < c(S_x) + m(S_x)$.

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau `tab`(S) :

$$[\delta_S(0), \delta_S(1), \ldots, \delta_S(c(S) + m(S) - 1)]$$

$\rightsquigarrow$ `tab`(S_x) **nécessite** $\delta_S(a)$ **pour** $a < c(S_x) + m(S_x)$.

- **Fait : Pour $g \in \mathbb{N}$, on a $m(g) \leqslant g$ et $c(g) \leqslant 2g$.**

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau `tab`(S) :

$$[\delta_S(0), \delta_S(1), ..., \delta_S(c(S) + m(S) - 1)]$$

$\rightsquigarrow$ `tab`(S_x) **nécessite** $\delta_S(a)$ **pour** $a < c(S_x) + m(S_x)$**.**

- **Fait : Pour** $g \in \mathbb{N}$**, on a** $m(g) \leqslant g$ **et** $c(g) \leqslant 2g$**.**

$\rightsquigarrow$ **pour atteindre le genre** G **les `tab` doivent être de taille** $3G$**.**

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau $\texttt{tab}(S)$:

$$[\delta_S(0), \delta_S(1), \dots, \delta_S(c(S) + m(S) - 1)]$$

$\rightsquigarrow$ $\texttt{tab}(S_x)$ **nécessite** $\delta_S(a)$ **pour** $a < c(S_x) + m(S_x)$.

- **Fait : Pour $g \in \mathbb{N}$, on a $m(g) \leqslant g$ et $c(g) \leqslant 2g$.**

$\rightsquigarrow$ **pour atteindre le genre G les** $\texttt{tab}$ **doivent être de taille $3G$.**

Pour $a \in \mathbb{N}$, on a $D_{\mathbb{N}}(a) = \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right\}$ **et donc** $\delta_{\mathbb{N}}(a) = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1$.

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau $\texttt{tab}(S)$:

$$[\delta_S(0), \delta_S(1), \ldots, \delta_S(c(S) + m(S) - 1)]$$

$\rightsquigarrow$ $\texttt{tab}(S_x)$ **nécessite** $\delta_S(a)$ **pour** $a < c(S_x) + m(S_x)$.

- **Fait : Pour** $g \in \mathbb{N}$, **on a** $m(g) \leqslant g$ **et** $c(g) \leqslant 2g$.

$\rightsquigarrow$ **pour atteindre le genre** G **les** $\texttt{tab}$ **doivent être de taille** $3G$.

Pour $a \in \mathbb{N}$, **on a** $D_{\mathbb{N}}(a) = \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right\}$ **et donc** $\delta_{\mathbb{N}}(a) = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1$.

$\rightsquigarrow$ **pour atteindre le genre** $G = 4$, **on part de**

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau $\texttt{tab}(S)$:

$$[\delta_S(0), \delta_S(1), \ldots, \delta_S(c(S)+m(S)-1)]$$

$\rightsquigarrow$ $\texttt{tab}(S_x)$ **nécessite** $\delta_S(a)$ **pour** $a < c(S_x) + m(S_x)$.

- **Fait : Pour $g \in \mathbb{N}$, on a $m(g) \leqslant g$ et $c(g) \leqslant 2g$.**

$\rightsquigarrow$ **pour atteindre le genre G les** $\texttt{tab}$ **doivent être de taille $3G$.**

Pour $a \in \mathbb{N}$, on a $D_{\mathbb{N}}(a) = \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right\}$ **et donc** $\delta_{\mathbb{N}}(a) = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1$.

$\rightsquigarrow$ **pour atteindre le genre $G = 4$, on part de**
$\texttt{tab}(\mathbb{N}) = [d_{\mathbb{N}}(0), \ldots, d_{\mathbb{N}}(11)]$

Optimisation 2 : les degrés

Représentation de S par le tableau $\texttt{tab}(S)$:

$$[\delta_S(0), \delta_S(1), ..., \delta_S(c(S) + m(S) - 1)]$$

$\rightsquigarrow$ $\texttt{tab}(S_x)$ **nécessite** $\delta_S(a)$ **pour** $a < c(S_x) + m(S_x)$.

- **Fait : Pour** $g \in \mathbb{N}$, **on a** $m(g) \leqslant g$ **et** $c(g) \leqslant 2g$.

$\rightsquigarrow$ **pour atteindre le genre** G **les** $\texttt{tab}$ **doivent être de taille** $3G$.

Pour $a \in \mathbb{N}$, **on a** $D_{\mathbb{N}}(a) = \left\{0, ..., \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right\}$ **et donc** $\delta_{\mathbb{N}}(a) = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + 1$.

$\rightsquigarrow$ **pour atteindre le genre** $G = 4$, **on part de**

$\texttt{tab}(\mathbb{N}) = [d_{\mathbb{N}}(0), ..., d_{\mathbb{N}}(11)] = [1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5]$.

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple** : On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple** : On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1														

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple** : On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0													

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0												

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1											

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0										

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple** : On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0									

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple** : On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\mathtt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2								

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0							

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1						

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2					

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1				

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2			

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3		

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple** : On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
`tab`$[S]$	1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple** : On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - $\texttt{tab}[S_8] =$

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - `tab`$[S_8]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - `tab`$[S_8]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0							

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - `tab`$[S_8]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0						

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3
	↑								↑					

  - $\texttt{tab}[S_8] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0						

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - `tab`$[S_8]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2					

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] = $

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3
		↑								↑				

  - $\texttt{tab}[S_8] = $

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2					

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - $\texttt{tab}[S_8] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1				

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3
			↑								↑			

  - `tab`$[S_8]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1				

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - `tab`$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - `tab`$[S_8]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1			

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3
				↑								↑		

  - $\texttt{tab}[S_8] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1			

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3
				↑								↑		

  - $\texttt{tab}[S_8] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1	3		

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\mathtt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3
					↑								↑	

  - $\mathtt{tab}[S_8] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1	3		

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] \; = \; \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} & \multicolumn{1}{c}{9} & \multicolumn{1}{c}{10} & \multicolumn{1}{c}{11} & \multicolumn{1}{c}{12} & \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{14} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} \end{array}$
  - $\texttt{tab}[S_8] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} & \multicolumn{1}{c}{8} & \multicolumn{1}{c}{9} & \multicolumn{1}{c}{10} & \multicolumn{1}{c}{11} & \multicolumn{1}{c}{12} & \multicolumn{1}{c}{13} & \multicolumn{1}{c}{14} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & \\ \hline \end{array}$

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - tab$[S]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3
						↑								↑

  - tab$[S_8]$ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1	3	2	

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\mathtt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3
						↑								↑

  - $\mathtt{tab}[S_8] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1	3	2	2

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - $\texttt{tab}[S_8] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1	3	2	2

  - $S_8 = \langle 3, 10, 11 \rangle$.

Optimisation 2 : les degrés

- **Exemple :** On veut atteindre $G = 5$.
  - $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$, $c = 8, m = 3$.
  - $\texttt{tab}[S] =$

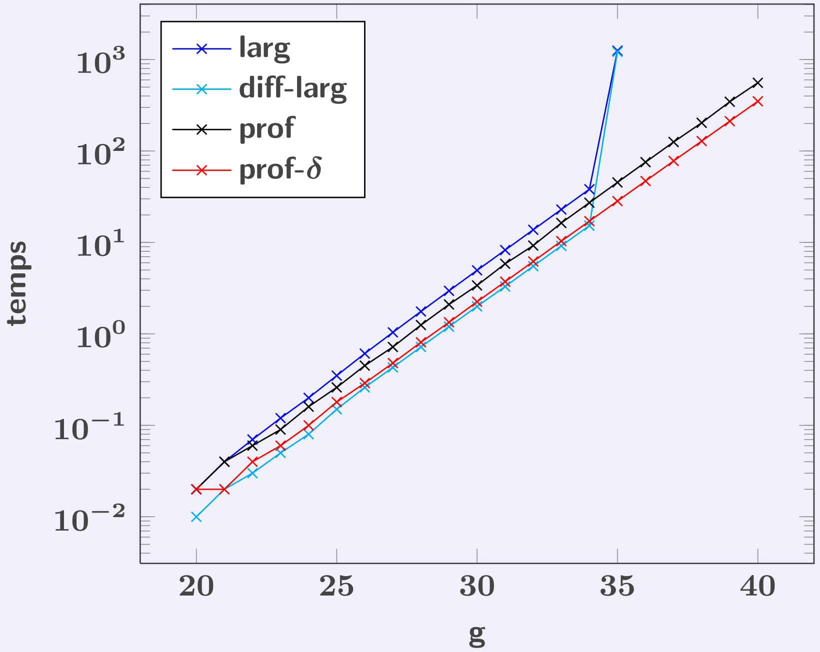
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	1	2	1	2	3	2	3

  - $\texttt{tab}[S_8] =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	1	0	0	2	0	0	2	1	1	3	2	2

  - $S_8 = \langle 3, 10, 11 \rangle$.

$\rightsquigarrow$ **Complexité en $O(3G)$**


larg
diff-larg
prof
prof-δ
temps
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
20
25
30
35
40
g

Type de données

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- **Les tableaux sont de taille**

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- **Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$**

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- **Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$**

  $\rightsquigarrow$ **l'indice peut être un entier codé sur** `2 octets`**.**

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$

  $\rightsquigarrow$ l'indice peut être un entier codé sur `2 octets`.

- Pour $a < 240$, on a

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- **Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$**

  $\rightsquigarrow$ **l'indice peut être un entier codé sur `2 octets`.**

- **Pour $a < 240$, on a $\delta_{\mathbb{N}}(a) = 1 + \frac{a}{2} \leqslant$**

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- **Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$**

  $\rightsquigarrow$ **l'indice peut être un entier codé sur** `2 octets`**.**

- **Pour $a < 240$, on a $\delta_{\mathbb{N}}(a) = 1 + \frac{a}{2} \leqslant \frac{G}{2}$**

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- **Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$**

  $\rightsquigarrow$ **l'indice peut être un entier codé sur `2 octets`.**

- **Pour $a < 240$, on a $\delta_{\mathbb{N}}(a) = 1 + \frac{a}{2} \leqslant \frac{G}{2} \leqslant 120$**

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- **Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$**

  $\rightsquigarrow$ **l'indice peut être un entier codé sur `2 octets`.**

- **Pour $a < 240$, on a $\delta_{\mathbb{N}}(a) = 1 + \frac{a}{2} \leqslant \frac{G}{2} \leqslant 120$**

  $\rightsquigarrow$ **une case de tableau nécessite `1 octet`.**

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- **Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$**

  $\rightsquigarrow$ **l'indice peut être un entier codé sur** `2 octets`**.**

- **Pour $a < 240$, on a $\delta_{\mathbb{N}}(a) = 1 + \frac{a}{2} \leqslant \frac{G}{2} \leqslant 120$**

  $\rightsquigarrow$ **une case de tableau nécessite** `1 octet`**.**

$\rightsquigarrow$ **Consommation mémoire :**

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$

  $\rightsquigarrow$ l'indice peut être un entier codé sur `2 octets`.

- Pour $a < 240$, on a $\delta_{\mathbb{N}}(a) = 1 + \frac{a}{2} \leqslant \frac{G}{2} \leqslant 120$

  $\rightsquigarrow$ une case de tableau nécessite `1 octet`.

$\rightsquigarrow$ Consommation mémoire :

$$\frac{G \times (G+1)}{2} \times 3G$$

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$

  $\rightsquigarrow$ l'indice peut être un entier codé sur `2 octets`.

- Pour $a < 240$, on a $\delta_{\mathbb{N}}(a) = 1 + \frac{a}{2} \leqslant \frac{G}{2} \leqslant 120$

  $\rightsquigarrow$ une case de tableau nécessite `1 octet`.

$\rightsquigarrow$ Consommation mémoire :

$$\frac{G \times (G+1)}{2} \times 3G = 3160 \times 240 =$$

Type de données

Si on veut atteindre le genre $G \leqslant 80$.

- Les tableaux sont de taille $\leqslant 3 \times G = 240$

  $\rightsquigarrow$ l'indice peut être un entier codé sur `2 octets`.

- Pour $a < 240$, on a $\delta_{\mathbb{N}}(a) = 1 + \frac{a}{2} \leqslant \frac{G}{2} \leqslant 120$

  $\rightsquigarrow$ une case de tableau nécessite `1 octet`.

$\rightsquigarrow$ Consommation mémoire :

$$\frac{G \times (G+1)}{2} \times 3G = 3160 \times 240 = 758\,400 \texttt{ octets}$$

Optimisation 3

Optimisation 3

- **Fait : Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.**

Optimisation 3

- **Fait : Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.**

  $\rightsquigarrow$ **ce qui représente 8 cases de tableau**

Optimisation 3

- **Fait : Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.**

  $\rightsquigarrow$ **ce qui représente 8 cases de tableau**

- **Question : Comment ≪ mettre à jour ≫ 8 cases d'un coup ?**

Optimisation 3

- **Fait : Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.**

  $\rightsquigarrow$ **ce qui représente 8 cases de tableau**

- **Question : Comment ≪ mettre à jour ≫ 8 cases d'un coup ?**

  $\rightsquigarrow$ **utilisation de `SIMD` (Single Instruction Multiple Data)**

Optimisation 3

- **Fait : Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.**

$\rightsquigarrow$ **ce qui représente 8 cases de tableau**

- **Question : Comment ≪ mettre à jour ≫ 8 cases d'un coup ?**

$\rightsquigarrow$ **utilisation de `SIMD` (Single Instruction Multiple Data)**

  $\rightsquigarrow$ **et en particulier `MMX` (MultiMedia eXtension)**

Optimisation 3

- **Fait :** Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.

  $\rightsquigarrow$ ce qui représente 8 cases de tableau

- **Question :** Comment « mettre à jour » 8 cases d'un coup ?

  $\rightsquigarrow$ utilisation de `SIMD` (Single Instruction Multiple Data)

    $\rightsquigarrow$ et en particulier `MMX` (MultiMedia eXtension)

- **Question :** Et le `SSE` (Streaming SIMD Extension) ?

Optimisation 3

- **Fait :** Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.

  $\rightsquigarrow$ ce qui représente 8 cases de tableau

- **Question :** Comment « mettre à jour » 8 cases d'un coup ?

  $\rightsquigarrow$ utilisation de `SIMD` (Single Instruction Multiple Data)

    $\rightsquigarrow$ et en particulier `MMX` (MultiMedia eXtension)

- **Question :** Et le `SSE` (Streaming SIMD Extension) ?

  $\rightsquigarrow$ problème d'alignement mémoire

Optimisation 3

- **Fait :** Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.

  ⇝ ce qui représente 8 cases de tableau

- **Question :** Comment « mettre à jour » 8 cases d'un coup ?

  ⇝ utilisation de `SIMD` (Single Instruction Multiple Data)

    ⇝ et en particulier `MMX` (MultiMedia eXtension)

- **Question :** Et le `SSE` (Streaming SIMD Extension) ?

  ⇝ problème d'alignement mémoire

    ⇝ pas de gain comparé au `MMX`

Optimisation 3

- **Fait :** Les processeurs actuels travaillent sur `64bits`.

  $\rightsquigarrow$ ce qui représente 8 cases de tableau

- **Question :** Comment « mettre à jour » 8 cases d'un coup ?

  $\rightsquigarrow$ utilisation de `SIMD` (Single Instruction Multiple Data)

  $\rightsquigarrow$ et en particulier `MMX` (MultiMedia eXtension)

- **Question :** Et le `SSE` (Streaming SIMD Extension) ?

  $\rightsquigarrow$ problème d'alignement mémoire

  $\rightsquigarrow$ pas de gain comparé au `MMX` (même une légère perte)

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = $

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = $

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	1	0	0	2	0	1

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb⟶

FF							

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF						

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} =$ | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 |
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} =$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 |

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb⟶

FF	FF	0					

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb⟶

FF	FF	0	FF				

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} =$ | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 |
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} =$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 |

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF			

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$

0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb⟶

FF	FF	0	FF	FF	0		

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2\,|\,1\,|\,2\,|\,3\,|\,2\,|\,3\,|\,3\,|\,4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0\,|\,0\,|\,1\,|\,0\,|\,0\,|\,2\,|\,0\,|\,1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0,3,6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb⟶

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb⟶

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}\end{array} \xrightarrow{\mathtt{pcmpeqb}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathtt{FF} & \mathtt{FF} & 0 & \mathtt{FF} & \mathtt{FF} & 0 & \mathtt{FF} & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathtt{FF} & \mathtt{FF} & 0 & \mathtt{FF} & \mathtt{FF} & 0 & \mathtt{FF} & 0 \\ \hline\end{array}\end{array} \xrightarrow{\mathtt{pandn}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & & & & & \\ \hline\end{array}$$

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \end{array} \xrightarrow{\texttt{pcmpeqb}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \texttt{FF} & \texttt{FF} & 0 & \texttt{FF} & \texttt{FF} & 0 & \texttt{FF} & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \texttt{FF} & \texttt{FF} & 0 & \texttt{FF} & \texttt{FF} & 0 & \texttt{FF} & 0 \\ \hline\end{array} \end{array} \xrightarrow{\texttt{pandn}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & & & & & & & \\ \hline\end{array}$$

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0						

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1					

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb⟶

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn ⟶

0	0	1	0				

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0			

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1		

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\mathtt{pcmpeqb}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathtt{FF} & \mathtt{FF} & 0 & \mathtt{FF} & \mathtt{FF} & 0 & \mathtt{FF} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \mathtt{FF} & \mathtt{FF} & 0 & \mathtt{FF} & \mathtt{FF} & 0 & \mathtt{FF} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\mathtt{pandn}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb⟶

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn ⟶

0	0	1	0	0	1	0	1

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline\end{array}$
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb →

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb →

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0,3,6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb →

2							

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb →

2	1						

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb →

2	1	1					

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = $ | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 | 4 |
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = $ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 |

0	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0	2	0	1		

—pcmpeqb⟶

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn ⟶

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb ⟶

2	1	1	3				

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10\rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} =$

2	1	2	3	2	3	3	4

  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} =$

0	0	1	0	0	2	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb →

2	1	1	3	3			

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ **et** $x = 8$
  - $\texttt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\texttt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb →

2	1	1	3	3	2		

Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	2	0	1

—pcmpeqb→

FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

1	1	1	1	1	1	0	1
FF	FF	0	FF	FF	0	FF	0

— pandn →

0	0	1	0	0	1	0	1

2	1	2	3	2	3	3	4
0	0	1	0	0	1	0	1

— psubb →

2	1	1	3	3	2	3	

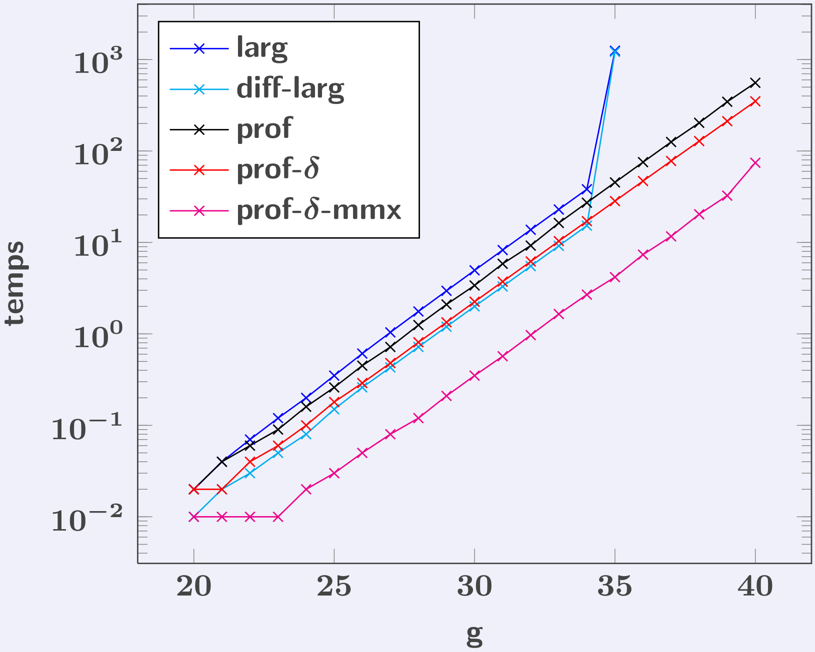
Optimisation 3 : MMX

- **Exemple :** $S = \langle 3, 8, 10 \rangle = \{0, 3, 6\} \sqcup [8, +\infty[$ et $x = 8$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[9,16]} = \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4}$
  - $\mathtt{tab}(S)_{[1,8]} = \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1}$

$$\begin{array}{c} \boxed{0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0} \\ \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 2 \mid 0 \mid 1} \end{array} \text{—pcmpeqb}\rightarrow \boxed{FF \mid FF \mid 0 \mid FF \mid FF \mid 0 \mid FF \mid 0}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 1 \mid 0 \mid 1} \\ \boxed{FF \mid FF \mid 0 \mid FF \mid FF \mid 0 \mid FF \mid 0} \end{array} \text{— pandn} \rightarrow \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 1}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3 \mid 4} \\ \boxed{0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 1} \end{array} \text{— psubb} \rightarrow \boxed{2 \mid 1 \mid 1 \mid 3 \mid 3 \mid 2 \mid 3 \mid 3}$$



larg
diff-larg
prof
prof-δ
prof-δ-mmx
temps
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
20
25
30
35
40
g

Nouveaux n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284		
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840		
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522		
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		

Nouveaux n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	433 317 458 741
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284		
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840		
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522		
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		

Nouveaux n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	433 317 458 741
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	703 569 992 121
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284		
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840		
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522		
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		

Nouveaux n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	433 317 458 741
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	703 569 992 121
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284	56	1 853 737 832 107
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840		
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522		
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		

Nouveaux n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	433 317 458 741
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	703 569 992 121
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284	56	1 853 737 832 107
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840	57	3 008 140 981 820
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522		
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		

Nouveaux n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	433 317 458 741
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	703 569 992 121
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284	56	1 853 737 832 107
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840	57	3 008 140 981 820
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522	58	4 880 606 790 010
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		

Nouveaux n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	433 317 458 741
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	703 569 992 121
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284	56	1 853 737 832 107
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840	57	3 008 140 981 820
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522	58	4 880 606 790 010
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		

$\rightsquigarrow$ **le calcul de n_{50} prend 196 minutes sur 1 core de `i5-3570K`**

Nouveaux n_g

0	1	16	4 806	32	15 195 070	48	38 260 496 374
1	1	17	8 045	33	24 896 206	49	62 200 036 752
2	2	18	13 467	34	40 761 087	50	101 090 300 128
3	4	19	22 464	35	666 87 201	51	164 253 200 784
4	7	20	37 396	36	109 032 500	52	266 815 155 103
5	12	21	62 194	37	178 158 289	53	433 317 458 741
6	23	22	103 246	38	290 939 807	54	703 569 992 121
7	39	23	170 963	39	474 851 445	55	1 142 140 736 859
8	67	24	282 828	40	774 614 284	56	1 853 737 832 107
9	118	25	467 224	41	1 262 992 840	57	3 008 140 981 820
10	204	26	770 832	42	2 058 356 522	58	4 880 606 790 010
11	343	27	1 270 267	43	3 353 191 846		
12	592	28	2 091 030	44	5 460 401 576		
13	1 001	29	3 437 839	45	8 888 486 816		
14	1 693	30	5 646 773	46	14 463 633 648		
15	2 857	31	9 266 788	47	23 527 845 502		

$\rightsquigarrow$ **le calcul de n_{50} prend 196 minutes sur 1 core de** `i5-3570K`

$\rightsquigarrow$ **le calcul de n_{58} prend 7 jours sur 1 core du même** `i5`

En cours et après

- **Parallélisation : plusieurs threads et ou ordinateurs.**

En cours et après

- **Parallélisation : plusieurs threads et ou ordinateurs.**

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{50} en 45 minutes sur les 4 cores du `i5`**

En cours et après

- **Parallélisation : plusieurs threads et ou ordinateurs.**

$\rightsquigarrow$ **calcul de n_{50} en 45 minutes sur les 4 cores du `i5`**

$\rightsquigarrow$ **calcul de n_{59} et n_{60} en 2 jours avec 2 ordinateur (18 cores).**

En cours et après

- **Parallélisation : plusieurs threads et ou ordinateurs.**

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{50} en 45 minutes sur les 4 cores du `i5`**

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{59} et n_{60} en 2 jours avec 2 ordinateur (18 cores).**
  $\rightsquigarrow$ $\boldsymbol{n_{59} = 7\,917\,344\,087\,695}$ **et** $\boldsymbol{n_{60} = 12\,8541\,603\,251\,351}$**.**

En cours et après

- **Parallélisation : plusieurs threads et ou ordinateurs.**

$\rightsquigarrow$ **calcul de n_{50} en 45 minutes sur les 4 cores du `i5`**

$\rightsquigarrow$ **calcul de n_{59} et n_{60} en 2 jours avec 2 ordinateur (18 cores).**
$\rightsquigarrow$ $n_{59} = 7\,917\,344\,087\,695$ **et** $n_{60} = 12\,8541\,603\,251\,351$.

$\rightsquigarrow$ **calcul de $n_{61}, \ldots, n_{65}$ en cours sur 4 ordinateurs (44 cores)**

En cours et après

- **Parallélisation : plusieurs threads et ou ordinateurs.**

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{50} en 45 minutes sur les 4 cores du `i5`**

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{59} et n_{60} en 2 jours avec 2 ordinateur (18 cores).**
  $\rightsquigarrow$ $n_{59} = 7\,917\,344\,087\,695$ **et** $n_{60} = 12\,8541\,603\,251\,351$.

  $\rightsquigarrow$ **calcul de $n_{61}, \ldots, n_{65}$ en cours sur 4 ordinateurs (44 cores)**

- **Utilisation de `CUDA` pour programmation `GPU`.**

En cours et après

- **Parallélisation : plusieurs threads et ou ordinateurs.**

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{50} en 45 minutes sur les 4 cores du** `i5`

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{59} et n_{60} en 2 jours avec 2 ordinateur (18 cores).**
  $\rightsquigarrow$ $n_{59} = 7\,917\,344\,087\,695$ **et** $n_{60} = 12\,8541\,603\,251\,351.$

  $\rightsquigarrow$ **calcul de $n_{61}, \ldots, n_{65}$ en cours sur 4 ordinateurs (44 cores)**

- **Utilisation de** `CUDA` **pour programmation** `GPU`**.**

  $\rightsquigarrow$ **peu prometteur.**

En cours et après

- **Parallélisation : plusieurs threads et ou ordinateurs.**

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{50} en 45 minutes sur les 4 cores du `i5`**

  $\rightsquigarrow$ **calcul de n_{59} et n_{60} en 2 jours avec 2 ordinateur (18 cores).**

  $\rightsquigarrow$ $n_{59} = 7\,917\,344\,087\,695$ **et** $n_{60} = 12\,8541\,603\,251\,351$.

  $\rightsquigarrow$ **calcul de $n_{61}, \ldots, n_{65}$ en cours sur 4 ordinateurs (44 cores)**

- **Utilisation de `CUDA` pour programmation `GPU`.**

  $\rightsquigarrow$ **peu prometteur.**

- **Trouver une formule pour n_g ou au moins des $\ll$ raccourcis $\gg$.**

Merci !