Abélianisation et majorations de Lappo-Danilevski.

Non-commutative differential equations
and (some) infinite dimensional Lie Groups)

V.C. Bùi, G.H.E. Duchamp,
Hoang Ngoc Minh, Q.H. Ngô, C. Tollu

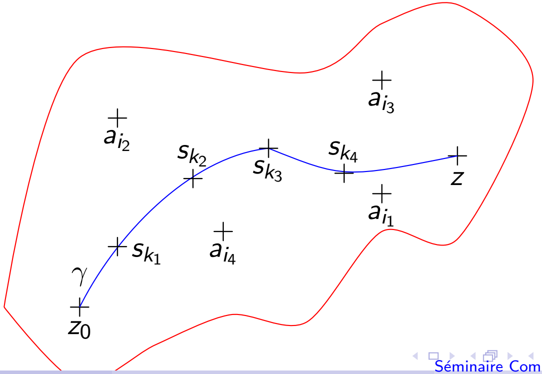
Séminaire Combinatoire, Informatique et Physique,
LIPN

Intégrales itérées de Lappo-Danilevski

Soit a_i une famille de nombres complexes distincts et distincts de z_0.

Définition [Lappo-Danilevskiĭ, 1928]

$$L(a_{i_0},\ldots,a_{i_n}|z_0 \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} z) = \int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{s_n}\ldots\int_{z_0}^{s_1}\frac{ds_0}{s_0-a_{i_0}}\ldots\frac{ds_n}{s_n-a_{i_n}}.$$



Codage par des mots et ED non-commutative

On peut reprendre plusieurs fois une forme différentielle donnée. Donc, l'idée est de coder par des mots ces intégrales itérées. On donne une lettre par point $x_i \to a_i$. Ainsi, L devient fonction d'un mot et d'un chemin. On montre facilement que la valeur de L ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin. Autrement dit si $z_0 \overset{\gamma_i}{\rightsquigarrow} z$; $i = 1, 2$ sont homotopes

$$L(w|z_0 \overset{\gamma_1}{\rightsquigarrow} z) = L(w|z_0 \overset{\gamma_2}{\rightsquigarrow} z) \tag{1}$$

En ce qui concerne la dépendance par rapport aux mots, on considère la série $S(L, \gamma) = \sum_{w \in X} L(w|\gamma) w$ où $X = \{x_i\}$ est l'alphabet des singularités. Si Ω est simplement connexe (et connexe), la valeur de L ne dépend que de z_0 et z, on la note $\alpha_{z_0}^{z}(w)$ et on considère $S(z) = \sum_{w \in X} \alpha_{z_0}^{z}(w)\, w$

Équation différentielle (Ω simplement connexe) :

$$\frac{d}{dz} S(z) = M(z) S(z) \text{ avec } M(z) = \sum_{x_i \in X} \frac{1}{z - a_i} x_i .$$

Remark 1

i) Si Ω n'est pas simplement connexe, on se place au voisinage du chemin γ.
ii) Le multiplicateur est polynomial et primitif (pour Δ_{III}).

En fait, on va considérer des systèmes du type (plus haut $\mathbf{d} = \frac{d}{dz}$).

$$(ED_1)\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{d}(S) & = & TS\ ;\ T \in A_+\langle\langle X\rangle\rangle \\ \langle S|1_{X^*}\rangle & = & 1_A \end{array}\right. \tag{2}$$

or, plus simplement

$$(ED) \qquad \mathbf{d}(S) = TS\ ;\ T \in A_+\langle\langle X\rangle\rangle \tag{3}$$

En général (A, d) est en un anneau différentiel (commutatif). Dans les applications A sera pensé comme un espace $\mathcal{H}(\Omega)$ (Ω est un ouvert connexe et simplement connexe de $\mathbb{C}$) avec la dérivée complexe usuelle d/dz.

Construction d'une solution particulière S_{Pic}. Algorithme de Picard.

L'anneau différentiel (A, d) est censé posséder une intégrale i.e. une section, $\int \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$, de la dérivée d. Cet opérateur est, comme d, aussitôt étendu terme à terme aux séries pour construire une section de $\mathbf{d}$, cette section sera notée $\int$.

Theorem 1 (Algorithme de Picard et une solution (ED_1))

The sequence

$$S_0 = 1_{X^*} \ ; \ S_{n+1} = 1 + \int (TS_n) \tag{4}$$

pointwise converges (series viewed as functions on X^*)[a] *to a series S_{Pic} which is a solution of (ED_1)*

[a] Some mathematicians call this ultrametric convergence.

Orbites de solutions, groupes de Galois

Theorem 2 (Orbites de solutions)

i) The set of solutions of (ED) *is*

$$\mathcal{S} = S_{Pic}G \tag{5}$$

where $G = const(A)\langle\langle X\rangle\rangle$ *(*$const(A)$ *is the kernel of* d*).*
ii) The set of invertible solutions of (ED) *is*

$$\mathcal{S} = S_{Pic}G_{\times} \tag{6}$$

where $G_{\times}$ *is the group* $const(A)\langle\langle X\rangle\rangle^{\times}$*.*
iii) The set of solutions of (ED_1) *is*

$$\mathcal{S} = S_{Pic}G_1 \tag{7}$$

where G_1 *is a subgroup of* $G_{\times}$*, set of series* S *s.t.* $\langle S|1_{X^*}\rangle = 1_A$*.*

Remark 2

i) On voit bien que la condition $\langle S|1_M\rangle = 1_A$ *ne détermine pas une solution unique (constantes d'intégration).*
ii) Par contre dans le cas où $A = \mathcal{H}(\Omega)$ *(avec la dérivée usuelle* d/dz*), une série* S *(solution ou non) peut être vue comme une fonction* $\Omega \to \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ $(S(z) := \sum_{w\in X^*}\langle S|w\rangle(z)\,w)$*. Pour* $z_0 \in \Omega$ *la "condition initiale"* $S(z_0) = 1_{\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle}$ *détermine une solution unique et correspond, dans l'algorithme de Picard, à l'intégrale* $\int_{\mathbf{z_0}}^{\mathbf{z}}$ *(séries de Chen).*
iii) Le fait qu'il n'y ait qu'une seule solution avec $S(z_0) = 1_{\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle}$ *fait que, si* S *est une solution quelconque de* (ED) *et* $z_0 \in \Omega$ *est un point où* S *est inversible (terme constant non nul) la série* $S(z).S(z_0)^{-1}$ *est la série de Chen, de point de base* z_0*, solution de* (ED_1)*. Ces séries de Chen ont des propriétés de croissance remarquables.*
iv) Tout ce qui vient d'être dit se transpose aisément au cas où X^* *est remplacé par un monoïde localement fini i.e. tel que tout* $x \neq 1$ *n'a qu'un nombre fini de factorisations* $x \in M_+$ *n'a qu'un nombre fini de factorisations* $x = x_1 x_2 \cdots x_n$*;* $x_i \neq 1$ *(n arbitraire).*

Propriété de groupe

Les intégrales itérées sont solutions du système

$$\begin{cases} \mathbf{d}(S) &= TS \;;\; T \in A_+\langle\langle X\rangle\rangle \\ S(z_0) &= 1_{\mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle} \end{cases} \tag{8}$$

On vient de voir que les series de $\mathcal{H}(\Omega)\langle\langle X\rangle\rangle$ peuvent être considérées comme des “fonctions” $\Omega \to \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$ ou bien des courbes (à paramètre complexe). Dans certains cas (comme celui qui nous intéresse) ces courbes sont tracées sur des groupes (solutions inversibles et/ou du type groupe).

Propriété de shuffle des intégrales itérées :

On rappelle (ED) (Ω connexe)

$$(ED) \qquad \mathbf{d}(S) = TS \ ; \ T \in \mathcal{H}(\Omega)_+\langle\langle X\rangle\rangle \tag{9}$$

Theorem 3 (Solutions tracées sur des groupes (de Lie))

i) Le terme constant d'une solution de (ED) est constant sur Ω. En particulier si une solution est inversible en un point, elle l'est partout.
ii) Si T est primitive ($\Delta_{ш}(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$) et qu'une solution S est de type groupe en un point, alors elle est de type groupe partout.
iii) Inversement si $S(z)$ est de type groupe en tout point (et différentiable terme à terme) alors S est solution d'une équation de type (ED) avec multiplicateur T primitif.

Remarks

Remark 3

i) La conclusion de (ii) vaut encore quand on remplace "en un point" par une limite ou même une équivalence.
ii) Pour le point (iii), le multiplicateur peut être très compliqué et non polynomial. À titre d'exemple on s'amusera à calculer le multiplicateur (à gauche) de

$$T(z) = L(z)e^{-x_0 log(z)} \tag{10}$$

Vers une théorie géométrique des hyperlogarithmes

- En prenant l'exemple de $T(z) = L(z)e^{-x_0 log(z)}$, on voit que, si on veut à toute force un multiplicateur à gauche, on a $T' = (M + TMT^{-1})T$ (ce qui donne un multiplicateur qui est non polynomial. Si on admet les deux côtés, on a une équation

$$T' = (\frac{x_0}{z} + \frac{x_1}{1-z})T + T(\frac{x_0}{z})$$

et on va considérer des systèmes du type

$$(ED_{two-sided}) \qquad \mathbf{d}(S) = M_1 S + S M_2 \ ; \ M_i \in A_+\langle\langle X \rangle\rangle \tag{11}$$

on peut développer Picard, il y a encore unicité des solutions qui conïncident en un point ou dont la différence tend vers zéro en un point frontière de Ω.

- On peut aussi vouloir développer des sous-séries de L (une partie de l'arbre). Ceci conduit à la théorie des équations diff avec second membre. Voir un exemple plus bas.

Propriétés des solutions de $(ED_{two-sided})$

Proposition 1

On l'équation non-commutative suivante

$$(ED_{two-sided}) \qquad \mathbf{d}(S) = M_1 S + S M_2 \ ; \ M_i \in A_+\langle\langle X \rangle\rangle \tag{12}$$

et une solution S de $(ED_{two-sided})$, alors
i) La fonction $\langle S(z) | 1_{X^*} \rangle$ est constante.
ii) Si S s'annulle en un point, S est nulle (partout).
iii) Si deux solutions coïncident en un point de Ω, elles sont égales.
iv) Si les deux multplicateurs $M_i,\ i = 1, 2$ sont primitifs et que S est de type groupe en un point (ou un point limite, i.e. que $lim_{\mathcal{F}} S(z)$ est de type groupe), alors elle est de type groupe partout (i.e. $S \in \mathcal{H}aus(A\langle\langle X \rangle\rangle)$).

Application

La série L est de type groupe.

Vers une théorie géométrique des hyperlogarithmes/2

Soit T la série

$$T = \sum_{n \geq 0} \langle L | x_0^n x_1 \rangle x_0^n \tag{13}$$

T vérifie le système suivant

$$(Li_{\mathbb{N}}) \begin{cases} \mathbf{d}(T) & = & \frac{x_0}{z} T + \frac{1}{1-z} \\ \langle T | 1_{X^*} \rangle & = & -log(1-z) \end{cases} \tag{14}$$

du type

$$(ED_2) \begin{cases} \mathbf{d}(S) & = & MS + \phi' \;;\; M \in A_+\langle\langle X \rangle\rangle \\ \langle S | 1_{X^*} \rangle & = & \phi \end{cases} \tag{15}$$

Nous allons montrer comment on résout les systèmes de type (ED_2).

Résolution de (ED_2)

1. On résout l'équation homogène $\mathbf{d}(S) = MS$ de façon à avoir une solution inversible (par exemple avec Picard), soit S_0 cette solution.
2. (variation of parameters - variation de constantes) Si S est une solution, on pose $S = S_0 H$ (ce qui est toujours possible $H = S_0^{-1} S$). On différencie

$$MS + \phi' = \mathbf{d}(S) = MS_0 H + S_0 \mathbf{d}(H) = MS + S_0 \mathbf{d}(H) \tag{16}$$

d'où $\mathbf{d}(H) = S_0^{-1}\phi'$ et $H = \int S_0^{-1}\phi'$ convient (il suffit de trouver une solution particulière de l'équation inhomogène). La solution générale de (ED_2) est alors $S = S_0 G + S_0 H$ avec $G \in \mathbb{C}\langle\langle X\rangle\rangle$.

Application : Résolution de $(Li_{\mathbb{N}})$

On résout $\mathbf{d}(T) = \frac{x_0}{z} T$, comme il n'y a qu'une variable, on a la solution $T_0 = e^{x_0 log(z)}$ et la solution générale

$$e^{x_0 log(z)}\Big(\big(\int_{z_0}^{z} \frac{e^{-x_0 log(s)}}{1-s} ds\big) + G(x_0)\Big) \tag{17}$$

où $G(x_0)$ est une série constante. Mais, comme $T(0) = 0$, on a

$$T(z) = \sum_{n\geq 0} \langle L | x_0^n x_1 \rangle x_0^n = e^{x_0 log(z)}\big(\int_0^z \frac{e^{-x_0 log(s)}}{1-s} ds\big) \tag{18}$$

De cette équation (18), on déduit

$$Li_{k+1}(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^{k+1}} = \langle T | x_0^k \rangle = \sum_{p+q=k} \frac{log(z)^p}{p!} \int_0^z \frac{(-log(s))^q}{(1-s)q!} ds \tag{19}$$

Below, Hoan's independant proof !

Preuve indépendante de la formule (19)

Nous utilisons l'introduction pour démontrer la formule 19.
Tout d'abord, nous remarquons que la formule 19 est évident dans le cas $n = 0$ parce que nous définissons

$$\mathrm{Li}_1(z) = \int_0^z \frac{ds}{1-s} = \sum_{p+q=0} \frac{log(z)^p}{p!} \int_0^z \frac{(-log(s)^q}{(1-s)q!} ds$$

Supposons que la formule 19 soit vraie pour $n > 1$. Nous avons besoin de prouver qu'elle est aussi vraie pour $n+1$.
Notons que si $f' = g'$ alors $f = g + const$. Notons

$$K_{n+1}(z) = \sum_{p=0}^{n} \frac{log(z)^p}{p!} \int_0^z \frac{(-log(s)^{n-p}}{(1-s)(n-p)!} ds \tag{20}$$

Alors

$$\begin{aligned} K'_{n+1}(z) &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{log(z)^{p-1}}{(p-1)!z} \int_0^z \frac{(-log(s))^{n-p}}{(1-s)(n-p)!} ds + \sum_{p=0}^{n} \frac{log(z)^p}{p!} \frac{(-log(z))^{n-p}}{(1-z)(n-p)!} \\ &= \frac{Li_n(z)}{z} + \frac{\log(z)^n}{1-z} \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!p!} \\ &= \frac{Li_n(z)}{z} + \frac{\log(z)^n}{n!(1-z)} \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} = \frac{Li_n(z)}{z}. \end{aligned}$$

Donc $K_{n+1}(z) = \mathrm{Li}_{n+1}(z) + const$.
Choisissons $z \to 0$, et notons que $\lim_{z\to 0} z \log^n z = 0$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, nous avons que $const = 0$. Et donc la formule 19 est prouvée.

Abélianisation des séries de Chen

Nous avons déjà employé, par nécessité, des séries dans $A\langle\langle\mathcal{M}\rangle\rangle$ (pour $\mathcal{M} = Y^* \otimes Y^*$) et l'on voit que la théorie générale est tout à fait similaire pourvu que $\mathcal{M}$ soit localement fini. Ceci va nous permettre de contrôler la croissance des séries de Chen en projetant l'équation différentielle

$$(ED_{Chen}) \begin{cases} \mathbf{d}(S) & = & MS \ ; \ M \in A_+\langle X\rangle \\ S(z_0) & = & 1_{A\langle\langle X\rangle\rangle} \end{cases} \qquad (21)$$

sur le monoïde libre commutatif $X^{\oplus}$ par la sujection canonique s_{ab} et, comme $s_{ab}(M) = M^{ab}$ commute avec sa dérivée, on va avoir une solution exponentielle. Ceci va nous permettre de contrôler la croissance des séries solution et donc de pouvoir les coupler avec d'autres séries que les polynômes. Commençons par le cas où le multiplicateur est homogène de degré 1 (cas qui couvre les poly- et hyperlogarithmes).

Conditions de croissance et séries de Chen : Multiplicateur homogène de degré un/1

L'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est toujours supposé connexe et simplement connexe. Soit $z_0 \in \Omega$. L'unique solution de

$$(ED_{Chen}) \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{d}(S) & = & MS \ ; \ M = \sum_{x \in X} u_x(z)\, x \\ S(z_0) & = & 1_{A\langle\langle X \rangle\rangle} \end{array} \right. \tag{22}$$

s'obtient par intégrales itérées de borne inférieure z_0.

Coefficients des séries de Chen

$$\langle S|w\rangle = \int_{z_0}^{z} \int_{z_0}^{s_1} \dots \int_{z_0}^{s_{n-1}} u_{x_1}(s_1) ds_1 \dots u_{x_n}(s_n) ds_n ; \ \ w = x_1 \dots x_n$$

Conditions de croissance et séries de Chen : Multiplicateur homogène de degré un/2

Si l'on choisit un chemin $z_0 \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} z$, (ED_{Chen}) se relève en $(ED_{Chen}^{\mathbb{R}})$

$$(ED_{Chen}^{\gamma})\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{d}(S\circ\gamma) & = & ((M\circ\gamma)\gamma')(S\circ\gamma)\ ;\ M=\sum_{x\in X}u_x(z)\,x \\ (S\circ\gamma)(0) & = & 1_{A_{\mathbb{R}}\langle\langle X\rangle\rangle} \end{array}\right. \tag{23}$$

qui se résout par intégrales itérées réelles de borne inférieure 0.

$$\langle (S\circ\gamma)|w\rangle = \int_0^t\int_0^{r_1}\dots\int_0^{r_{n-1}} u_{x_1}(\gamma)\gamma' ds_1\dots u_{x_n}(\gamma)\gamma' ds_n;\ \ w=x_1\dots x_n$$

Conditions de croissance et séries de Chen : Multiplicateur homogène de degré un/3

Mais, cette fois, on peut contrôler la croissance par

$$|\langle (S\circ\gamma)|w\rangle| \leq \int_0^t \int_0^{r_1} \dots \int_0^{r_{n-1}} |u_{x_1}(\gamma)\gamma'|ds_1 \dots |u_{x_n}(\gamma)\gamma'|ds_n$$

Le membre droit est solution de

$$(ED_{Chen}^{maj}) \begin{cases} \mathbf{d}(T) & = & (|M\circ\gamma)\gamma'|)\,T \\ T(0) & = & 1_{A_{\mathbb{R}}\langle\langle X\rangle\rangle} \end{cases} \tag{24}$$

Ceci nous amène à étudier comment majorer les systèmes réels à coefficients positifs.

Majoration de (24)

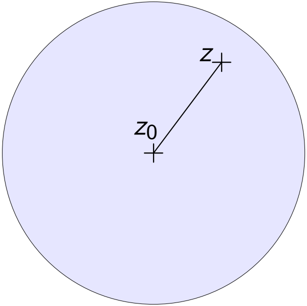
Pour le moment, on suppose que le multiplicateur M est homogène de degré 1 et polynomial (pas de somme infinie). On projette le système (24) sur y^* (une seule lettre. La série $R \in A[[y]]$, image de T, vérifie le système

$$(ED^{ol}_{Chen}) \begin{cases} \mathbf{d}(R) & = & u(t)y\, R \\ R(0) & = & 1_{A[[y]]} \end{cases} \qquad (25)$$

avec $u(t) = \sum_{x \in X} u_x(t)$. On a donc

$$R = e^{(\int_0^t u(s)ds)y} = \sum_{n \geq 0}$$

Application : cas du disque



$$\gamma(t) = z_0 + t(z - z_0) \tag{26}$$

Majoration des systèmes réels

$$(ED^{\mathbb{R}}_{Chen})\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{d}(R) & = & M\,R \\ R(0) & = & 1_{A_{\mathbb{R}}\langle\langle X\rangle\rangle} \end{array}\right. \qquad (27)$$

On peut montrer que, si $[\int M, M] = 0$, le système (27) admet une solution exponentielle et ce, pour tous les monoïdes (admissibles, c'est à dire localement finis). Mais, M, même dans me cas réel, ne commute pas toujours avec ses primitives[1]. Pour pallier cet inconvénient, nous allons projeter ce système sur $X^{\oplus}$ et même sur y^* (une seule variable).

[1] Par exemple pour deux entrées, avec $M = u_0x_0 + u_1x_1$ dont une primitive s'écrit $\int M = v_0x_0 + v_1x_1$, on a

$$[\int M, M] = (v_0u_1 - v_1u_0)[x_0, x_1] = W(v_0, v_1)[x_0, x_1]$$

qui est non nul dans le cas du multiplicateur de Drinfeld.

Majoration des systèmes réels/2

Le système devient

$$(ED^{\mathbb{R},ab}_{Chen,0})\begin{cases} \mathbf{d}(T^{ab}) & = & M^{ab}\,T^{ab} \\ T^{ab}(0) & = & 1_{A_{\mathbb{R}}\langle\langle X^{\oplus}\rangle\rangle} \end{cases} \tag{28}$$

Qui a pour (unique) solution

$$T^{ab} = e^{\int_0^z M^{ab}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\int_0^z M^{ab})^n}{n!} \tag{29}$$

Majoration de la croissance des systèmes à entrées positives

On est donc amené à considérer les systèmes

$$(ED^{\mathbb{R}_{\geq 0}}_{Chen,z_0}) \begin{cases} \mathbf{d}(T) & = & M\,T\ ,\ \mathcal{M} = X^* \\ T(x_0) & = & 1_{A\langle\langle X\rangle\rangle} \end{cases} \tag{30}$$

Ici, M a ses coefficients qui sont des fonctions (au moins continues sur $\Omega \subset \mathbb{R}$) réelles positives. Afin d'obtenir une majoration sur la croissance, on va projeter sur le monoide y^* (une seule lettre et dont l'algèbre large est $\mathbb{R}[y]$), c'est à dire faire la spécialisation $x \mapsto y$ pour tout $x \in X$ (ici, on suppose l'alphabet fini, voir la discussion plus bas).

Majoration de la croissance (entrées ≥ 0, multiplicateur de degré 1, X fini)

On suppose cette fois que $M = \sum_{x\in X} u_x\, x$ (multiplicateur homogène de degré 1, ce qui est le cas du multiplicateur de Drinfeld)

$$(ED_{Chen,z_0})\begin{cases} \mathbf{d}(T) &= M\,T\ ,\ \mathcal{M} = X^* \\ T(x_0) &= 1_{A\langle\langle X\rangle\rangle} \end{cases} \tag{31}$$

et on projette, avec le multiplicateur $\sum_{x\in X} |u_x|\, x$ sur y^*, pour obtenir une serie majorante

$$(ED_{Chen,z_0})\begin{cases} \mathbf{d}(S) &= \Big((\sum_{x\in X} |u_x|)y\Big)\, S\ ,\ \mathcal{M} = y^* \\ S(x_0) &= 1_{A\langle\langle X\rangle\rangle} \end{cases} \tag{32}$$

qui a pour solution $S = e^{(\int_{x_0}^{x} u(s)ds)y}$

Majoration de la croissance

En mettant ensemble les considérations précédentes et (32), on a qu'une série de Chen avec un multiplicateur multiplicateur homogène de degré 1, sur un alphabet fini vérifie une condition de croissance comme suit

$$||\langle S|w\rangle||_K \leq C\frac{R^{|w|}}{|w|!} \tag{33}$$

pour $C, R > 0$ (dépendant en géneral de K). Afin de gérer aussi les alphabets infinis, on a besoin de la condition plus fine suivante

Definition 4

On dit qu'une série est exp-majorée ssi elle vérifie la condition de croissance

$$||\langle S|w\rangle||_K \leq C\frac{\chi(w)}{|w|!} \tag{34}$$

pour $\chi : X^* \to \mathbb{R}_+$ un morphisme multiplicatif.

Majoration de la croissance, propriétés algébriques

On étend aux séries les symboles $|| \; ||_K$ et la relation d'ordre entre les fonctions terme à terme. Une série est donc exp-majorée, s'il existe $C > 0$ et $\chi : X^* \to \mathbb{R}_+$ comme ci-dessus tels que

$$||S||_K \leq C.e^{\sum_{x\in X}\chi(x).x} \tag{35}$$

on en déduit tout de suite que les produits (de Cauchy et shuffle) de deux séries exp-majorée sont exp-majorée (exercice).
La série L n'est exp-majorée en aucun point (exercice avec propriétés locales).

Conclusion

- Lorsque le multiplicateur est homogène de degré 1 (avec des fonctions continues), les séries de Chen sont exp-majorées pour la convergence compacte.
- Ces séries peuvent s'accoupler avec toutes les séries rationnelles, mais d'autres classes peuvent le faire comme les séries q-exp-majorées pour la convergence compacte.

$$||S||_K \leq C.e^{(\sum_{x\in X}\chi(x).x)^q}$$

- (Conjecture cylindrique) pour qu'une série puisse s'accoupler avec toutes les séries rationnelles, il faut et il suffit qu'elle vérifie une condition de croissance du type

$$||S||_K \leq C_K\varphi_K\Big(\sum_{x\in X}\chi(x).x\Big)$$

où $\varphi_K(z)$ est une fonction entière à coefficients positifs.