Énumération d'automates acycliques minimaux
Fonctions de parking

Séminaire de combinatoire du L.I.P.N.

Jean-Baptiste PRIEZ

Laboratoire de Recherche en Informatique
Faculté des sciences d'Orsay
Université Paris-Sud

Mardi 12 Mai 2015

Automates acycliques

Énumération : ADFA

Fonctions de parking généralisées

Bijection ADFA (non-initiaux)-fonctions de parking

Automates minimaux

Automates finis déterministes acycliques

Soit Σ un alphabet de k symboles.

Un *automate acyclique* à n états sur Σ : (i, A, δ)

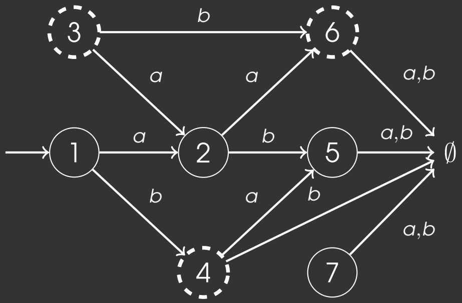
- $i \subset [n]$ un état initial,
- $A \subset [n]$ un ensemble d'états terminaux,
- $\delta : [n] \times \Sigma \to [n] \cup \{\emptyset\}$ une fonction de transition

telle que

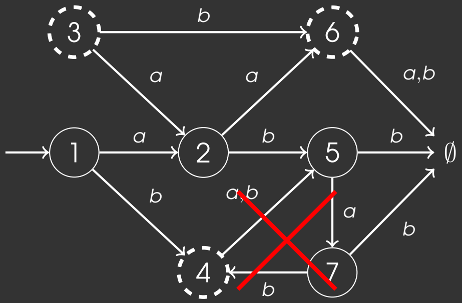
$$\forall q \in [n]\,,\ \forall w \in \Sigma^+\,, \qquad \delta^*(q, w) \neq q.$$

où $\emptyset$ est un état *absorbant* et δ^* est la fonction de transition étendue aux mots.

Automates finis déterministes acycliques (2)



Automates finis déterministes acycliques (2)



Énumération : ADFA

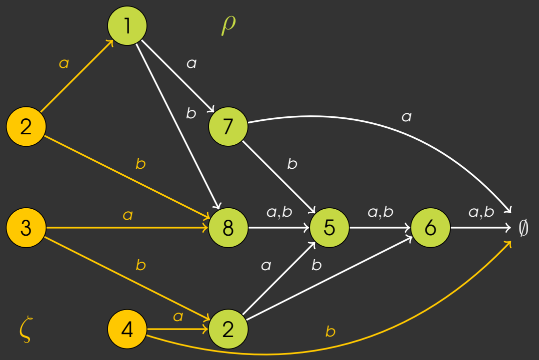
Comment calculer $\mathcal{A}_k(n)$: nombre d'ADFA à n états avec $\#\Sigma = k$

Construction combinatoire : (i, A, δ)

$$\begin{array}{rcccccc} \mathcal{A}_k(n) & = & \#\text{nb } i & \times & \#\text{nb } A & \times & \#\text{nb } \delta \\ & = & n & \times & 2^n & \times & \mathcal{T}_k(n) \end{array}$$

Comment calculer $\mathcal{T}_k(n)$? LISKOVETS, 2003

LISKOVETS, 2003



<u>*Sources*</u> : $S = \{\ q \in [n] \quad | \quad \forall r \in [n],\ \forall a \in \Sigma, \quad \delta(r,a) \neq q\ \}$

<u>*Principe*</u> : $s := \#S$

- Énumérer : $\zeta : S \times \Sigma \to [n] \backslash S \cup \{\emptyset\}$ $\rightsquigarrow$ $(n - s + 1)^{ks}$
- Découpage : $\zeta \times \rho$

LISKOVETS, 2003 (2)

Théorème :

$$\mathcal{T}_k(n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \binom{n}{s} (n-s+1)^{ks}\, \mathcal{T}_k(n-s)$$

avec $\mathcal{T}_k(0) = 1$.

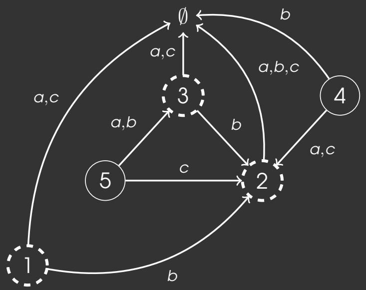
Cas particulier : J. KUNG & C. YAN, 2003

$$\mathcal{P}(\chi; n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \chi(n-s+1)^{s}\, \mathcal{P}(\chi; n-s)$$

où $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante.

Bijection : Fct° de transitions $\longleftrightarrow$ Fct° de parking généralisées
avec $\chi(m) := m^k$.

Bijection ?



$\updownarrow$?

Fonction de parking généralisée

Automates acycliques

Fonctions de parking généralisées

Fonction de parking

Généralisation

Bijection ADFA (non-initiaux)-fonctions de parking

Automates minimaux

Fonction de parking

KONHEIM et WEISS, 1966

Objet combinatoire : modélise les tables de hachage

$$f : [n] \to \mathbb{N}_+ \qquad \text{telle que} \qquad \#f^{-1}([k]) \geqslant k$$

pour tout $k \in [n]$.

Intérêts :

- arbres enracinés (étiquettés),
- séquences de Prüfer,
- arrangement d'hyperplans
- conjecture n!
- ...

Fonctions de parking de [3] : $\mathcal{F}[3]$

$$111, 112, 121, 211, 122, 212, 221, 113, 131, 311,$$
$$123, 132, 312, 213, 231, 321$$

où f est notée $f(1)f(2)f(3)$.

Fonction de parking généralisée

STANLEY et PITMAN, 2002 ; KUNG et YAN, 2003.

<u>χ-fonction de parking</u> : Soit $\chi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$ croissante.

$$f : [n] \to \mathbb{N}_+ \qquad \text{telle que} \qquad \# f^{-1}([\chi(k)]) \geqslant k$$

pour tout $k \in [n]$.

<u>*Exemple*</u> : $\mathcal{F}_\chi[2]$ avec $\chi : m \mapsto m^2$

$$11, 12, 21, 13, 31, 14, 41$$

<u>*Notation*</u> : $\mathcal{F}_\chi \simeq \mathcal{F}_{m^2}$

Intuition

Soit $\chi : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$ croissante.

Soit f une χ-fonction de parking :

Fonction de parking généralisée (2)

Définition équivalente : P. et VIRMAUX, 2015

$(Q_i)_{i \in \mathbb{N}_+}$ séquence de sous-ensembles disjoints de $[n]$

telle que

$$\sum_{i=1}^{\chi(k)} \#Q_i \geqslant k\,, \qquad \text{pour tout} \quad k \in [n]\,.$$

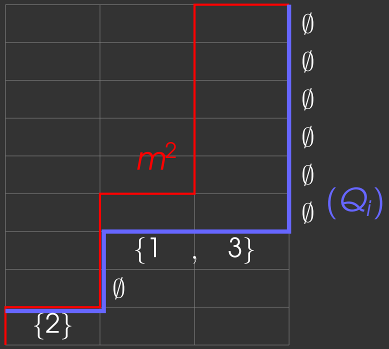
$\mathcal{F}_{m^2}[2]$:

$$(12|\cdot|\cdot|\cdot),\ (1|2|\cdot|\cdot),\ (2|1|\cdot|\cdot),$$
$$(1|\cdot|2|\cdot),\ (2|\cdot|1|\cdot),\ (1|\cdot|\cdot|2),\ (2|\cdot|\cdot|1)$$

avec $Q_i := f^{-1}(\{i\})$

Représentation graphique

Soit $(Q_i) := (\ 2|\cdot|13|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot\ )$ une $\mathcal{F}_{m^2}$-structure sur [3].



Automates acycliques

Fonctions de parking généralisées

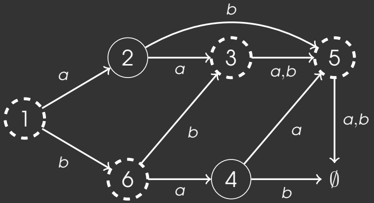
Bijection ADFA (non-initiaux)-fonctions de parking

- Ordre linéaire
- Division en facteurs
- Alphabet
- Fonction de parking $\rightarrow$ Automate

Automates minimaux

Objectif

Expliciter la bijection :



$\longleftrightarrow$

(Q_i)

$$Q_2 = \{5\}\,,\; Q_{24} = \{6\}\,,$$
$$Q_5 = \{4\}\,,\; Q_{27} = \{2\}\,,$$
$$Q_8 = \{3\}\,,\; Q_{72} = \{1\}\,.$$

ADFA (non-initiaux) (A, δ) sur un alphabet à k symboles

$\updownarrow$

$2m^k$-fonctions de parking

Ordre linéaire

Soit (Q_i) une $2m^k$-fonction de parking de $[n]$.

Ordre $<_q$: pour tout $r, s \in [n]$,

$$r <_q s \iff \begin{cases} r \in Q_k \text{ et } s \in Q_{k'} & \text{avec } k < k' \\ r < s \end{cases}$$

Exemple : $(\, 3 \mid \cdot \mid 12 \mid \cdot \mid \cdot \mid \cdot \mid \cdot \mid 4 \mid \cdot \mid \cdot \mid \cdots \,)$

$$\emptyset <_q 3 <_q 1 <_q 2 <_q 4$$

Division en facteurs

Soit (Q_i) une $2m^k$-fonction de parking sur $[n]$.

$$\Big(\underbrace{Q_1 \mid Q_2}_{F_1} \mid \underbrace{Q_3 \mid \cdots \mid Q_{2\cdot 2^k}}_{F_2} \mid \underbrace{Q_{2\cdot 2^k+1} \mid \cdots \mid Q_{2\cdot 3^k}}_{F_3} \mid \underbrace{Q_{2\cdot 3^k+1} \mid \cdots}_{\cdots}\Big)$$

Facteurs : $F_i := (Q_j)$ avec $2\cdot(i-1)^k + 1 \leqslant j \leqslant 2\cdot i^k$
où $i \in [n]$.

Propriétés :

- $\ell(F_i) = 2(i^k - (i-1)^k)$,
- $i^k - (i-1)^k$: le nombre de fonctions

$$\nu : \Sigma \longrightarrow I \qquad \text{où} \quad \#I = i$$

pour lesquelles $\exists a \in \Sigma$ telle que $\nu(a) = i$.

Division en facteurs (2)

Soit (Q_i) une $2m^k$-fonction de parking sur $[n]$ muni de l'ordre $<_q$:

$$\emptyset <_q q_1 <_q q_2 <_q \cdots <_q q_n$$

$$\Big(\underbrace{Q_1 \mid Q_2}_{F_1} \mid \underbrace{Q_3 \mid \cdots \mid Q_{2\cdot 2^k}}_{F_2} \mid \underbrace{Q_{2\cdot 2^k+1} \mid \cdots \mid Q_{2\cdot 3^k}}_{F_3} \mid \underbrace{Q_{2\cdot 3^k+1} \mid \cdots}_{\cdots} \Big)$$

$$\{\emptyset\} \xleftarrow{\Sigma} F_1 \qquad \{\emptyset, q_1\} \xleftarrow{\Sigma} F_2 \qquad \{\emptyset, q_1, q_2\} \xleftarrow{\Sigma} F_3 \qquad \cdots$$

Alphabet

Soit $\Sigma := \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k\}$ un alphabet de k symboles.

Ordre : (fixé)

$$a_1 <_\Sigma a_2 <_\Sigma \cdots <_\Sigma a_k.$$

Ordre $<_\nu$

Soit (Q_i) une $2m^k$-parking function sur $[n]$ et soit

$$\emptyset := q_0 <_q q_1 <_q q_2 <_q \cdots <_q q_n \,.$$

Ordre sur les fonctions $<_\nu$: pour tout facteur $F_i = (Q_j)$,

- $\nu : \Sigma \to \{q_0, \cdots, q_{i-1}\}$, où $\quad \exists a \quad$ tq $\quad \nu(a) = q_{i-1}$
- ordre lexicographique :

ν_j	ν_1	ν_2	ν_3	$\cdots$	$\nu_{i^k-(i-1)^k-1}$	$\nu_{i^k-(i-1)^k}$
$\nu_j(a_1)$	q_0	q_0	q_0		q_{i-1}	q_{i-1}
$\nu_j(a_2)$	q_0	q_0	q_0		q_{i-1}	q_{i-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\nu_j(a_{k-1})$	q_0	q_1	q_2		q_{i-1}	q_{i-1}
$\nu_j(a_k)$	q_{i-1}	q_{i-1}	q_{i-1}		q_{i-2}	q_{i-1}

Fonction de parking $\rightarrow$ Automate

Soit $\emptyset := q_0 <_q q_1 <_q \cdots <_q q_n$ l'ordre linéaire associé à (Q_h).

- (F_i) où $F_i = (Q_j)$ avec $2(i-1)^k < j \leqslant 2i^k$ et $i \in [n]$,
- pour tout F_i, on considère $(\nu_j^{(i)})$

États terminaux :

$$A := \bigcup_{h \text{ pair}} Q_h$$

Fonction de transition :

$$\delta : (q, a) \longmapsto \nu_j^{(i)}(a) \qquad \text{avec } q \in Q_{2(i^k+j)-1} \cup Q_{2(i^k+j)}$$

Fonction de parking → Automate (2)

Soit $\Sigma = \{a, b\}$.

Soit (Q_i) une $2m^2$-fonction de parking sur $[3]$.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} F_1 & & F_2 & & & & F_3 & & \end{array} \\
(Q_i) := & \left(\begin{array}{c||c|c|c||c|c|c|c|c}
2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right) \begin{array}{l} \notin A \\ \in A \end{array}
\end{array}$$

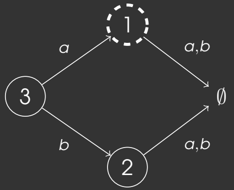
Fonction de transition :

$$\begin{array}{c|c||c|c|c||c|c|c|c|c}
a & \emptyset & \emptyset & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 1 & 1 & 1 \\
b & \emptyset & 2 & \emptyset & 2 & 1 & 1 & \emptyset & 2 & 1
\end{array}$$

Ordre linéaire : $\emptyset <_q 2 <_q 1 <_q 3$

Facteurs : (F_1, F_2, F_3)

États terminaux : $A := \{1\}$



Théorème

Bijection entre les *$2m^k$-fonctions de parking*
et
les *ADFA (non-initiaux)* sur un alphabet de k symboles.

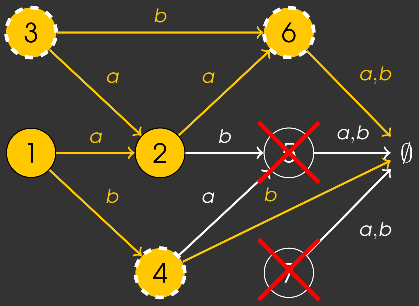
- Automates acycliques
- Fonctions de parking généralisées
- Bijection ADFA (non-initiaux)-fonctions de parking
- Automates minimaux
    - Co-accessibilité
    - Simplicité
    - Automate étendu
    - Conclusion

Co-accessibilité

Soit (A, δ) un ADFA (non-initial).

Co-accessible :

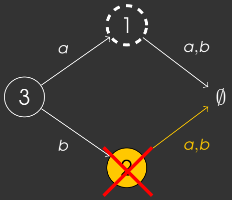
$$\forall q \in [n], \exists w \in \Sigma^*, \qquad \delta^*(q, w) \in A.$$



Oui mais. . .

$$(Q_i) := \left(\begin{array}{c||c|c|c||c|c|c|c|c} \cancel{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \begin{array}{l} \notin A \\ \in A \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c||c|c|c||c|c|c|c|c} a & \emptyset & \emptyset & 2 & 2 & \emptyset & 2 & 1 & 1 & 1 \\ b & \emptyset & 2 & \emptyset & 2 & 1 & 1 & \emptyset & 2 & 1 \end{array}$$



Co-accessibilité (2)

Soit (Q_i) une $2m^k$-fonction de parking.

Soit Θ l'ADFA (non-initial) associé.

Propriété : Soit q de $F_1 = (Q_1, Q_2)$, on a

$$\delta(q, a) = \emptyset \qquad \forall a \in \Sigma\,.$$

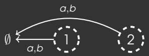
Conséquence : Si $Q_1 = \emptyset$ alors Θ est *coaccessible*.

Théorème :

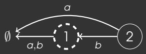
ADFA (n-i) co-accessibles $\simeq$ $2m^k - 1$-fonctions de parking

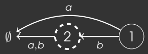
Co-accessibilité (3)

Les 13 $2m^2 - 1$-fonctions de parking sur $[2]$ et les ADFA coaccessibles

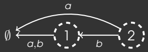
$(12||\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot) \to$ 

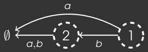
,

$(1||2|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot) \to$ 

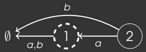
, 

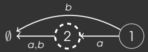
$\leftarrow (2||1|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot)$

$(1||\cdot|2|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot) \to$ 

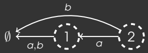
, 

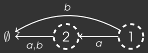
$\leftarrow (2||\cdot|1|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot)$

$(1||\cdot|\cdot|2|\cdot|\cdot|\cdot) \to$ 

, 

$\leftarrow (2||\cdot|\cdot|1|\cdot|\cdot|\cdot)$

$(1||\cdot|\cdot|\cdot|2|\cdot|\cdot) \to$ 

, 

$\leftarrow (2||\cdot|\cdot|\cdot|1|\cdot|\cdot)$

$(1||\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|2|\cdot) \to$ 

, 

$\leftarrow (2||\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|1|\cdot)$

$(1||\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|2) \to$ 

, 

$\leftarrow (2||\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|\cdot|1)$

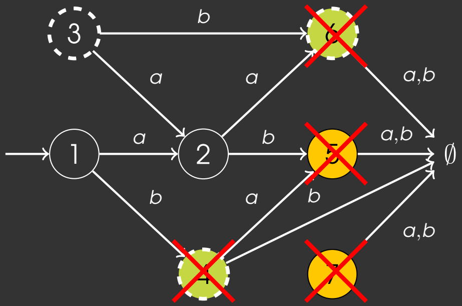
Simplicité

Soit (A, δ) un ADFA (non-initial).

Language droit :

$$L_q = \{\ w \in \Sigma^* \quad | \quad \delta^*(q, w) \in A\ \}$$

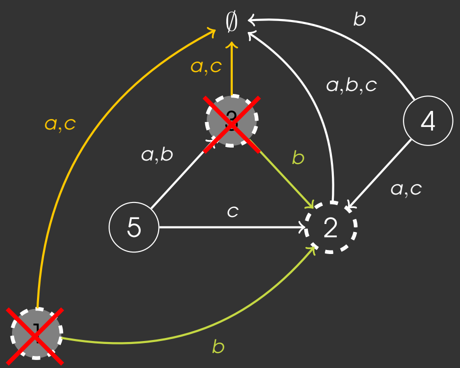
$\rightsquigarrow$ *Simple* : (A, Σ) est *simple* ssi $L_q \neq L_{q'}$ pour tous $q, q' \in [n]$ distincts.



Et l'aspect simple ?

$$(Q_i) \in \mathcal{F}_{2m^3-1}[5] \quad \textit{avec} \quad Q_1 = \{2\},\ Q_4 = \cancel{\{1,3\}},\ Q_8 = \{4\} \text{ et } Q_{110} = \{5\}$$

$$\downarrow$$



Simplicité (2)

Soit Θ ADFA (n-i) coaccessible associé à (Q_i).

Théorème :

$$\Theta \text{ simple} \quad \textit{ssi} \quad \#Q_i \leqslant 1\,, \qquad \forall i \in [n].$$

Propriété : Le nombre d'ADFA (n-i) coaccessible et simple

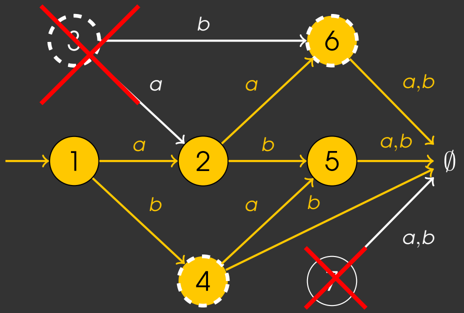
$$\mathcal{S}_k(n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, \mathcal{S}_k(n-i) \binom{2(n-i+1)^k - 1 - (n-i)}{i}$$

Accessibilité

Soit (i, A, δ) un ADFA.

<u>*Accessible*</u> :

$$\forall q \in [n]\,,\ \exists w \in \Sigma^*\,, \qquad \delta^*(i, w) = q\,.$$



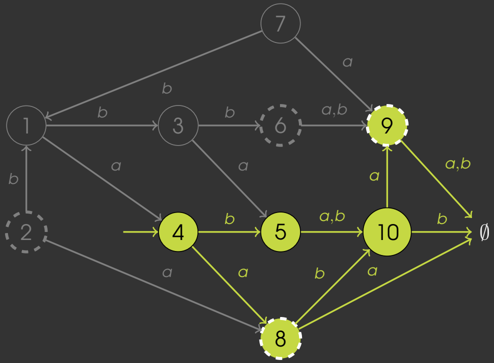
Minimalité

Automate minimal :

$$(i, A, \delta) \text{ minimal} \qquad \textit{ssi} \qquad \begin{cases} \text{accessible,} \\ \text{co-accessible,} \\ \text{simple.} \end{cases}$$

Accessibilité

Soit $\Theta := (A, \delta)$ (co-accessible et simple).

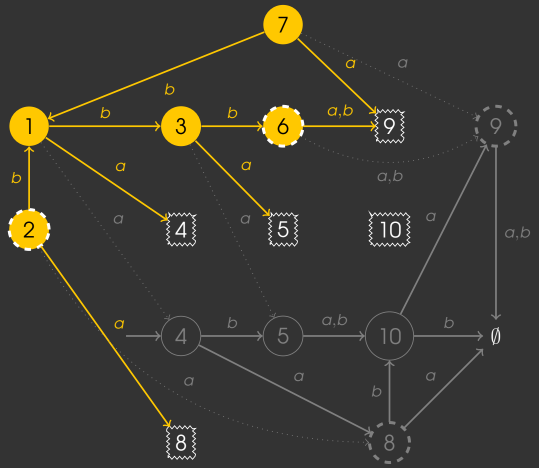


Partie accessible : $\Theta^{(4)}$

Propriété : si Θ *co-accessible* et *simple* alors $\Theta^{(q)}$ *minimal*.

Automate étendu

Complémentaire de $\Theta^{(4)}$: $\bar{\Theta}^{(4)}$



Automate étendu (2)

Un *automate étendu* à n états sur Σ : (A, T, δ)

- $A \subset [n]$ un ensemble états terminaux,
- T un ensemble d'(extra-)états absorbants,
- $\delta : [n] \times \Sigma \to [n] \cup \{\emptyset\} \cup T$ une fct° de transition étendue

telle que δ *acyclique*.

Liskovet (2003) :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_k(n,t) &= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \left(2(n-s+1+t)^k\right)^s \mathcal{T}_k(n-s,t) \\ &= \mathcal{P}(\chi, n) \end{aligned}$$

avec $\chi : m \mapsto 2(m+t)^k$.

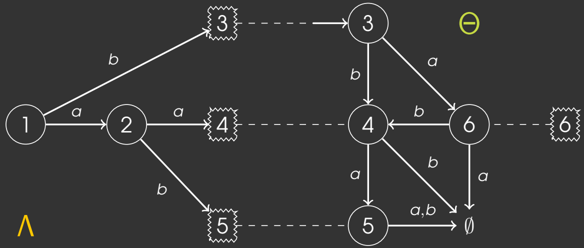
Automate étendu (3)

Soit $\Lambda := (A, T, \delta)$.

- *co-accessible* *ssi* $\exists \Theta$ *co-accessible* et $\exists q$ tq $\Lambda = \bar{\Theta}^{(q)}$
- *simple* *ssi* $\exists \Theta$ *simple* et $\exists q$ tq $\Lambda = \bar{\Theta}^{(q)}$

Greffe : Soient

- $\Lambda := (A, T, \zeta)$ un automate étendu *co-accessible* et *simple*,
- $\Theta := (i, A', \delta)$ un ADFA *minimal* où T est l'ensemble des états.



Automate étendu avec contraintes

Soient $\Lambda := (A, T, \delta)$ et $\Theta := (i, A', \zeta)$.

Greffe :

$$\begin{array}{r} \Lambda \text{ } \textit{co-accessible} \text{ et } \textit{simple}, \\ + \qquad\qquad \Theta \text{ minimal} \\ \hline \Lambda \cdot \Theta \text{ } \textit{co-accessible} \text{ et } \textit{simple} \text{ ?} \end{array}$$

Lemme :

$\Lambda \cdot \Theta$ est *co-accessible* et *simple*

ssi

si $\quad q \in A' \Leftrightarrow p \in A \quad$ *alors* $\quad \delta_q \neq \zeta_p$.

pour tout q de Λ et tout p de Θ.

Théorème S-1

Soit $\Theta = (i, A, \zeta)$ ADFA minimal.

Automates étendus avec contrainte Θ :

$$\mathcal{S}^{(\Theta)} = \{\ \Lambda \text{ } \textit{co-accessible} \text{ et } \textit{simple} \mid \Lambda \cdot \Theta \text{ } \textit{co-accessible} \text{ et } \textit{simple}\ \}$$

Formule d'énumération :

$$\mathcal{S}_k(n,t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, \mathcal{S}_k(n-i,t) \binom{2(n-i+1+t)^k - 1 - t - (n-i)}{i}$$

Théorème

$$n\,\mathcal{S}_k(n,0) = \sum_{t=1}^{n} \mathcal{S}_k(n,t)\,\mathcal{M}_k(t)$$

où

- $\mathcal{S}_k(n,t)$ le nombre d'ADFA étendu de n états, t extra-états et $t+1$ contraintes,
- $\mathcal{M}_k(t)$ le nombre d'ADFA minimaux de t états

et k le nombre de symbole de Σ.

Conclusion

Bijection explicite :

- $\mathcal{F}_{2m^k}$ $\longleftrightarrow$ ADFA (ni)
- $\mathcal{F}_{2m^k\text{-}1}$ $\longleftrightarrow$ ADFA (ni) *co-accessible*
- $\mathcal{F}_{2m^k\text{-}1}$ *simple* $\longleftrightarrow$ ADFA (ni) *co-accessible* et *simple*

Généralisable :

$\mathcal{F}_{2(m+t)^k\text{-}1\text{-}t}$ *simple* $\leftrightarrow$ ADFA *étendu co-accessible* et *simple* avec *contraintes*

Énumération : ADFA minimaux

$$n\,\mathcal{S}_k(n,0) = \sum_{t=1}^{n} \mathcal{S}_k(n,t)\,\mathcal{M}_k(t)$$