UN MONOIDE DE TABLEAUX PROVENANT DE LA PHYSIQUE QUANTIQUE.

Arthur Randrianarivony [*],
Gérard H. E. Duchamp [†] , Vlady Ravelomanana [‡], Karol A. Penson [§]

21-07-2008 12:39

Résumé

This paper presents the construction ....

* ??

† LIPN UMR CNRS 7030 Université de Paris XIII, F-93430, France – e-mail: ghed@lipn.univ-paris13.fr

‡ LIPN (IBP, CNRS), UMR CNRS 7030 Université de Paris XIII, F-93430, France – e-mail: vlad@lipn.univ-paris13.fr

§ LPTHE (CNRS), UMR CNRS ?? Université de Paris VI, F-??, France – e-mail: penson@liptl.jussieu.univ-paris6.fr

Table des matières

1 Introduction

Le monoïde présnté ici et les statistiques que l'on y définit ont pour origine la Physique Quantique. En 1999, Bender, Brody et Meister [3] ont introduit une "Théorie Quantique des Partitions" (d'ensembles) basée sur une formule du produit

$$F(x\frac{d}{dy})G(y)\Big|_{y=0} \tag{1}$$

qui conduit à coupler deux fonctions génératrices exponentielles par un produit de Hadamard adapté.

Soit S, un semigroupe, on définit, sur $k\langle S\rangle$ une loi $\uparrow$ par $w\uparrow 1 = 1\uparrow w = w$ et

$$a.u \uparrow b.v = a.(u\uparrow b.v) + q_c^{|u||b|} q_s^{|a||b|}(ab).(u\uparrow v) + q_c^{|au||b|} b.(au\uparrow v) \tag{2}$$

on va montrer que cette loi est déterminée par

- un monoïde d'actions (permutations compositions) sur les mots qui joue un rôle similaire à celui du groupe symétrique pour le shuffle et le q-shuffle
- une statistique sur les mots, indexée à des éléments de ce monoïde, qui fournit un associateur

`... partie d'Arthur`

Soit $[a]$ un tableau à $|a| = n$ places, on lui associe la suite des entrées trouvées par lecture de bas en haut puis de gauche à droite, ceci fournit une fonction de lecture $\lambda_{[a]} : [1..n] \mapsto alph([a])$. Pour I,J deux intervalles de $\mathbb{N}^*$, I précédent strictement J ($sup(I) < inf(J)$), on définit la classe de tableaux $ish(I,J)$ comme les tableaux tels que

a) les colonnes sont de hauteur au plus 2 et croissantes
b) les restrictions de la fonction de lecture

$$\lambda_{[a]}^{-1}(I) \mapsto I \ ;\ \lambda_{[a]}^{-1}(J) \mapsto J \tag{3}$$

sont croissantes

Remarque 1.1 *Si $I = [r..s]$ (resp. $J = [r..s]$) et que $J = \emptyset$ (resp. $I = \emptyset$), $ish(I,J)$ est constitué du seul tableau $[r..s]$.*

On considère maintenant que le semigroupe S est gradué sur $\mathbb{N}^*$ par une application $\pi : S \mapsto \mathbb{N}^*$ (on peut, dans une première lecture, considérer que $S = A^+$ et que π est donnée par une fonction de poids sur les lettres).

Théorème 1.2 *On définit alors la statistique $Q([a],w)$ sur les mots w tels que $|w| \geq sup(alph([a]))$ par*

$$Q([a],w) = \Pi_{c\in[a]\ ;\ c=\left[\substack{s\\r}\right]}\ q_s^{\pi(w[r])\times\pi(w[s])}\ \Pi_{j<i\ ;\ \lambda_{[a]}(j)\in J\ ;\ \lambda_{[a]}(i)\in I}\ q_c^{\pi(w[\lambda_{[a]}(i)])\times\pi(w[\lambda_{[a]}(j)])} \tag{4}$$

alors, pour $w_1,\ w_2 \in S$, $|w_1| = p\ ;\ |w_2| = q$, on a

$$w_1 \uparrow w_2 = \sum_{[a]\in ish([1..p],[p+1..p+q])} Q([a],w_1w_2)\ [a].w_1w_2 \tag{5}$$

Preuve — Soit $\top$ la loi définie par le membre de droite. Pour montrer l'égalité, il suffit de démontrer que $\top$ vérifie la récursion qui définit $\uparrow$ ce qui se fait par inspection de la statistique Q. $\square$

Références

[1] Abe E., *Hopf Algebras*, Cambridge University Press (2004).

[2] Bayen (F.), Flato (M.), Fronsdal (C.), Lichnerowicz (A.) and Sternheimer (D.), *Deformation and Quantization*, Ann. of Phys. 111 (1978), pp. 61-151.

[3] Bender C.M., Brody D.C. and Meister, *Quantum field theory of partitions*, J. Math. Phys. Vol 40 (1999)

[4] J. Berstel, C. Reutenauer, *Rational series and their languages EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*, Springer (1988).

[5] P. Blasiak, A. Horzela, K. A. Penson, G. H. E. Duchamp, A.I. Solomon, *Boson normal ordering via substitutions and Sheffer-Type Polynomials*, Phys. Lett. A **338** (2005) 108

[6] Bourbaki N., *Theory of sets*, Springer (2004)

[7] Bourbaki N., *Algebra, chapter 1-III*, Springer

[8] Bourbaki N., *Algebra, chapter VI*, Springer

[9] Bourbaki N., *Topological Vector Spaces*, Springer

[10] Bourbaki N., *Integration I*, Springer

[11] P. Cartier, *A primer of Hopf algebras*, Septembre (2006), IHES preprint IHES/M/06/40.

[12] Pierre Cartier, Dominique Foata, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, 1969, Springer-Verlag
Free electronic version available at
http://www-irma.u-strasbg.fr/ foata/paper/pub11.html

[13] V. Chari, A. Pressley, A guide to quantum groups. Cambridge (1994).

[14] G. H. E. Duchamp, P. Blasiak, A. Horzela, K. A. Penson, A. I. Solomon, *Feynman graphs and related Hopf algebras*, Journal of Physics: Conference Series, SSPCM'05, Myczkowce, Poland. arXiv : cs.SC/0510041

[15] Duchamp G., Flouret M., Laugerotte E., Luque J-G., *Direct and dual laws for automata with multiplicities*
`arXiv` : math.CO0607412

[16] Duchamp G., Luque J-G., *Free partially commutative structures*, Journal of Algebra 156, (2) (1993) 318-361

[17] Duchamp G., Luque J-G., *Congruences Compatible with the Shuffle Product*
`arXiv` : math.CO0607419

[18] G. Duchamp, F. Hivert, J. Y. Thibon, *Non commutative functions VI: Free quasi-symmetric functions and related algebras*, International Journal of Algebra and Computation Vol 12, No 5 (2002).

[19] G. Duchamp, A.I. Solomon, K.A. Penson, A. Horzela and P. B lasiak, *One-parameter groups and combinatorial physics*, Proceedings of the Symposium Third International Workshop on Contemporary Problems in Mathematical Physics (COPROMAPH3) (Porto-Novo, Benin, Nov. 2003), J. Govaerts, M. N. Hounkonnou and A. Z. Msezane (eds.), p.436 (World Scientific Publishing 2004)
arXiv: `quant-ph/04011262`

[20] G. H. E. Duchamp, A. I. Solomon, P. Blasiak, A. Horzela and K. A. Penson, *A multipurpose Hopf deformation of the algebra of Feynman-like diagrams*, Proceedings of the 26th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, New York 2006, Editor: S. Catto (2007).

[21] G. H. E. Duchamp (LIPN), P. Blasiak, A. Horzela, K. A. Penson (LPTMC), A. I. Solomon, *A Three Parameter Hopf Deformation of the Algebra of Feynman-like Diagrams*, `arXiv:0704.2522`, Subject: Mathematical Physics (math-ph).

[22] G. H. E. Duchamp, C. Tollu, *Sweedler's duals and Schützenberger's calculus* `arXiv:0712.0125` (to be published).

[23] L. Foissy, *Isomorphisme entre l'algèbre des fonctions quasi-symétriques libres et une algèbre de Hopf des arbres enracinés décorés plans*, personal communication.

[24] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés decorés*, PhD Memoir, Reims University (2002).

[25] G. W. Ford and G. E. Uhlenbeck, Proc. Nat. Acad. 42, 122,1956.

[26] M. Hazewinkel, Hopf algebras of endomorphisms of Hopf algebras, (Oct 2004) `ArXiv : math.QA/0410364`

[27] M. E. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. (2000), 49-68

[28] D. Kreimer, *Knots and Feynman Diagrams*, Cambridge Lecture Notes in Physics (2000).

[29] P. Ochsenschläger, *Binomialkoeffitzenten und Shuffle-Zahlen*, Technischer Bericht, Fachbereich Informatik, T. H. Darmstadt,1981.

[30] Reutenauer C., *Free Lie algebras*, Oxford University Press (1993).

[31] A. I. Solomon, G. Duchamp, P. Blasiak, A. Horzela and K. A. Penson, *Hopf algebra structure of a model quantum field theory*, Proceedings of the 26th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, New York 2006, Editor: S. Catto (2007).

[32] A. I. Solomon, *Thermalization of squeezed states*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. 7 (2005) doi:10.1088/1464-4266/7/12/015.

[33] G.X. Viennot, *Heaps of pieces, I: Basic definitions and combinatorial lemmas.* In Labelle and Leroux, editors, Combinatoire Énumérative, number 1234 in Lect. Notes in Math., pages 321–350. Springer, 1986.