Une « version finie » du produit triple de Jacobi avec des chemins et des fractions continues

Matthieu Josuat-Vergès
Université de Vienne

Jang Soo Kim
Université du Minesotta

Produit triple de Jacobi :

$$\prod_{n\geq 1}(1-q^{2n})(1+yq^{2n-1})(1+y^{-1}q^{2n-1}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y^j q^{j^2}.$$

Théorème pentagonal d'Euler :

$$\prod_{n\geq 1}(1-q^n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(3j-1)}{2}}.$$

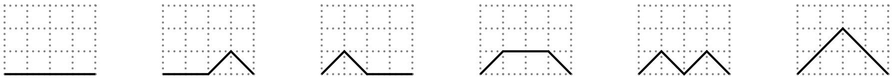
Le but de de relier :

- Une version finie du produit triple : $\sum_{j=-k}^{k} y^j q^{j^2} = \ldots$
- Des chemins et des fractions continues (chemins de Schröder pondérés, T-fractions)
- Des problèmes d'énumération (chemins de Dyck pondérés, S-fractions)

Définition

Un chemin de Schröder de longueur $2k$ est un chemin dans $\mathbb{N}^2$ allant de $(0,0)$ à $(2k,0)$ avec des pas $(1,1)$, $(1,-1)$ ou $(2,0)$.

Example



Définition

Le poids $W(p)$ d'un chemin de Schröder p est le produit de :

- *b_h pour chaque pas $\longrightarrow$ à hauteur h,*
- *a_h pour chaque pas $\nearrow$ de hauteur $h-1$ à h,*
- *c_h pour chaque pas $\searrow$ de hauteur h à $h-1$.*

Lemme

$$\sum_{\substack{\textit{chemin}\\ \textit{de Schröder } p}} W(p)\, z^{\frac{1}{2}\,\mathrm{longueur}(p)} = \cfrac{1}{1 - b_0 z - \cfrac{a_1 c_1 z}{1 - b_1 z - \cfrac{a_2 c_2 z}{1 - b_2 z - \ddots}}}$$

T-fraction

Démonstration.

Cela vient du fait que si f compte des objets, alors $1/(1-f)$ compte des suites d'objets. $\square$

Théorème

$$\sum_{j=-k}^{k} y^j q^{k(k+1)-j^2} = \sum_{\substack{\text{chemin de Schröder } p, \\ \text{de longueur } 2k}} W(p)$$

où le poids $W(p)$ est défini par les valeurs :

$$b_h = -1, \quad a_h = \begin{cases} 1 + yq^h & \text{si } h \text{ impair,} \\ 1 - q^h & \text{si } h \text{ pair,} \end{cases} \quad c_h = \begin{cases} 1 + y^{-1}q^h & \text{si } h \text{ impair,} \\ 1 - q^h & \text{si } h \text{ pair.} \end{cases}$$

Théorème

$$\sum_{j=-k}^{k} y^j q^{k(k+1)-j^2} = \sum_{\substack{\text{chemin de Schröder } p,\\ \text{de longueur } 2k}} W(p)$$

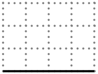
où le poids $W(p)$ est défini par les valeurs :

$$b_h = -1, \quad a_h = \begin{cases} 1 + yq^h & \text{si } h \text{ impair}, \\ 1 - q^h & \text{si } h \text{ pair}, \end{cases} \quad c_h = \begin{cases} 1 + y^{-1}q^h & \text{si } h \text{ impair}, \\ 1 - q^h & \text{si } h \text{ pair}. \end{cases}$$

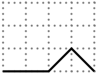
De manière équivalente,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=-k}^{k} y^j q^{k(k+1)-j^2} = \cfrac{1}{1 + z - \cfrac{(1+yq)(1+y^{-1}q)z}{1 + z - \cfrac{(1-q^2)^2 z}{1 + z - \cfrac{(1+yq^3)(1+y^{-1}q^3)z}{1 + z - \cfrac{(1-q^4)^2 z}{\ddots}}}}}$$

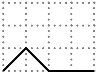
Example



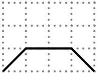
$$W(p) = 1$$



$$W(p) = -(1+yq)(1+y^{-1}q)$$

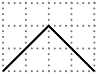


$$W(p) = -(1+yq)(1+y^{-1}q)$$



$$W(p) = -(1+yq)(1+y^{-1}q)$$

$$W(p) = (1+yq)^2(1+y^{-1}q)^2$$



$$W(p) = (1-q^2)^2(1+yq)(1+y^{-1}q)$$

La somme donne $q^6 + (y+y^{-1})q^5 + (y^2+y^{-2})q^2$.

Plan

- théorème $\Longrightarrow$ produit triple de Jacobi
- preuve du théorème
- conséquences (énumération, S-fractions)

Plan

- théorème $\Longrightarrow$ produit triple de Jacobi
- preuve du théorème
- conséquences (énumération, S-fractions)

$$\sum_{j=-k}^{k} y^j q^{k(k+1)-j^2} = \sum_{\substack{\text{chemin de Schröder } p, \\ \text{de longueur } 2k}} W(p)$$

Soit $F(q)$ le membre gauche, et $G(q)$ le membre droit. On a :

$$\lim_{k\to\infty} q^{k(k+1)} F(q^{-1}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y^j q^{j^2}.$$

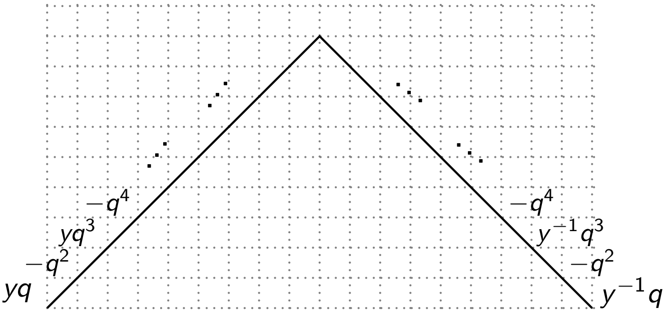
Il s'agit donc de montrer :

$$\lim_{k\to\infty} q^{k(k+1)} G(q^{-1}) = \prod_{n\geq 1} (1-q^{2n})(1+yq^{2n-1})(1+y^{-1}q^{2n-1}).$$

$G(q)$ est la série génératrice des chemins de Schröder de longueur $2k$, où :

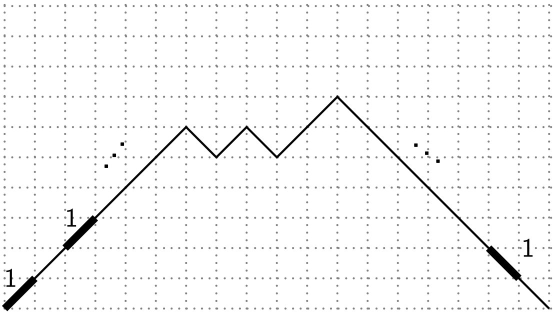
- un pas $\longrightarrow$ a un poids -1,
- un pas $\nearrow$ de hauteur $h-1$ à h a un poids soit 1, soit $\begin{cases} yq^h \; (h \text{ impair}) \\ -q^h \; (h \text{ pair}) \end{cases}$
- un pas $\searrow$ de hauteur h à $h-1$ a un poids soit 1, soit $\begin{cases} y^{-1}q^h \; (h \text{ impair}) \\ -q^h \; (h \text{ pair}) \end{cases}$

Le terme dominant de $G(q)$ est $q^{k(k+1)}$, et correspond au chemin :



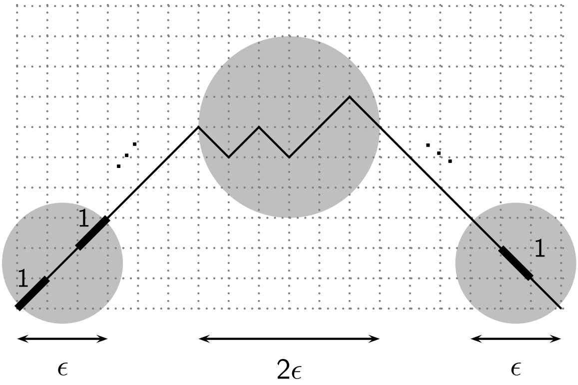
Les termes presque dominants, *i.e.* degré entre $k(k+1)$ et $k(k+1)-\epsilon$, viennent de chemins tels que :

- les pas avec poids 1 sont parmi les ϵ premiers ou ϵ derniers,
- il n'y a aucun pas $\longrightarrow$,
- les $k-\epsilon$ premiers pas sont $\nearrow$, les $k-\epsilon$ derniers sont $\searrow$.



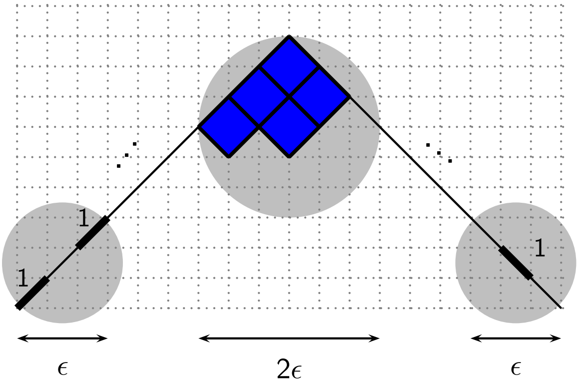
Les termes presque dominants, *i.e.* degré entre $k(k+1)$ et $k(k+1)-\epsilon$, viennent de chemins tels que :

- les pas avec poids 1 sont parmi les ϵ premiers ou ϵ derniers,
- il n'y a aucun pas $\longrightarrow$,
- les $k-\epsilon$ premiers pas sont $\nearrow$, les $k-\epsilon$ derniers sont $\searrow$.



Les termes presque dominants, *i.e.* degré entre $k(k+1)$ et $k(k+1)-\epsilon$, viennent de chemins tels que :

- les pas avec poids 1 sont parmi les ϵ premiers ou ϵ derniers,
- il n'y a aucun pas $\longrightarrow$,
- les $k-\epsilon$ premiers pas sont $\nearrow$, les $k-\epsilon$ derniers sont $\searrow$.



On a donc :

$$G(q) = q^{k(k+1)} \times \prod_{i=1}^{\lceil \epsilon/2 \rceil} (1 + y^{-1} q^{-2i+1})(1 - q^{-2i})$$
$$\times \begin{bmatrix} 2\epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix}_{q^{-2}} \times \prod_{i=1}^{\lceil \epsilon/2 \rceil} (1 + y q^{-2i+1})(1 - q^{-2i}) \quad + O(q^{k(k+1)-\epsilon})$$

Donc on a bien :

$$\lim_{k \to \infty} q^{k(k+1)} G(q^{-1}) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})(1 + y q^{2n-1})(1 + y^{-1} q^{2n-1}).$$

- théorème $\Longrightarrow$ produit triple de Jacobi
- preuve du théorème
- conséquences (énumération, S-fractions)

Soit $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=-k}^{k} y^j q^{k(k+1)-j^2}$

et $K(z) = \cfrac{1}{1+z-\cfrac{(1+yq)(1+y^{-1}q)z}{1+z-\cfrac{(1-q^2)^2 z}{1+z-\cfrac{(1+yq^3)(1+y^{-1}q^3)z}{1+z-\cfrac{(1-q^4)^2 z}{1+z-\ddots}}}}}$

Il s'agit de montrer $H(z) = K(z)$.

Lemme

$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{j=-k}^{k} y^j q^{k(k+1)-j^2}$ *est l'unique série formelle en z satisfaisant l'équation fonctionnelle :*

$$H(z) = \frac{1}{1-yqz} + \frac{1}{1-y^{-1}qz} - 1 + zq^2 H(zq^2).$$

Démonstration.

Soit $c_{k,j}(z) = z^k y^j q^{k(k+1)-j^2}$, on a :

$$H(z) = \sum_{k,j\in\mathbb{Z},\ k\geq|j|} c_{k,j}(z), \qquad c_{k+1,j}(z) = zq^2 c_{k,j}(zq^2),$$

$$H(z) - zq^2 H(zq^2) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_{|j|,j}(z) = \frac{1}{1-yqz} + \frac{1}{1-y^{-1}qz} - 1.$$

□

Lemme

La fraction continue $K(z)$ est l'unique série formelle en z satisfaisant l'équation fonctionnelle :

$$K(z) = \frac{1}{1 - yqz} + \frac{1}{1 - y^{-1}qz} - 1 + zq^2 K(zq^2).$$

Ainsi on a bien $H(z) = K(z)$.

Démonstration.

Notation : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}[X] = \dfrac{aX+b}{cX+d}$.

Soit $M(w,z)$ telle que $\dfrac{1}{1+z-\dfrac{(1+wqy)(1+wqy^{-1})z}{1+z-(1-wq^2)^2 zX}} = M(w,z)[X]$.

Alors, la fraction continue est $K(z) = M(1,z).M(q^2,z).M(q^4,z)\dots$

Soit $S = \begin{pmatrix} zq^2 & \frac{1}{1-zqy} + \frac{1}{1-zqy^{-1}} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

alors l'équation $K(z) = \frac{1}{1-yqz} + \frac{1}{1-y^{-1}qz} - 1 + zq^2 K(zq^2)$

s'écrit $K(z) = S[K(zq^2)]$,

ou encore :

$$M(1,z).M(q^2,z).M(q^4,z)\ldots = S.M(1,zq^2).M(q^2,zq^2).M(q^4,zq^2)\ldots$$

Soit

$$\Omega_n = M(q^{2n-2}, z)^{-1} \dots M(1, z)^{-1}.S.M(1, zq^2) \dots M(q^{2n-2}, zq^2),$$

et $w_n = \Omega_n[0]$. Alors :

$$M(1, z) \cdots M(q^{2n-2}, z)[w_n] = S.M(1, zq^2) \cdots M(q^{2n-2}, zq^2)[0]. \qquad (*)$$

Deux faits :

- Ω_n peut être calculée explicitement. Elle est telle que w_n est bien définie en $z = 0$ (pas de pôle).
- Les n premiers coefficients de $M(1, z) \cdots M(q^{2n-2}, z)[f]$ ne dépendent pas de f (série formelle en z quelconque).

Donc on peut prendre la limite $n \to \infty$ dans $(*)$ et on prouve l'équation fonctionelle :

$$M(1, z).M(q^2, z).M(q^4, z)\dots = S.M(1, zq^2).M(q^2, zq^2).M(q^4, zq^2)\dots$$

$\square$

Lemme

$$\Omega_n = \frac{\begin{pmatrix} q^2 z(2q^{2n} - zq^{2n+1}(y+y^{-1}) + z^2q^2 - 1) & 1 - z^2q^2 \\ (1-q^{2n})^2(z^2q^2-1)zq^2 & zq^{2n+1}(2qz - y - y^{-1}) + 1 - z^2q^2. \end{pmatrix}}{(1-yzq)(1-y^{-1}zq)}.$$

Démonstration.

On vérifie la récurrence $\Omega_{n+1} = M(q^{2n}, z)^{-1}.\Omega_n.M(q^{2n}, zq^2)$. $\square$

Lemme

Les n premiers coefficients de $M(1,z)\cdots M(q^{2n-2},z)[f]$ ne dépendent pas de f (série formelle en z quelconque).

Démonstration.

$M(1,z)\cdots M(q^{2n-2},z)[f]$ est une fraction continue finie qui compte des chemins de Schröder de hauteur bornée par $2n$.

La série f n'apparaît que dans les poids des pas $\longrightarrow$ à hauteur $2n$.

De tels pas n'apparraissent pas dans les chemins de longueur $\leq 2n$. $\square$

- théorème $\Longrightarrow$ produit triple de Jacobi
- preuve du théorème
- conséquences (énumération, S-fractions)

Lemme

$$\sum_{\substack{\textit{chemin} \\ \textit{de Dyck } p}} W(p)\, z^{\frac{1}{2}\,\mathrm{longueur}(p)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 c_1 z}{1 - \cfrac{a_2 c_2 z}{1 - \ddots}}}$$

S-fraction

Démonstration.
Pareil que pour les T-fractions. $\square$

Lemme

Soit λ_n, μ_n et ν_n tels que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\lambda_1 z}{1 - \cfrac{\lambda_2 z}{1 - \ddots}}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n z^n = \cfrac{1}{1 + z - \cfrac{\lambda_1 z}{1 + z - \cfrac{\lambda_2 z}{1 - \ddots}}}.$$

Alors, $\mu_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{2n}{n-k} - \binom{2n}{n-k-1} \right) \nu_k$.

Démonstration.

Inclusion-exclusion entre les chemins de Dyck et les chemins de Schröder. □

Théorème

Soit $\mu_n(a,b,q)$ *tel que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(a,b,q) z^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{[b+a]_q[b-a]_q z}{1 - \cfrac{[2b]_q^2 z}{1 - \cfrac{[3b+a]_q[3b-a]_q z}{1 - \cfrac{[4b]_q^2 z}{1 - \ddots}}}}}$$

Alors,

$$\mu_n(a,b,q) = \frac{1}{(1-q)^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{2n}{n-k} - \binom{2n}{n-k-1} \right) \sum_{j=-k}^{k} (-1)^j q^{aj+b(k(k+1)-j^2)}$$

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(a,b,1) \frac{z^n}{n!} = \frac{\cos(az)}{\cos(bz)}.$

Peut-on prouver combinatoirement la série génératrice $\dfrac{\cos(az)}{\cos(bz)}$?

Remarque : $\mu_n(a, b, q)$ est un polynôme en q à coefficents entiers si :

- $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leq a < b$,
- ou $a, b \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ et $0 \leq a < b$.