

Un critère de rationalité provenant de la géométrie non commutative

- À LA MÉMOIRE DE SCHÜTZENBERGER -

Gérard DUCHAMP* et Christophe REUTENAUER†

Abstract

We prove a conjecture of A. Connes, which gives a rationality criterion for elements of the closure of $\mathbb{C}\Gamma$ (Γ a free group) in the space of bounded operators in $l^2(\Gamma)$. We show that this criterion applies also to the ring of Malcev-Neumann series on Γ .

Publié dans *Inventiones Mathematicae*, **128** (1997)

1 Introduction

Soit X un alphabet et Γ , le groupe librement engendré par X . Pour une fonction à valeurs complexes quelconque $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, on définit $\|f\|_2 = \sum_{g \in \Gamma} |f(g)|^2 \in [0, \infty]$ et $l^2(\Gamma) = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \text{ t.q. } \|f\|_2 < \infty\}$ muni de la base $(\epsilon_g)_{g \in \Gamma}$ et de la structure hilbertiennes habituelle.

Dans son livre "Noncommutative Geometry" [5], A. CONNES construit plusieurs sous-algèbres de $End(l^2(\Gamma))$.

D'abord $l^2(\Gamma)$ se plonge dans $End(l^2(\Gamma))$ par la représentation régulière gauche (par convolution), et les éléments de $\mathbb{C}\Gamma$ définissent des opérateurs bornés, i.e. dans $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ (car la représentation de Γ est unitaire). Ceci permet de définir la C^* algèbre réduite $C_r^*(\Gamma)$ qui est l'adhérence de $\mathbb{C}\Gamma$ dans $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ muni de la norme de la convergence bornée.

Ensuite (p 342), il définit une clôture de $\mathbb{C}\Gamma \subset C_r^*(\Gamma)$ par adjonction de coefficients d'inverses de matrices. Nous en rappelons la construction ci-dessous.

Soit $(C_r^*(\Gamma))_n$ la plus petite sous-algèbre $\mathcal{B} \subset C_r^*(\Gamma)$ telle que $\Gamma \subset \mathcal{B}$ et que

$$x \in M_n(\mathcal{B}) \cap [M_n(C_r^*(\Gamma))]^{-1} \implies x \in [M_n(\mathcal{B})]^{-1}$$

On a évidemment

$$(C_r^*(\Gamma))_1 \subset (C_r^*(\Gamma))_2 \subset \dots \subset (C_r^*(\Gamma))_n \subset \dots$$

la clôture annoncée est $(C_r^*(\Gamma))^\sim = \cup_{n \geq 1} (C_r^*(\Gamma))_n$.

*LIFAR, Université de Rouen, Place Emile Blondel, B.P. 118, 76134 Mont-Saint-Aignan Cedex, France. Soutenu par le GDR AMI.

†Mathématiques, Université du Québec à Montréal C.P. 8888, Succ. Centre-Ville Montréal Qc Canada H3C 3P8. L'auteur a bénéficié d'une subvention CRSNG (Canada) et de l'hospitalité de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg).

Enfin (au paragraphe IV.5) est défini un module de FREDHOLM (pour la définition exacte voir le paragraphe 2.2) qui conduit à la caractérisation d'une sous-algèbre $(C_r^*(\Gamma))_{fin} \subset C_r^*(\Gamma)$ par une condition de finitude de rang.

A. CONNES remarque que $(C_r^*(\Gamma))^{\sim} \subset (C_r^*(\Gamma))_{fin}$ et conjecture l'inclusion inverse (p342 remarque 3).

Dans ce qui suit nous démontrons que $(C_r^*(\Gamma))^{\sim} = (C_r^*(\Gamma))_1$, ce qui entraîne la conjecture et l'égalité de tous les $(C_r^*(\Gamma))_n$.

En fait, la condition de finitude qui sert à définir $(C_r^*(\Gamma))_{fin}$ étant algébrique, nous l'examinons d'abord, dans la première partie, pour le cas d'un corps quelconque (les fonctions l^2 étant remplacées par *toutes* les fonctions). Nous montrons qu'elle constitue une variante (pour les séries de mots réduits du groupe libre) d'un critère de rationalité bien connu pour les séries formelles de mots dans le monoïde libre. Dans une deuxième partie nous montrons la convergence des solutions obtenues pour la construction d'origine; la démonstration utilise une forme normale pour les séries rationnelles non commutatives, i.e. la représentation minimale de SCHÜTZENBERGER et FLIESS, qui étend la notion d'automate minimal d'un langage formel. Ceci montre que les séries solution sont dans $(C_r^*(\Gamma))^{\sim}$. L'argument qui permet ensuite de passer de $(C_r^*(\Gamma))^{\sim}$ à $(C_r^*(\Gamma))_1$ est que, au voisinage de l'unité, l'inverse d'une matrice à coefficients dans une algèbre de BANACH est une fonction rationnelle (non commutative) de ses coefficients. On utilise pour cela une formule d'inversion des matrices non commutatives qui apparaît naturellement lorsque l'on résout des systèmes linéaires sur un corps gauche [11, 15] (ces formules ont servi de point de départ à la théorie moderne des quasi-déterminants [9, 10]).

Enfin, en troisième partie, nous montrons que le critère de CONNES ci-dessous s'applique aux séries de MALCEV-NEUMANN rationnelles et donc caractérise, selon [13] les éléments du corps libre [6].

REMERCIEMENTS — Nous remercions I.M. GELFAND grâce à qui ce problème a été signalé aux auteurs.

2 Séries rationnelles

2.1 Généralités

Nous rappelons ci-dessous les résultats sur les séries rationnelles dont nous aurons besoin dans la suite. Ils seront exposés sans leurs démonstrations que l'on peut toutes trouver, par exemple dans [2].

Soit \mathbb{A} un alphabet, on rappelle que le *monoïde librement engendré par* \mathbb{A} (noté \mathbb{A}^*) est l'ensemble des suites finies (ou *mots*)

$$w = a_1 a_2 \cdots a_n, \quad a_i \in \mathbb{A}$$

L'entier n est la *longueur* de w et est noté $|w|$. La loi de composition du monoïde \mathbb{A}^* est la *concaténation*. Pour $u = a_1 a_2 \cdots a_p$, $v = b_1 b_2 \cdots b_q$ on a $uv = a_1 a_2 \cdots a_p b_1 b_2 \cdots b_q$. L'élément neutre $1_{\mathbb{A}^*}$ est l'unique mot de longueur 0 (i.e. la suite vide).

Soit k un anneau commutatif et $k^{\mathbb{A}^*}$ (resp. $k^{(\mathbb{A}^*)}$) l'ensemble des fonctions (resp. des fonctions à support fini) $\mathbb{A}^* \rightarrow k$ muni de leurs structures de k -module usuelles. La forme linéaire sur $k^{\mathbb{A}^*} \otimes_k k^{(\mathbb{A}^*)}$ définie par

$$(f, g) := \sum_{w \in \mathbb{A}^*} f(w)g(w)$$

permet d'identifier le module $k^{\mathbb{A}^*}$ au dual $\text{Hom}_k(k^{\mathbb{A}^*}, k)$.

La topologie de $k^{\mathbb{A}^*}$ est celle de la convergence simple (k étant muni de la topologie discrète). Pour tout $S \in k^{\mathbb{A}^*}$ la famille $((S, w)w)_{w \in \mathbb{A}^*}$ est sommable et de somme S , ce qui justifie la notation sommatoire

$$S = \sum_{w \in \mathbb{A}^*} (S, w)w \quad (1)$$

La notation fonctionnelle est bien adaptée au produit de HADAMARD (ou ponctuel) $f \odot g : w \rightarrow f(w)g(w)$. La notation sommatoire (1) convient au produit de CAUCHY (ou de convolution). Ici, toutes les fonctions sont convolables, c'est à dire que pour tout $S, T \in k^{\mathbb{A}^*}$, la série

$$ST = \sum_{w \in \mathbb{A}^*} \left(\sum_{uv=w} (S, u)(T, v) \right) w$$

est bien définie. Ce produit permet de munir $k^{\mathbb{A}^*}$ d'une structure de k -algèbre associative avec unité que l'on notera $k \ll \mathbb{A} \gg$ et qui s'appelle l'algèbre des *séries formelles non commutatives* (sur l'alphabet \mathbb{A} et à coefficients dans k).

Les éléments de $k^{\mathbb{A}^*}$ s'appellent des *polynômes non commutatifs* (sur l'alphabet \mathbb{A} et à coefficients dans k), ils forment une sous-algèbre de $k^{\mathbb{A}^*}$, notée $k \langle \mathbb{A} \rangle$, qui n'est autre que l'algèbre du monoïde \mathbb{A}^* . Les représentations régulières gauches et droites font de $k \langle \mathbb{A} \rangle$ un $k \langle \mathbb{A} \rangle - k \langle \mathbb{A} \rangle$ bimodule. Son dual $k \ll \mathbb{A} \gg$ est donc aussi un $k \langle \mathbb{A} \rangle - k \langle \mathbb{A} \rangle$ bimodule dont les actions seront notées "o". Explicitement, pour $(P, Q, S) \in k \langle \mathbb{A} \rangle \times k \langle \mathbb{A} \rangle \times k \ll \mathbb{A} \gg$ on a la formule

$$(P \circ S \circ Q, w) := (S, QwP)$$

La série $P \circ S \circ Q$ sera appelée une *décalée* de S .

Certaines séries vérifient des *réurrences linéaires* i.e. leurs coefficients peuvent être calculés par une *représentation linéaire*. On appelle ainsi la donnée d'un triplet (λ, μ, γ) où $\lambda \in k^{1 \times n}$, $\mu : \mathbb{A}^* \rightarrow M_n(k)$ (morphisme de monoïdes multiplicatifs) et $\gamma \in k^{n \times 1}$ tel que

$$(\forall w \in \mathbb{A}^*)((S, w) = \lambda \mu(w) \gamma)$$

Ces séries sont dites *reconnaissables* ou *rationnelles*. Pour justifier le deuxième attribut et énoncer le théorème principal de cette section nous rappelons la définition de la *clôture rationnelle*.

Définition 1 Soit \mathcal{A} une algèbre et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. La *clôture rationnelle* de \mathcal{B} est la plus petite sous-algèbre contenant \mathcal{B} et stable par passage à l'inverse.

Théorème 2 Soit $S \in k \ll \mathbb{A} \gg$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- i) La série S appartient à un sous module de type fini du $k \langle \mathbb{A} \rangle$ -module à gauche $k \ll \mathbb{A} \gg$.
- ii) La série S appartient à un sous module de type fini du $k \langle \mathbb{A} \rangle$ -module à droite $k \ll \mathbb{A} \gg$.
- iii) La série S est reconnaissable.
- iv) La série S est dans la clôture rationnelle de $k \langle \mathbb{A} \rangle$.

Remarque 1 *i) Les séries reconnaissables ne sont autres que les fonctions représentatives sur \mathbb{A}^* [1, 4].*

ii) La caractérisation (i-ii) sous la forme de sous-module de type fini est essentiellement due à FLIESS [8] et à JACOB [12].

iii) L'équivalence de (iii) et de (iv) est due à SCHÜTZENBERGER [16].

iv) La théorie ci-dessus s'étend mutatis mutandis aux semi-anneaux. Par exemple l'équivalence de (iii) et des autres propriétés, qui est centrale en théorie des langages puisqu'elle donne le théorème de KLEENE, est la spécialisation du théorème 2 au semi-anneau de BOOLE.

Soit S admettant la représentation linéaire (λ, μ, γ) . Formons la matrice $M := \sum_{x \in \mathbb{A}} \mu(x)x$. Alors $\sum_{|w|=n} (S, w)w = \lambda M^n \gamma$ et donc

$$S = \lambda \left(\sum_{n \geq 0} M^n \right) \gamma = \lambda (1 - M)^{-1} \gamma$$

puisque $(M^n)_{n \geq 0}$ est sommable dans $M_n(k \ll \mathbb{A} \gg) \simeq M_n(k) \ll \mathbb{A} \gg$.

On a aussi le théorème suivant

Théorème 3 [17] *Le produit de HADAMARD de deux séries rationnelles est rationnel.*

Les représentations linéaires (λ, μ, γ) d'une série S telles que n soit minimum sont appelés *représentations minimales*. Lorsque k est un corps commutatif elles sont conjuguées entre elles. Dans de telles représentations, on peut exprimer les coefficients matriciels de $\mu(w)$ par des décalées de S .

Théorème 4 [8, 16] *Soit k un corps commutatif et (λ, μ, γ) une représentation réduite de dimension n de $S \in k \ll \mathbb{A} \gg$. Alors il existe des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ tels que, pour tout $w \in \mathbb{A}^*$*

$$\mu(w) = ((S, P_i w Q_j))_{1 \leq i, j \leq n} = ((Q_j \circ S \circ P_i, w))_{1 \leq i, j \leq n}$$

2.2 Un critère de rationalité pour les séries de mots réduits

Soit \bar{X} , une copie disjointe de X . On considère le morphisme de monoïdes $s : (X \cup \bar{X})^* \rightarrow \Gamma$ défini par $s(x) = x$ et $s(\bar{x}) = x^{-1}$, c'est une surjection qui permet de définir la fonction longueur $l(g) = \inf\{|w| \mid s(w) = g\}$. Il est bien connu que ce minimum est atteint une fois et que l'ensemble des minima est exactement celui des mots sans facteur $x\bar{x}$ (dans la suite nous convenons que $\bar{\bar{x}} = x$), que nous appellerons *réduits*. Notons $m = \Gamma \rightarrow (X \cup \bar{X})^*$, l'application qui, à chaque élément de Γ , fait correspondre son unique représentant réduit (l'image de m sera notée $red(X)$). C'est une section de s .

La construction qui suit est l'analogie algébrique de celle donnée en [5]. Nous la donnons complètement ci-dessous.

Pour tout $g \in \Gamma - \{1\}$, $m(g) = ux$ avec $u \in (X \cup \bar{X})^*$, $x \in X \cup \bar{X}$ uniques; $\phi(g) = s(u)$ est le *premier pas vers l'origine*. Les arêtes du graphe de CAYLEY (non orienté) de Γ sont les paires $\{g, gx\}$ avec $x \in X \cup \bar{X}$ et $l(gx) = l(g) + 1$, leur ensemble sera noté $\Gamma^{(1)}$.

Soit k un corps commutatif, nous construisons les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+ &= k^{(\Gamma)}, \quad \mathcal{H}^- = k^{(\Gamma^{(1)})} \oplus k, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- \\ \bar{\mathcal{H}}^+ &= k^\Gamma, \quad \bar{\mathcal{H}}^- = k^{\Gamma^{(1)}} \oplus k, \quad \bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}^+ \oplus \bar{\mathcal{H}}^- \end{aligned}$$

Soit $P : \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$, l'application bijective définie par

$$P\epsilon_1 = 1_k; P\epsilon_g = \{\epsilon_{\phi(g)}, \epsilon_g\} \text{ pour } g \in \Gamma - \{1\}$$

On définit une application involutive sur \mathcal{H} et $\bar{\mathcal{H}}$ par

$$F = \begin{pmatrix} 0 & P^{-1} \\ P & 0 \end{pmatrix}.$$

Les séries $a = \sum_{h \in \Gamma} \alpha_h h \in k^\Gamma$ peuvent être vues comme des applications $\mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$ de la façon suivante

$$a\{g, gx\} = \sum_{h \in \Gamma} \alpha_h \{hg, hgx\}, \quad a1_k = 0, \quad ag = \sum_{h \in \Gamma} \alpha_h hg$$

Remarque 2 i) Pour tout $a \in k^\Gamma$, l'opérateur $[F, a]$ est de rang fini.

ii) Un calcul simple montre que $rg([F, a]) < \infty \iff rg([P, a]) < \infty \iff rg([P^{-1}, a]) < \infty$.

iii) Si $\{g, gx\}$ est une arête (avec $l(gx) = l(g) + 1$), on a $P^{-1}\{g, gx\} = gx$.

Proposition 5 Soit $a \in k^\Gamma$ telle que $[F, a]$ soit de rang fini. Alors $m(a) := \sum_{h \in \Gamma} \alpha_h m(h) \in k \ll X \cup \bar{X} \gg$ est une série rationnelle.

Preuve — Pour ne pas alourdir la notation, nous identifierons dans cette preuve tout élément $g \in \Gamma$ avec son représentant réduit $m(g)$ dans $red(X)$. Soit alors $\gamma = \{g, gx\} \in \Gamma^{(1)}$, avec $l(gx) = l(g) + 1$. Soit $h \in \Gamma$; la remarque 2 iii) implique que $P^{-1}\{hg, hgx\} = hgx$ sauf si dans le produit $h(gx)$, le facteur gx disparaît par simplification, i.e. $h = h_1 \bar{x} \bar{g}$ auquel cas $P^{-1}\{hg, hgx\} = h_1 \bar{x}$.

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} P^{-1}a\gamma &= P^{-1} \sum_{h \in \Gamma} \alpha_h \{hg, hgx\} = \sum_{h \in \Gamma} \alpha_h P^{-1}\{hg, hgx\} = \\ &= \sum_{h=h_1 \bar{x} \bar{g}} \alpha_h h_1 \bar{x} + \sum_{h \neq h_1 \bar{x} \bar{g}} \alpha_h hgx \end{aligned}$$

De plus

$$aP^{-1}\gamma = agx = \sum_{h \in \Gamma} \alpha_h hgx = \sum_{h=h_1 \bar{x} \bar{g}} \alpha_h h_1 + \sum_{h \neq h_1 \bar{x} \bar{g}} \alpha_h hgx$$

D'où l'on tire

$$[P^{-1}, a]\gamma = \sum_{h=h_1 \bar{x} \bar{g}} \alpha_h (h_1 \bar{x} - h_1) = \left(\sum_{h_1 \bar{x} \bar{g} \in red(X)} \alpha_h h_1 \right) (\bar{x} - 1)$$

Notons que, puisque le support de $S = m(a)$ est formé de mots réduits, on a d'après une formule du paragraphe 2.1,

$$(\bar{x} \bar{g}) \circ S = \sum_{w \in (X \cup \bar{X})^*} (S, w \bar{x} \bar{g}) w = \sum_{w \bar{x} \bar{g} \in red(X)} (S, w \bar{x} \bar{g}) w = \sum_{w \bar{x} \bar{g} \in red(X)} \alpha_{w \bar{x} \bar{g}} w$$

D'où

$$[P^{-1}, a]\gamma = (\bar{x} \bar{g} \circ S)(\bar{x} - 1)$$

Par hypothèse, les séries $[P^{-1}, a]\gamma$ forment une famille de rang fini quand $\gamma = \{g, gx\}$ varie dans $\Gamma^{(1)}$. Il en est donc de même des séries $(\bar{x} \bar{g}) \circ S$, quand $\bar{x} \bar{g}$ parcourt l'ensemble des mots réduits non vides puisque X est fini et que la multiplication par $(\bar{x} - 1)$ est injective. Comme $w \circ S$ est nul si w n'est pas réduit, le Th. 2 i) implique que S est rationnelle. \square

3 Application à la géométrie non commutative

3.1 Séries rationnelles dans $C_r^*(\Gamma)$

Nous retournons maintenant à la construction d'origine [5]. Ici $k = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}^+ = l^2(\Gamma)$ et $\mathcal{H}^- = l^2(\Gamma^{(1)}) \oplus \mathbb{C}$. Les applications P et F permutent des bases hilbertiennes et définissent donc des opérateurs unitaires.

Définition 6 *i) Soit, pour $n \geq 1$, $(C_r^*(\Gamma))_n$ la plus petite sous algèbre $\mathcal{B} \subset C_r^*(\Gamma)$ telle que $\Gamma \subset \mathcal{B}$ et que*

$$x \in M_n(\mathcal{B}) \cap [M_n(C_r^*(\Gamma))]^{-1} \implies x \in [M_n(\mathcal{B})]^{-1}$$

ii) Soit $(C_r^(\Gamma))_{fin}$ l'algèbre des $a \in C_r^*(\Gamma)$ tels que $[F, a]$ soit de rang fini.*

Remarque 3 *En vertu de la Déf. 1, $(C_r^*(\Gamma))_1$ est la clôture rationnelle de Γ dans $C_r^*(\Gamma)$.*

Théorème 7 *Tous les espaces précédents sont égaux soit*

$$(C_r^*(\Gamma))_1 = (C_r^*(\Gamma))_2 = \cdots = (C_r^*(\Gamma))_n = \cdots = (C_r^*(\Gamma))_{fin}^{\sim} = (C_r^*(\Gamma))_{fin}$$

Preuve — Les inclusions suivantes sont claires

$$(C_r^*(\Gamma))_1 \subset (C_r^*(\Gamma))_2 \subset \cdots \subset (C_r^*(\Gamma))_n \subset \cdots \subset (C_r^*(\Gamma))_{fin}^{\sim}$$

Le fait que $(C_r^*(\Gamma))_{fin}^{\sim} \subset (C_r^*(\Gamma))_{fin}$ est signalé dans [5] et résulte aussi du lemme suivant.

Lemme 8 *Soit \mathcal{A} une k -algèbre, d une dérivation, et \mathcal{J} un idéal bilatère de \mathcal{A} . On définit la sous algèbre $\mathcal{C} = \{a \in \mathcal{A} \mid d(a) \in \mathcal{J}\}$. Soit $Z \subset \mathcal{C}$ et Z_n la plus petite sous algèbre \mathcal{B} telle que $Z \subset \mathcal{B}$ et que*

$$x \in M_n(\mathcal{B}) \cap [M_n(\mathcal{A})]^{-1} \implies x \in [M_n(\mathcal{B})]^{-1}$$

alors $Z_n \subset \mathcal{C}$.

Preuve — Soit $(\mathcal{B}_m)_{m \geq 0}$, la suite de sous-algèbres définie par \mathcal{B}_0 , la sous-algèbre engendrée par Z et \mathcal{B}_{m+1} , la sous-algèbre engendrée par \mathcal{B}_m et les coefficients des inverses des matrices de $M_n(\mathcal{B}_m) \cap [M_n(\mathcal{A})]^{-1}$. Il est clair que $Z_n = \cup_m \mathcal{B}_m$.

L'extension de d à $M_n(\mathcal{A})$ (que nous noterons d_n et qui est définie par $d_n([x_{ij}]) = [d(x_{ij})]$), est encore une dérivation. Par hypothèse $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{C}$ et supposons que $\mathcal{B}_m \subset \mathcal{C}$. Soit $x \in M_n(\mathcal{B}_m) \cap [M_n(\mathcal{A})]^{-1}$. La formule $d_n(x^{-1}) = -x^{-1}d_n(x)x^{-1}$ montre que $(d_n(x^{-1}))_{ij} \in \mathcal{J}$ d'où $(x^{-1})_{ij} \in \mathcal{C}$ ce qui démontre le lemme. \square

Suite de la preuve du théorème 7 — On applique le lemme précédent à $d = ad_F$, $Z = C\Gamma$, $\mathcal{A} = C_r^*(\Gamma)$, et \mathcal{J} l'idéal des opérateurs de rang fini \mathcal{A} . \square

Nous avons maintenant établi les inclusions

$$(C_r^*(\Gamma))_1 \subset (C_r^*(\Gamma))_2 \subset \cdots \subset (C_r^*(\Gamma))_n \subset \cdots \subset (C_r^*(\Gamma))_{fin}^{\sim} \subset (C_r^*(\Gamma))_{fin}$$

Le théorème 7 sera complètement démontré quand nous aurons établi l'inclusion $(C_r^*(\Gamma))_{fin} \subset (C_r^*(\Gamma))_1$, ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

3.2 Séries rationnelles dans $l^2(\Gamma)$

Soit $a = \sum_{g \in \Gamma} \alpha_g g \in l^2(\Gamma)$. Alors a définit par convolution à gauche un opérateur dans $End(l^2(\Gamma))$. Nous montrons que si $m(a)$ est rationnelle, alors l'opérateur a est dans $(C_r^*(\Gamma))_1$, ce qui permettra de finir la preuve du théorème 7.

Proposition 9 *Soit $a \in l^2(\Gamma)$ tel que $m(a)$ soit rationnelle dans $\mathbb{C} \ll X \cup \bar{X} \gg$. Alors l'opérateur a est dans $(C_r^*(\Gamma))_1$.*

Preuve — Cette proposition résulte des deux lemmes suivants

Lemme 10 *Soit $a = \sum_{g \in \Gamma} \alpha_g g \in l^2(\Gamma)$ telle que $S = m(a) = \sum_{h \in \Gamma} \alpha_h m(h)$ soit rationnelle dans $\mathbb{C} \ll X \cup \bar{X} \gg$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $a_m = \sum_{l(g)=m} \alpha_g g \in \mathbb{C}\Gamma$. Alors*

- i) La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est normalement convergente dans $C_r^*(\Gamma)$ et a pour somme l'opérateur a . En particulier, celui-ci est dans $C_r^*(\Gamma)$.*
- ii) Pour toute décalée T de S , $s(T)$ est dans $C_r^*(\Gamma)$.*

Preuve — i) Soit $\bar{a} = \sum_{g \in \Gamma} \bar{\alpha}_g g$, $\bar{S} = m(\bar{a})$ est également rationnelle et donc, en vertu du Th. 3, également $S \odot \bar{S} = \sum_{w \in Red(X)} |\alpha_{s(w)}|^2 w$. L'image de cette série par la spécialisation $x \rightarrow t$ pour tout $x \in X \cup \bar{X}$ donne $\sum_{g \in \Gamma} |\alpha_g|^2 t^{l(g)}$ qui est une série de $\mathbb{R}_+[[t]]$, rationnelle et qui converge pour $t = 1$. D'après un résultat de KRONECKER [5], ceci implique que sa somme (qui est une fraction rationnelle) a tous ses pôles en dehors du disque unité. On a alors la condition de croissance avec $0 < c < 1$, $0 < M$

$$\sum_{l(g)=m} |\alpha_g|^2 \leq M c^m$$

l'inégalité de HAAGERUP [5] implique alors que pour la norme de la convergence bornée on ait $\|a_m\| \leq M(1+m)^k c^m$, d'où la convergence normale dans $C_r^*(\Gamma)$.

ii) L'inégalité $\|s(T)\|_2 \leq \|s(S)\|_2$ montre que $s(T)$ est dans $l^2(\Gamma)$; T a son support dans $red(X)$. Comme $s(T)$ est rationnelle, (i) permet de conclure. □

Remarque 4 *Ce lemme montre que, si $a \in \lambda(\Gamma)$ et si $m(a)$ est rationnelle, alors $a \in C_r^*(\Gamma)$.*

Le deuxième lemme est général sur les algèbres de Banach et résulte de la rationalité des formules d'inversion par blocs [9].

Lemme 11 *Soit \mathcal{A} une algèbre de BANACH. On munit $M_n(\mathcal{A})$ de la topologie produit. Si $x \in M_n(\mathcal{A})$ est telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, alors*

- i) La série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge normalement (vers $(1-x)^{-1}$).*
- ii) Les coefficients de $(1-x)^{-1}$ sont dans la clôture rationnelle de ceux de x .*

Preuve — i) Cela résulte de ce que $M_n(\mathcal{A})$ est aussi une algèbre de BANACH.

ii) La propriété est trivialement vraie pour $n = 1$. Pour $n \geq 2$, il résulte de la formule

$$\begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (1 - (a_{11} + a_{12}(1 - a_{22})^{-1}a_{21}))^{-1}; \quad A_{12} = (1 - a_{11})^{-1}a_{12}A_{22}$$

$$A_{21} = (1 - a_{22})^{-1}a_{21}A_{11}; \quad A_{22} = (1 - (a_{22} + a_{21}(1 - a_{11})^{-1}a_{12}))^{-1}$$

où $a_{ij} \in M_{d_i d_j}(\mathcal{A})$; $d_1 = 1$, $d_2 = n - 1$ appliqué à la matrice x^n pour n assez grand. On termine la preuve en remarquant que

$$(1 - x)^{-1} = (1 - x^n)^{-1}(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

□

Preuve de la proposition 9 — Soit $S = m(a)$. D'après l'hypothèse, S est rationnelle dans $\mathbb{C} \langle\langle X \cup \bar{X} \rangle\rangle$. Soit (λ, μ, γ) une représentation minimale de S . Posons $U = \sum_{x \in X \cup \bar{X}} \mu(x)x \in M_n(\mathbb{C} \langle X + \bar{X} \rangle)$ et $V = s(U)$. Nous montrons d'abord que $\lim_{m \rightarrow \infty} V^m = 0$. D'après le lemme 11 i), il suffit de montrer que, pour tous les indices de ligne et de colonne i, j , il existe $b \in l^2(\Gamma)$ tel que $T = m(b)$ soit rationnelle dans $\mathbb{C} \langle\langle X \cup \bar{X} \rangle\rangle$ et que $(V^m)_{ij} = b_m$. Mais, comme (λ, μ, γ) est minimale, le Th. 4 entraîne que

$$(\mu(w))_{i,j} = \sum_{k,l} \theta_{i,j}^{k,l}(u_k \circ S \circ u_l, w) = \sum_{k,l} \theta_{i,j}^{k,l}(S, u_l w u_k) \quad (2)$$

Donc le support de $S_{ij} = \sum_{w \in (X \cup \bar{X})^*} (\mu(w))_{i,j} w$ est formé de mots réduits et donc $\mu(w) = 0$ si w n'est pas réduit. Par suite

$$V^m = s(U)^m = s(U^m) = s\left(\sum_{w \in (X \cup \bar{X})^m} \mu(w)w\right) = s\left(\sum_{w \in (X \cup \bar{X})^m \cap \text{red}(X)} \mu(w)w\right)$$

et $(V^m)_{ij} = b_m$ avec $b = s(T)$ et $T = S_{ij}$; en effet, l'équation 2 montre de plus que T est combinaison linéaire de décalées de S et donc que $s(T)$ est dans $l^2(\Gamma)$ (par application du lemme 10 ii), et que T est rationnelle.

Comme $\lim_{m \rightarrow \infty} V^m = 0$, le lemme 11 implique que $1 - V$ est inversible dans $M_n((C_r^*(\Gamma))_1)$ et que les coefficients de $(1 - V)^{-1}$ sont dans $(C_r^*(\Gamma))_1$. Par ailleurs, $\sum_{m \geq 0} U^m$ ne comporte que des mots réduits, donc $s(\sum_{m \geq 0} U^m) = \sum_{m \geq 0} V^m = (1 - V)^{-1}$. Enfin, S est combinaison linéaire des $S_{ij} = (\sum_{m \geq 0} U^m)_{ij}$ donc $a = s(S)$ est combinaison linéaire de coefficients de $(1 - V)^{-1}$, ce qui montre que a est dans $(C_r^*(\Gamma))_1$.

□

Fin de la preuve du Théorème 7 — Si $a \in (C_r^*(\Gamma))_{fin}$, $S = m(a)$ est rationnelle d'après la proposition 5. De plus, $a(\epsilon_1)$ est dans $l^2(\Gamma)$, il suffit donc d'appliquer la proposition 9.

□

4 Application aux séries de Malcev-Neumann

Si le groupe libre Γ est muni d'un ordre total compatible avec sa structure de groupe, l'ensemble $k((\Gamma))$ des séries sur Γ dont le support est bien ordonné, est un corps (voir [14] Th. 2.11). Un élément $a \in k((\Gamma))$ est dit *rationnel* s'il appartient à la clôture rationnelle de Γ dans $k((\Gamma))$. L'ensemble des éléments rationnels de $k((\Gamma))$ s'identifie au *corps libre* (voir [6, 13]). Rappelons que toute série sur le groupe libre définit un opérateur $\mathcal{H} \rightarrow \bar{\mathcal{H}}$ (cf. 2.2). Nous montrons dans cette section que le critère d' A. CONNES ci-dessus permet aussi de caractériser les éléments rationnels de $k((\Gamma))$.

Théorème 12 *Un élément a de $k((\Gamma))$ est rationnel si et seulement si l'opérateur $[F, a]$ est de rang fini.*

Preuve — La nécessité de la condition s'établit comme dans la preuve Th. 7. Réciproquement, si $[F, a]$ est de rang fini, nous savons par la Prop. 5 que $S = m(a)$ est une série rationnelle dans $k \ll X \cup \bar{X} \gg$. Soit (λ, μ, γ) une représentation minimale de S . D'après la formule 2 de 3.2, chacune des séries $S_{ij} = \sum_{w \in (X \cup \bar{X})^*} (\mu(w))_{ij} w$ ne comporte que des mots réduits; donc $a_{ij} = s(S_{ij})$ est bien défini, et la même formule montre que son support est une partie bien ordonnée de Γ . De plus, dans $k \ll X \cup \bar{X} \gg$, la matrice $(S_{ij})_{ij}$ est l'inverse de $1 - \sum_{x \in X \cup \bar{X}} \mu(x)x$, donc la matrice $(a_{ij})_{ij}$ est l'inverse de cette même matrice vue comme élément de $k((\Gamma))$. Comme, dans un corps, les coefficients d'une matrice sont dans la clôture rationnelle des coefficients de l'inverse de cette matrice (voir les formules dans la preuve du Lemme 11), les a_{ij} sont des éléments rationnels de $k((\Gamma))$. Enfin, nous avons $S = \sum_{ij} \lambda_i S_{ij} \gamma_j$, donc $a = \sum_{ij} \lambda_i a_{ij} \gamma_j$, par application de s , et a est rationnel. □

La preuve ci-dessus redémontre un résultat du à FLIESS [7] (voir aussi CAUCHON [3]). Pour cela, nous supposons que tout élément x de X est > 1 dans Γ ; alors $k \ll X \gg$ est une sous-algèbre de $k((\Gamma))$, car X^* est une partie bien ordonnée de Γ .

Corollaire 13 *Si une série formelle dans $k \ll X \gg$ est rationnelle dans $k((\Gamma))$, elle est rationnelle dans $k \ll X \gg$.*

References

- [1] E. ABE Hopf algebras. Cambridge (1980).
- [2] J. BERSTEL, C. REUTENAUER Rational series and their languages EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer (1988).
- [3] G. CAUCHON, Séries de Malcev-Neumann sur le groupe libre et questions de rationalité, TCS, **98**, pp79-97 (1992).
- [4] V. CHARI, A. PRESSLEY, A guide to quantum groups. Cambridge (1994).
- [5] A. CONNES, Noncommutative geometry. Acad. Press (1994).
- [6] P.M. COHN, Free rings and their relations. Acad. Press (1985).
- [7] M. FLIESS, Sur le plongement de l'algèbre des séries rationnelles non commutatives dans un corps gauche. CRAS Ser. A **271** pp 926-927 (1970).
- [8] M. FLIESS, Matrices de Hankel, Jour. of Pure and Appl. Math. **53**, 197-222, (1994).
- [9] I.M. GELFAND, V.S. RETAKH, A theory of non-commutative determinants and characteristic functions of graphs, Funct. Anal. Appl. **26** (1992).
- [10] I.M. GELFAND, D. KROB, A. LASCoux, B. LECLERC B, V.S. RETAKH and J.-Y. THIBON, Noncommutative symmetric functions, Adv. in Math. **112**, 218-348 (1995).
- [11] A. HEYTING, Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplikation, Math. Ann., **98**, 465-490 (1927).
- [12] G. JACOB, Représentations et substitutions matricielles dans la théorie matricielle des semigroupes. Thèse, Univ. de Paris (1975).
- [13] J. LEWIN, Fields of fractions for group algebras of free groups, Trans. Amer. Math. Soc. **192**, 339-346, (1974).
- [14] D.S. PASSMAN, The algebraic structure of group rings, John Wiley - Interscience (1977).
- [15] A.R. RICHARDSON Simultaneous linear equations over a division ring. Proc. Lond. Math. Soc., **28**, 395-420 (1928).
- [16] M.P. SCHÜTZENBERGER, On the definition of a family of automata, **4**, Information and Control, 275-270, (1961).
- [17] M.P. SCHÜTZENBERGER, On a theorem of R. Jungen, Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 885-889, (1962).