Un peu d'histoire ...

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. VII.

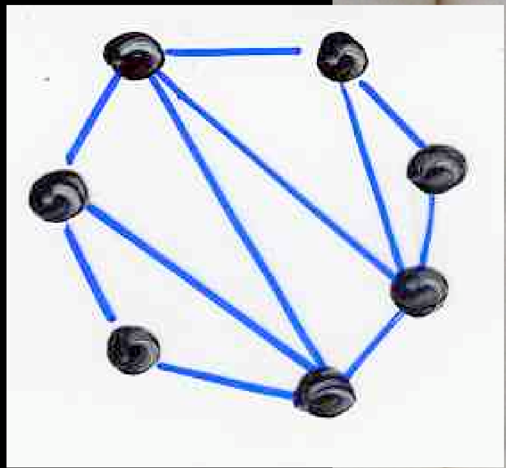
pro Annis MDCCLVIII. et MDCCLIX.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARUM
MDCCLXI.

CATHARINAE II.

AVGVSTAE

RVSSIARVM IMPERATRICI.



ENVMERATIO
MODORVM QVIBVS FIGVRAE PLANAE RECTILINEAE PER DIAGONALES DIVIDVNTVR IN TRIANGVLA.

Auctore

IOH. ANDR. DE SEGNER.

Triangulum per diagonalem in alia ſolui non poſſe, vtpote quod ex ſe ipſo vno tantum modo componitur, notum eſt: quadrilaterum autem ita diuidi duplicem in modum poſſe, mox apparet. Neque difficulter perſpicitur, modos, quibus quinque laterum figura per diagonales in triangula ſoluitur, quinque eſſe, quorum quilibet diſcrepat ab altero. Sex autem, vel plurium laterum figurae, quot modis ita ſoluantur enumerare difficilius eſt; eoque difficilius, quo plura, ſunt figurae latera. Soluitur autem hexagonum in triangula 14 modis diuerſis, heptagonum 42, ogdogonum 132, enneagonum 429; quos numeros mecum beneuolus communicauit ſummus *Eulerus*; modo, quo eos reperit, atque progreſſionis ordine, celatis. Vtrumque perſpiciendi cupido, poſt tentamina quaedam inania, eos numeros eliciendi methodus occurrit adeo ſimplex, vt in ea acquieſcendum mihi putauerim, quam hic proponam.

Triangulum prima ordine eſt figurarum planarum rectilinearum, quadrilaterum ſecunda, et ita deinceps, ſic

ſic vt index ordinis cuiuslibet reperiatur, a numero laterum figurae vel angulorum duabus vnitatibus ſubtractis. Ex quo ſequitur, quod neminem latet, biangulum, vel lineam rectam figuram non eſſe, vtpote cui index ordinis o reſpondet.

Problema.

Dato indice ordinis figurae planae rectilineae, n; datoque numero modorum, quo quaelibet eius generis figura alia, ordinis, cuius exponens numero n minor eſt, in triangula ſoluitur: reperire numerum modorum, quibus in triangula ſolui poteſt figura illa ordinis n.

Solutio.

Si figura, cuius ordinis index eſt o, in triangula ſolui poſſit modis a, figura autem ordinis 1, modis b, figura ordinis 2, modis c, et ita porro; figura autem ordinis, cuius index eſt $n-1$, modis q, figura ordinis $n-2$, modis p, reliqua; dicaturque numerus modorum quaeſitus, quo figura ordinis proxime ſequentis n in triangula ſoluitur, x: ſcriptis indicibus ab o ad $n-1$, ordine, atque ad quemlibet adſcripto diuiſionum numero, hunc in modum

0	1	2	.	.	$n-3$	$n-2$	$n-1$
a	b	c	.	.	o	p	q

erit numerus omnium indicum ita ſcriptorum, vel par, vel impar: prius quidem ſi $n-1$ impar fuerit, atque n par, poſterius ſi $n-1$ par fuerit, atque n impar. Si par ſit numerus indicum, fac $x = 2aq + 2bp + 2co$, et ita

ita porro, donec terminus intermedius nullus ſit reliquus. Sin autem numerus indicum ſit impar, iisdem factis, quia terminum intermedium vnum ſupereſſe neceſſe eſt, qui ſit d, huius quadratum factis adde, vt fiat: $x = 2aq + 2bp + 2co + \text{etc.} + dd$.

Ad indicem o eſt $a = 1$. Si enim linea recta concipiatur vt triangulum; figuram iſtam aliter atque aliter diſſolui non poſſe manifeſtum eſt, quia plures vna rectae inter duo puncta non cadunt. Hoc ſumpto, ſi et numerorum illuſtris *Euleri* quinque priores veri eſſe ponuntur, ſunt autem veri omnes, reperietur numerus modorum, quibus in triangula ſoluitur figura ordinis ſexti, ſiue ogdogonum, faciendo ſecundum ſchema adiectum

0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	5	14	42	84 + 28 + 20 132

$x = 2 \times 42 + 2 \times 14 + 2 \times 10$. Sique hinc porro pergere velis ad enneagonum, quae figura eſt ordinis ſeptimi, erit ex ſchemate producto,

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	5	14	42	132	264 + 84 + 56 + 25 429

$x = 2 \times 132 + 2 \times 42 + 2 \times 28 + 5 \times 5$.

 Atque

II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	VIIII	X	XI	XII
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	10	28	84	264	858	2860	9724
.	.	.	1	4	10	28	84	264	858	2860
.	.	.	.	.	4	20	56	168	528	1716
.	.	.	.	.	.	. .	25	140	420	1320
.	.	.	.	.	. .	. .	. .	. .	196	1176
1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

XIII	XIIII	XV	XVI	XVII
11	12	13	14	15
33592	117572	416024	1503800	5384880
9724	33592	117572	416024	1503800
5720	19448	77184	235144	832048
4290	14300	48620	167960	587860
3696	12012	39040	136136	470288
1764	11088	36036	120120	408408
. . . .	. . . . .	17424	113256	377520
. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . . .	184041
58786	208012	751900	2692440	9748845

XVIII	XVIIII	XX
16	17	
19497690	69016140	252827580
5384880	19497690	69016140
3007600	10769760	38995380
2080120	7519000	26924400
1646008	5824336	21053200
1410864	4938024	17473008
1283568	4434144	15519504
197340	4171596	14410968
. . . .	243100	13905320
34508070	126413790	469925500

METHO

VI.

Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales diuiduntur in triangula.

Auct. I. A. de Segner pag. 203.

Quando in Geometria area figurarum pluribus lateribus incluſarum definiri debet, eae per diagonales in triangula reſolui ſolent, quia tum cuiusque trianguli areae ex cognitis lateribus facile determinantur. Quo pluribus autem lateribus figura eſt praedita, eo pluribus modis eam hoc modo in triangula reſolui poſſe, vel leuiter attendenti ſtatim eſt manifeſtum. Ita cum in quadrilaterum duas diagonales ducere liceat, quadrilaterum duplici modo in bina triangula diuiditur. Pentagonum autem quintuplici modo, diagonalibus ducendis, in triangula reſolui poſſe reperitur, hexagonum vero 14 modis, et heptagonum 42 modis, octogonum 132 modis, enneagonum 429 modis etc. quae omnium modorum poſſibilium enumeratio, quo magis cum laterum numero eorum multitudo creſcit, eo fit difficilior et taedioſior. Quare quaeſtio omnino curioſa, et Geometrarum attentione digna videtur, qua lege iſti reſolutionum numeri pro laterum multitudine progrediantur, vt inde pro quouis polygono reſolutionum numerus rite definiri queat? Hinc Ill. Auctor modo prorſus ſingulari et ingenioſo legem progreſſionis horum numemerorum exponit, ac rigorose demonstrat, dum docet, quomodo pro quouis polygono resolutionum numerus, ex cognita resolutione polygonorum simpliciorum, quae paucioribus constant lateribus, colligi debeat. Hac ratione, si a simplicissimis incipiamus, hanc inuestigationem continuo ad polygona plurium laterum extendere licet, sicque Ill. Auctor sub finem tabellam adiecit, in qua istiusmodi resolutiones ad polygona 20 laterum vsque exhibet. Liceat autem nobis, a summo quodam Geometra, qui eandem hanc tabulam calculo subiecit, admonitis, obseruare, hanc tabulam, ob quendam calculi errorem, tantum vsque ad polygona 15 laterum esse iustam, quippe pro hoc polygono resolutionum numerus non est 751900, vt tabella habet, sed 742900, sequentes quoque numeri, dum forte nouus error irrepsit, primo ad 17 vsque latera nimis sunt magni, deinde vero nimis parui, dum pro 20 lateribus resolutionum numerus est 477638700. Facilius haec apparent, si ex lege primum obseruata, qua quilibet numerus ex omnibus praecedentibus colligitur, alia ad computum facilior eliciatur, cuius ope quilibet numerus ex solo praecedente definiatur. Ita si pro polygono n laterum numerus resolutionum sit P, pro polygono sequente $n+1$ laterum numerus resolutionum erit $\frac{4n-6}{n}$ P. Quin etiam hinc, sine consideratione praecedentium, statim indefinite pro polygono n laterum numerus resolutionum ita per factores exprimitur, vt sit:

$$\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{18}{6}\cdot\frac{22}{7}\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\frac{4n-10}{n-1}$$

vbi numeratores quaternario, denominatores vero vnitate crescunt. Hinc sequentem nouam tabulam, beneuole merorum exponit, ac rigorose demonstrat, dum docet, quomodo pro quouis polygono resolutionum numerus, ex cognita resolutione polygonorum simpliciorum, quae paucioribus constant lateribus, colligi debeat. Hac ratione, si a simplicissimis incipiamus, hanc inuestigationem continuo ad polygona plurium laterum extendere licet, sicque Ill. Auctor sub finem tabellam adiecit, in qua istiusmodi resolutiones ad polygona 20 laterum vsque exhibet. Liceat autem nobis, a summo quodam Geometra, qui eandem hanc tabulam calculo subiecit, admonitis, obseruare, hanc tabulam, ob quendam calculi errorem, tantum vsque ad polygona 15 laterum esse iustam, quippe pro hoc polygono resolutionum numerus non est 751900, vt tabella habet, sed 742900, sequentes quoque numeri, dum forte nouus error irrepsit, primo ad 17 vsque latera nimis sunt magni, deinde vero nimis parui, dum pro 20 lateribus resolutionum numerus est 477638700. Facilius haec apparent, si ex lege primum obseruata, qua quilibet numerus ex omnibus praecedentibus colligitur, alia ad computum facilior eliciatur, cuius ope quilibet numerus ex solo praecedente definiatur. Ita si pro polygono n laterum numerus resolutionum sit P, pro polygono sequente $n+1$ laterum numerus resolutionum erit $\frac{4n-6}{n}$ P. Quin etiam hinc, sine consideratione praecedentium, statim indefinite pro polygono n laterum numerus resolutionum ita per factores exprimitur, vt sit:

$$\frac{2}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{5}\cdot\frac{18}{6}\cdot\frac{22}{7}\cdot\ \ldots\ldots\ \frac{4n-10}{n-1}$$

vbi numeratores quaternario, denominatores vero vnitate crescunt. Hinc sequentem nouam tabulam, beneuole

vole nobiscum communicatam, adiungere e re visum est, quod Ill. Auctori huius schediasmatis non displiciturum esse speramus.

Num. laterum	numerus resolutionum.	num. laterum	numerus resolutionum.
III	1	XV	742900
IV	2	XVI	2674440
V	5	XVII	9694845
VI	14	XVIII	35357670
VII	42	XIX	129644790
VIII	132	XX	477638700
IX	429	XXI	1767263190
X	1430	XXII	6564120420
XI	4862	XXIII	24466267020
XII	16796	XXIV	91482563640
XIII	58786	XXV	343059613650.
XIV	208012		

VII.

Methodus simplex et vniuersalis omnes omnium aequationum radices detegendi.

$$2(2n+1)\,C_n = (n+2)\,C_{n+1}$$

Complures iam a Geometris excogitatae sunt methodi aequationum algebraicarum radices, vel accurate, vel proxime saltem, determinandi: omnes autem fere postulant, vt valores radicum, quae quaeruntur,

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Extrait d'une lettre de M. Lamé à M. Liouville sur cette question : *Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?* (*)

« La formule que vous m'avez communiquée hier, se déduit facilement de la comparaison de deux méthodes qui conduisent au même but.

» En effet, on peut, à l'aide de deux méthodes différentes, évaluer le nombre des décompositions en triangles d'un polygone : par la considération des côtés, ou par celle des sommets.

I.

» Soit ABCDEF... un polygone convexe de $n+1$ côtés, et soit désigné par le symbole P_k le nombre total des décompositions en triangles d'un polygone de k côtés. Un côté quelconque AB de ABCDEF... servira de base à un triangle, dans chacune des P_{n+1} décompositions de ce polygone, et ce triangle aura son sommet en C, ou D, ou E, ou F... ; au triangle CBA correspondront P_n décom-

(*) *Voyez* un Mémoire de Segner (*Novi Commentarii Acad. Petrop.*, t. VII, p. 203). L'auteur a trouvé l'équation (1) de M. Lamé ; mais la formule (3) offre une solution bien plus simple que la sienne. Cette formule (3) est due sans doute à Euler. Elle est indiquée sans démonstration à la page 14 du volume cité plus haut. L'identité des équations (1) et (3) n'est pas facile à établir. M. Terquem y étant parvenu à l'aide de quelques propriétés des factorielles, m'a proposé ce problème. Je l'ai communiqué ensuite à divers géomètres : aucun d'eux ne l'a résolu ; M. Lamé a été plus heureux : j'ignore si d'autres avaient obtenu avant lui une solution aussi élégante.

J. Liouville.

Réflexions sur le Problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales ;

PAR M. J. BINET,

Professeur au Collége de France, ancien Professeur à l'École Polytechnique, etc.

Cette question a été résolue par Euler, mais il n'a pas donné la démonstration de sa formule. On la trouve citée dans l'analyse sommaire d'un Mémoire de Segner, sur le même sujet, imprimé dans la collection de Saint-Pétersbourg, 1758 — 1759 : nous apprenons de Segner qu'Euler lui avait indiqué ce problème et qu'il lui avait en même temps communiqué les nombres de décompositions triangulaires des polygones de 4, 5, 6, 7, 8, 9 côtés : ces nombres sont 2, 5, 14, 42, 132, 429. Segner trouva une méthode pour passer successivement des polygones de moins de n côtés au polygone de n côtés, par une espèce d'échelle de dérivation que nous rapporterons ci-dessous. Il en déduisit une table étendue jusqu'aux polygones de 20 côtés : En comparant cette table à la sienne, Euler reconnut qu'à partir du polygone de 15 côtés, elle était défectueuse. C'est alors qu'il donna sa formule, et la table qu'il en avait déduite portée jusqu'aux polygones de 25 côtés. La formule résulte d'une équation à différences finies du premier ordre, beaucoup plus simple que l'échelle de dérivation de Segner. Ainsi la solution d'un même problème a conduit à deux formules analytiques distinctes : par quelle voie algébrique peut-on passer de l'une à l'autre? Nous avons appris de M. Terquem, dont le talent et l'érudition sont connus des géomètres, que ce problème d'analyse a vainement exercé des hommes habiles. Dans ces derniers temps, M. Lamé a démontré la

Sur le nombre de manières de décomposer un polygone en triangles au moyen de diagonales ;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

En désignant ce nombre par P_n pour un polygone de n côtés, on a

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n ,$$

formule que M. Lamé a démontrée dans le dernier cahier de ce Journal, et qui peut être établie plus directement comme il suit.

Le nombre des triangles qui entrent dans chaque figure de décomposition d'un polygone de n côtés, est $n-2$.

Celui des droites, diagonales ou côtés, qui joignent deux à deux les n sommets de chacune de ces figures de décomposition est $2n-3$. Le nombre total de ces droites pour les P_n figures sera donc $(2n-3)P_n$; et comme chacune de ces droites joint deux sommets, on comprend immédiatement que $\frac{4n-6}{n} P_n$ représente le nombre total des droites qui dans les P_n figures, vues ensemble, aboutissent à un sommet désigné du polygone donné.

Il est de plus évident que chacune de ces droites, dont le nombre est $\frac{4n-6}{n} P_n$, se trouve répétée autant de fois dans les P_n figures vues ensemble qu'il y a de décompositions possibles du polygone donné, *rapportées* à cette droite, côté ou diagonale; en sorte qu'on peut dire encore que $\frac{4n-6}{n} P_n$ exprime le nombre total des décompositions possibles d'un polygone de n côtés, opérées successivement par rapport à l'une et à l'autre des $n-1$ droites qui d'un sommet désigné, vont joindre les autres sommets du polygone.

J'entends ainsi qu'une décomposition s'opère *par rapport* à un côté ou une diagonale donnée, lorsque ce côté ou cette diagonale fait

Solution nouvelle de cette question : *Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales ?*

Par E. CATALAN. (*).

Soit ABCD...XYZA, un polygone convexe de $n+1$ côtés, et soit désigné par P_{n+1} le nombre total des décompositions de ce polygone.

Parmi ces décompositions, il y en a qui renferment le triangle ABC : leur nombre est P_n.

Il y en a qui renferment le triangle BCD : elles sont toutes distinctes des précédentes, et leur nombre est pareillement P_n.

A ces deux groupes, nous devons ajouter :

1°. Les décompositions du polygone de n côtés CEF...ZABC, dans lesquelles n'entre pas le triangle ABC; je désigne leur nombre par $P_{n,1}$;

2°. Les décompositions de DFG...ABCD, dans lesquelles n'entrent pas *les deux triangles consécutifs* ABC, BCD; je désigne leur nombre par $P_{n,2}$;

3°. Les décompositions de EGH...BCDE, dans lesquelles n'entrent pas *les trois triangles consécutifs* ABC, BCD, CDE; leur nombre est $P_{n,3}$;

. . . .

$(n-2)$°. Enfin, les décompositions du polygone de n côtés ZBCD...XYZ, dans lesquelles n'entrent pas *les $n-2$ triangles consécutifs* BCD, CDE,.... XYZ : leur nombre est $P_{n,n-2}$.

En réunissant ces décompositions, nous obtiendrons toutes celles

(*) Cette solution est trouvée depuis le mois de novembre dernier. Comme on en a de plus simples, je ne me serais pas décidé à la publier, si, par une coïncidence assez remarquable, M. Binet n'était arrivé, de son côté, à l'équation (A).

Note sur une Équation aux différences finies;

PAR E. CATALAN.

M. *Lamé* a démontré que l'équation

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + P_4P_{n-2} + P_3P_{n-1} + P_n, \quad (1)$$

se ramène à l'équation linéaire très simple,

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n. \quad (2)$$

Admettant donc la concordance de ces deux formules, je vais chercher à en déduire quelques conséquences.

I.

L'intégrale de l'équation (2) est

$$P_{n+1} = \frac{6}{3} \cdot \frac{10}{4} \cdot \frac{14}{5} \ldots \frac{4n-6}{n} P_3;$$

et comme, dans la question de géométrie qui conduit à ces deux équations, on a $P_3 = 1$, nous prendrons simplement

$$P_{n+1} = \frac{2.6.10.14\ldots(4n-6)}{2.3.4.5\ldots n}. \quad (3)$$

Le numérateur

$$2.6.10.14\ldots(4n-6) = 2^{n-1}.1.3.5.7\ldots(2n-3)$$
$$= \frac{2^{n-1}.1.2.3.4.5\ldots(2n-2)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)} = \frac{1.2.3.4\ldots(2n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Donc

$$P_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{2.3.4\ldots n}. \quad (4)$$

Addition à la note sur une équation aux différences finies, insérée dans le volume précédent, page 508.

PAR E. CATALAN (*).

VIII.

Si l'on désigne par $C_{2n,n}$ le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, prises n à n, on aura

$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \times C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \times C_{4,2} + \ldots + C_{2n,n} = 2^{2n}. \quad (30)$$

Pour démontrer ce théorème, je considère l'équation

$$P_n + P_{n-1}P_1 + P_{n-2}P_2 + \ldots + P_1P_{n-1} + P_n = a^n; \quad (31)$$

dans laquelle a est une constante donnée, et P_n une fonction inconnue du nombre entier n, assujettie seulement à cette condition, que $P_0 = 1$.

Conformément à la méthode très élégante employée par M. *Binet* dans un cas semblable (voyez page 82), je prends la *fonction génératrice* de P_n, savoir

$$Z = 1 + P_1z + P_2z^2 + \ldots + P_nz^n + \ldots, \quad (32)$$

z étant une indéterminée.

En élevant au carré, il vient en vertu de l'équation (31),

$$Z^2 = 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + \ldots + a^nz^n + \ldots. \quad (33)$$

Or, quel que soit a, on peut toujours supposer z assez petite, pour

(*) On continuera dans cette *Addition* l'ordre des n^{os} de la note citée.

CCLXI. — Sur les Nombres de Segner (*).

(*Août* 1886.)

XVIII. *Relation entre les Nombres de Segner et les Nombres de Catalan* (**).

Le petit Mémoire intitulé: *Sur un développement de l'intégrale elliptique, de première espèce* (***), contient les égalités suivantes:

$$\frac{P_n}{2^{n+2}} = (2n-1)^2 T_{n+1}^2 - 4\frac{n-1}{1}(2n-3)^2 T_n^2 + 4^2 \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}(2n-5)^2 T_{n-1}^2 - \cdots,$$

$$n^2 P_n - 8(3n^2 - 3n + 1) P_{n-1} + 128(n-1)^2 P_{n-2} = 0 \text{ (iv)}.$$

On en conclut, évidemment, une *équation du premier degré, entre les carrés des Nombres de Segner*. Elle parait devoir être fort compliquée.

XIX. *Propriétés nouvelles* (v). — 1° *Soit* i *le nombre des termes impairs compris dans la suite :*

$$\left(\frac{n-2}{1}\right),\quad \left(\frac{n-2}{2}\right),\quad \left(\frac{n-2}{4}\right),\quad \left(\frac{n-2}{8}\right),\ \ldots;$$

selon que n *est pair ou impair*, T_n *est ou n'est pas divisible par* 2^i (vi).

(*) Complément à la *Note* CVII. (Congrès de Nancy.)

(**) M. l'Amiral de Jonquières m'a fait l'honneur de proposer cette dénomination, qui n'a point prévalu. Je l'emploie pour abréger.

(***) *Académie de Belgique*, 10 octobre 1885.

(iv) Les nombres *entiers* $P_1, P_2, P_3, \ldots$, que M. de Jonquières a bien voulu calculer, ont les valeurs suivantes :

$$P_1 = 8,\quad P_2 = 80,\quad P_3 = 896,\quad P_4 = 10\,816,\ \ldots$$

(v) Addition au paragraphe XVII.

(vi) Cette proposition résulte de l'égalité

$$n T_{n+1} = C_{2n-2,\,n-1}, \tag{7}$$

DU CALCUL

DES

DÉRIVATIONS;

PAR L. F. A. ARBOGAST,

De l'Institut national de France, Professeur de Mathématiques à Strasbourg.

A STRASBOURG,

DE L'IMPRIMERIE DE LEVRAULT, FRÈRES.

AN VIII (1800).

Donc on a enfin $$A_{m,n} = \qquad \ldots\ldots(3)$$
$$\pm \beta'^{-m}\{A_{0,n}.\gamma'^m + A_{0,n+1}.m\gamma'^{m-1}\beta + A_{0,n-2}.\frac{m.m-1}{1.\ 2}\gamma'^{m-2}\beta^2$$
$$+ \text{etc.} + A_{0,n+m-1}.m\gamma'\beta^{m-1} + A_{0,n+m}.\beta^m\},$$
le signe supérieur ou inférieur ayant lieu suivant que m est pair ou impair. Ce résultat s'accorde avec celui que l'on peut déduire d'une solution différente du même exemple, donnée par LAPLACE dans les mémoires de Paris, année 1779, n.° XVII, page 267.

Si l'on fait n négatif dans la formule (1) ci-dessus, on trouve, en rejetant les termes et celles de leurs parties où les indices de D sont négatifs et ceux de D′ négatifs ou positifs > 0, que cette formule se réduit à la suivante:
$$A_{m,-n} = \qquad \ldots\ldots(4)$$
$$\pm \beta'\{A_{0,0}\mathrm{D}^m_{\beta}.(\alpha^n.\beta'^{-n-1}) - A_{0,1}\mathrm{D}^m_{\beta}.(\alpha^{n+1}.\beta'^{-n-2}) + A_{0,2}\mathrm{D}^m_{\beta}.(\alpha^{n+2}.\beta'^{-n-3}) - \text{etc.}\}$$
laquelle, à cause que $\alpha = 0$ et que sa seule dérivée D est β, devient
$$A_{m,-n} = \qquad \ldots\ldots(5)$$
$$\pm \beta'\{A_{0,0}.\beta^n\mathrm{D}^{m-n}_{\beta}.\beta'^{-n-1} - A_{0,1}.\beta^{n+1}\mathrm{D}^{m-n-1}_{\beta}.\beta'^{-n-2} + A_{0,2}.\beta^{n+2}\mathrm{D}^{m-n-2}_{\beta}.\beta'^{-n-3} - \text{etc.}\}.$$
D'où il suit que $A_{m,-n}$ n'est zéro qu'autant que m est $< n$. Ainsi la série récurrente s'étend, sous forme de triangle, dans la quatrième région.

EXEMPLE VI.

246. Étant donné le commencement de la table suivante, où chaque terme est formé de la somme de celui qui le précède dans la même ligne horizontale et de celui qui le suit d'un rang dans la ligne horizontale immédiatement supérieure, avec la condition que chacun des termes de la première ligne horizontale soit égal à l'unité : on demande le terme général de cette table:

1	1	1	1	1	etc.
1	2	3	4	5	etc.
2	5	9	14	20	etc.
5	14	28	48	75	etc.
14	42	90	165	275	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

L'équation de relation est $A_{m,n} = A_{m-1,n} + A_{m+1,n-1}$; j'y mets $m - 1$ au lieu de m, et elle devient