Groupes à un paramètre, combinatoire et calcul formel

Présenté par: **Hayat Cheballah**

PLAN DE LA PRÉSENTATION

OUTLINE

Motivation et objectifs.

- Le but de ce travail est la résolution de problèmes de la physique quantique par des méthodes combinatoires

$\Rightarrow$ Définir un cadre mathématique rigoureux.

- Nous nous interessons aux problèmes de physique quantique et plus particulièrement à la combinatoire des **opérateurs de création et d'annihilation**

$\Rightarrow$ Ce cas précis donne naissance à des structures infinies utiles en informatique.

MOTIVATION ET OBJECTIFS.

- Le but de ce travail est la résolution de problèmes de la physique quantique par des méthodes combinatoires

  $\Rrightarrow$ Définir un cadre mathématique rigoureux.

- Nous nous interessons aux problèmes de physique quantique et plus particulièrement à la combinatoire des **opérateurs de création et d'annihilation**

  $\Rrightarrow$ Ce cas précis donne naissance à des structures infinies utiles en informatique.

OUTLINE

Opérateurs de création et d'annihilation bosoniques

Définitions

1. Opérateur d'annihilation Opérateur qui fait passer un système à N (avec $N \geq 1$) particules à $N-1$ particules
2. Opérateur de création Opérateur qui fait passer un système à N particules à $N+1$ particules.

ces opérateurs obeissent à la relation de commutation:

$$[a,a^{\dagger}] = 1$$

- a et $a^{\dagger}$ seront des opérateurs (non bornés) dans un espace Hilbertien, conjugués hermitiens l'un de l'autre ,
- Ces opérateurs sont définis sur un sous espace dense $\mathcal{H}_0$,
- L'algèbre engendrée par ces opérateurs est l'algèbre de Heisenberg Weyl

Opérateurs de création et d'annihilation bosoniques

Définitions

1. Opérateur d'annihilation Opérateur qui fait passer un système à N (avec $N \geq 1$) particules à $N-1$ particules
2. Opérateur de création Opérateur qui fait passer un système à N particules à $N+1$ particules.

ces opérateurs obeissent à la relation de commutation:

$$[a, a^{\dagger}] = 1$$

- a et $a^{\dagger}$ seront des opérateurs (non bornés) dans un espace Hilbertien, conjugués hermitiens l'un de l'autre ,
- Ces opérateurs sont définis sur un sous espace dense $\mathcal{H}_0$,
- L'algèbre engendrée par ces opérateurs est l'algèbre de Heisenberg Weyl

Opérateurs de création et d'annihilation bosoniques

Définitions

1. Opérateur d'annihilation Opérateur qui fait passer un système à N (avec $N \geq 1$) particules à $N-1$ particules
2. Opérateur de création Opérateur qui fait passer un système à N particules à $N+1$ particules.

ces opérateurs obeissent à la relation de commutation:

$$[a,a^{\dagger}] = 1$$

- a et $a^{\dagger}$ seront des opérateurs (non bornés) dans un espace Hilbertien, conjugués hermitiens l'un de l'autre ,
- Ces opérateurs sont définis sur un sous espace dense $\mathcal{H}_0$,
- L'algèbre engendrée par ces opérateurs est l'algèbre de Heisenberg Weyl

Opérateurs de création et d'annihilation bosoniques

Définitions

1. Opérateur d'annihilation Opérateur qui fait passer un système à N (avec $N \geq 1$) particules à $N-1$ particules
2. Opérateur de création Opérateur qui fait passer un système à N particules à $N+1$ particules.

ces opérateurs obeissent à la relation de commutation:

$$[a,a^{\dagger}] = 1$$

- a et $a^{\dagger}$ seront des opérateurs (non bornés) dans un espace Hilbertien, conjugués hermitiens l'un de l'autre ,
- Ces opérateurs sont définis sur un sous espace dense $\mathcal{H}_0$,
- L'algèbre engendrée par ces opérateurs est l'algèbre de Heisenberg Weyl

ALGÈBRE DE HEISENBERG-WEYL

L'algèbre de Heisenberg-Weyl notée $HW_{\mathbb{C}}$ est donnée par

$$HW_{\mathbb{C}} = \langle a, a^{\dagger}; aa^{\dagger} - a^{\dagger}a = 1 \rangle_{\mathbb{C}-AAU} \tag{1}$$

- $\mathbb{C} - AAU$ est la catégorie des algèbres associatives avec unité

Propriétés

- Cette algèbre n'est pas représentable dans un espace de dimension fini.
- Pour une représentation correcte, on a besoin d'un espace de dimension infinie.

ALGÈBRE DE HEISENBERG-WEYL

L'algèbre de Heisenberg-Weyl notée $HW_{\mathbb{C}}$ est donnée par

$$HW_{\mathbb{C}} \quad = \quad \langle a, a^\dagger ; aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \rangle_{\mathbb{C}-AAU} \tag{1}$$

- $\mathbb{C} - AAU$ est la catégorie des algèbres associatives avec unité

Propriétés

- Cette algèbre n'est pas représentable dans un espace de dimension fini.
- Pour une représentation correcte, on a besoin d'un espace de dimension infinie.

ALGÈBRE DE HEISENBERG-WEYL

L'algèbre de Heisenberg-Weyl notée $HW_{\mathbb{C}}$ est donnée par

$$HW_{\mathbb{C}} = \langle a, a^{\dagger}; aa^{\dagger} - a^{\dagger}a = 1 \rangle_{\mathbb{C}-AAU} \quad (1)$$

- $\mathbb{C} - AAU$ est la catégorie des algèbres associatives avec unité

Propriétés

- Cette algèbre n'est pas représentable dans un espace de dimension fini.
- Pour une représentation correcte, on a besoin d'un espace de dimension infinie.

ESPACE DE HILBERT

- $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'espace de Hilbert séparable et $e_n = (\delta_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ sa base canonique
- on définit le sous espace standard de $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}e_n \qquad (2)$$

En utilisant la notation de Dirac *bra* et *ket*, on définit

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases} \qquad (3)$$

Espace de Hilbert

- $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'espace de Hilbert séparable et $e_n = (\delta_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ sa base canonique
- on définit le sous espace standard de $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_0 = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}e_n \tag{2}$$

En utilisant la notation de Dirac *bra* et *ket*, on définit

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \\ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{cases} \tag{3}$$

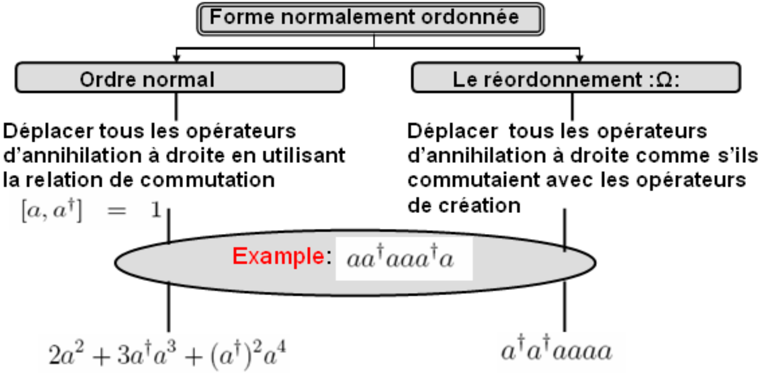
OUTLINE

Forme normalement ordonnée

Motivation

Non commutativité des opérateurs de création d'annihilation $\Longrightarrow$ Problème de définition des fonctions d'opérateurs en mécanique quantique.

$\Longrightarrow$ Définir la forme normalement ordonnée



FORME NORMALE DES MOTS DE BOSONS

Soit $w \in \{a, a^\dagger\}^*$ un mot de Bosons et définissons $r = |w|_{a^\dagger}$ et $s = |w|_a$.

La forme normale de w^n est:

$$\mathcal{N}(w^n) = \sum_{k=0}^{nm} S_w(n, nm-k)(a^\dagger)^{nr-k} a^{ns-k}$$

Avec

- $m = \min(r, s)$
- S_w est la généralisation des nombres de Stirling de seconde espèce.

$$\Longleftrightarrow \mathcal{N}(w^n) = \begin{cases} (a^\dagger)^{ne}\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^\dagger)^k (a)^k\right), & \text{si } e \geq 0; \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^\dagger)^k (a)^k\right) a^{n|e|}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où $e = r - s$ représente l'excès.

FORME NORMALE DES MOTS DE BOSONS

Soit $w \in \{a,a^\dagger\}^*$ un mot de Bosons et définissons $r = |w|_{a^\dagger}$ et $s = |w|_a$.

La forme normale de w^n est:

$$\mathcal{N}(w^n) = \sum_{k=0}^{nm} S_w(n,nm-k)(a^\dagger)^{nr-k}a^{ns-k}$$

Avec

- $m = \min(r,s)$
- S_w est la généralisation des nombres de Stirling de seconde espèce.

$$\iff \mathcal{N}(w^n) = \begin{cases} (a^\dagger)^{ne}\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^\dagger)^k(a)^k\right), & \text{si } e \geq 0; \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^\dagger)^k(a)^k\right)a^{n|e|}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où $e = r - s$ représente l'excès.

Forme normale des mots de Bosons

Soit $w \in \{a, a^\dagger\}^*$ un mot de Bosons et définissons $r = |w|_{a^\dagger}$ et $s = |w|_a$.

La forme normale de w^n est:

$$\mathcal{N}(w^n) = \sum_{k=0}^{nm} S_w(n, nm-k)(a^\dagger)^{nr-k} a^{ns-k}$$

Avec

- $m = \min(r, s)$
- S_w est la généralisation des nombres de Stirling de seconde espèce.

$$\Longleftrightarrow \mathcal{N}(w^n) = \begin{cases} (a^\dagger)^{ne}\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^\dagger)^k (a)^k\right), & \text{si } e \geq 0; \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^\dagger)^k (a)^k\right) a^{n|e|}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où $e = r - s$ représente l'excès.

Forme normale des mots de Bosons

Soit $w \in \{a,a^\dagger\}^*$ un mot de Bosons et définissons $r = |w|_{a^\dagger}$ et $s = |w|_a$.

La forme normale de w^n est:

$$\mathcal{N}(w^n) = \sum_{k=0}^{nm} S_w(n,nm-k)(a^\dagger)^{nr-k}a^{ns-k}$$

Avec

- $m = \min(r,s)$
- S_w est la généralisation des nombres de Stirling de seconde espèce.

$$\Longleftrightarrow \mathcal{N}(w^n) = \begin{cases} (a^\dagger)^{ne}\left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^\dagger)^k(a)^k\right), & \text{si } e \geq 0; \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_w(n,k)(a^\dagger)^k(a)^k\right)a^{n|e|}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où $e = r - s$ représente l'excès.

Outline

Cas général: Ordre normal des mots de Bosons

Exemple $w = a^{\dagger}aaa^{\dagger}a^{\dagger}$, On obtient la matrice doublement infinie $S_w(n,m)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 12 & 60 & 54 & 14 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 144 & 1296 & 2232 & 1296 & 306 & 30 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

OUTLINE

Exemple 1 $w = a^\dagger a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 2 $w = a^\dagger a a^\dagger$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 6 & 18 & 9 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 24 & 96 & 72 & 16 & 1 & 0 & \cdots \\ 120 & 600 & 600 & 200 & 25 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 1 $w = a^\dagger a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Exemple 2 $w = a^\dagger a a^\dagger$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 6 & 18 & 9 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 24 & 96 & 72 & 16 & 1 & 0 & \cdots \\ 120 & 600 & 600 & 200 & 25 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Remarques générales

Remarque

Dans chaque cas, la matrice S_w a la forme en escalier et chaque *"marche"* dépend du nombre d'opérateurs d'annihilation a dans le mot. Ainsi toutes les matrices sont finies par ligne et unitriangulaires si et seulement $s = 1$.

Récapitulatif

Soit $w = (a^\dagger)^{r-p} a (a^\dagger)^p$

1. Si $p = 0$, la matrice associée S_w est une matrice unipotente de substitution
2. Si $p > 0$, S_w est une matrice unipotente de substitution avec préfonction

Remarques générales

Remarque

Dans chaque cas, la matrice S_w a la forme en escalier et chaque *"marche"* dépend du nombre d'opérateurs d'annihilation a dans le mot. Ainsi toutes les matrices sont finies par ligne et unitriangulaires si et seulement $s = 1$.

Récapitulatif

Soit $w = (a^\dagger)^{r-p} a (a^\dagger)^p$

1. Si $p = 0$, la matrice associée S_w est une matrice unipotente de substitution
2. Si $p > 0$, S_w est une matrice unipotente de substitution avec préfonction

Remarques générales

Remarque

Dans chaque cas, la matrice S_w a la forme en escalier et chaque *"marche"* dépend du nombre d'opérateurs d'annihilation a dans le mot. Ainsi toutes les matrices sont finies par ligne et unitriangulaires si et seulement $s = 1$.

Récapitulatif

Soit $w = (a^\dagger)^{r-p}a(a^\dagger)^p$

1. Si $p = 0$, la matrice associée S_w est une matrice unipotente de substitution
2. Si $p > 0$, S_w est une matrice unipotente de substitution avec préfonction

PROPRIÉTÉS

$S_w \in \quad \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}^{\times}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

avec

- $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices unipotentes.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})^{\times}$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'algèbre des endomorphismes continus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des matrices à support fini.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des matrices infinies $(M_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{K}}$

Propriétés

$S_w \in \; \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}^{\times}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

avec

- $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices unipotentes.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})^{\times}$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'algèbre des endomorphismes continus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des matrices à support fini.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des matrices infinies $(M_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{K}}$

PROPRIÉTÉS

$S_w \in \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}^{\times}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

avec

- $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices unipotentes.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})^{\times}$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'algèbre des endomorphismes continus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des matrices à support fini.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des matrices infinies $(M_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{K}}$

Propriétés

$S_w \in \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}^{\times}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

avec

- $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices unipotentes.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})^{\times}$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'algèbre des endomorphismes continus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des matrices à support fini.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des matrices infinies $(M_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{K}}$

Propriétés

$S_w \in \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}^{\times}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

avec

- $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices unipotentes.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})^{\times}$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'algèbre des endomorphismes continus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des matrices à support fini.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des matrices infinies $(M_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{K}}$

Propriétés

$S_w \in \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}^{\times}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

avec

- $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices unipotentes.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})^{\times}$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'algèbre des endomorphismes continus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des matrices à support fini.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des matrices infinies $(M_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{K}}$

Propriétés

$S_w \in \ \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}^{\times}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \simeq \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

avec

- $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices unipotentes.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})^{\times}$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
- $\mathcal{LT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
- $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ l'algèbre des endomorphismes continus dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times(\mathbb{N})}$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ des matrices à support fini.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est l'espace vectoriel des matrices infinies $(M_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{K}}$

Il a été prouvé (*G. Duchamp et al.,2003*) que pour tout mot $w \in \{a,a^\dagger\}^*$ avec un seul opérateur d'annihilation, qu'il existe deux séries formelles $g(x)$ et $\phi(x)$ avec $[1]g(x) = 1$ et $[x]\phi(x) = 1$ tel que

$$\sum_{n\geq 0} S_w(n,k)\frac{x^n}{n!} = g(x)\frac{\phi(x)^k}{k!}$$

Soit $\mathcal{M}$ une matrice unipotente. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice $c_k(x)$ de la k^{ieme} colonne de $\mathcal{M}$

$$c_k(x) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{M}(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

Alors $\mathcal{M}$ est une matrice unipotente de substitution si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$c_k(x) = c_0(x)\frac{\left(\frac{c_1(x)}{c_0(x)}\right)^k}{k!} \qquad (4)$$

Donc

$$c_0(x) = g(x) \text{ et } \frac{c_1(x)}{c_0(x)} = \phi(x)$$

Il a été prouvé (*G. Duchamp et al.,2003*) que pour tout mot $w \in \{a,a^\dagger\}^*$ avec un seul opérateur d'annihilation, qu'il existe deux séries formelles $g(x)$ et $\phi(x)$ avec $[1]g(x) = 1$ et $[x]\phi(x) = 1$ tel que

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} S_w(n,k)\frac{x^n}{n!} = g(x)\frac{\phi(x)^k}{k!}}$$

Soit $\mathcal{M}$ une matrice unipotente. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice $c_k(x)$ de la k^{ieme} colonne de $\mathcal{M}$

$$c_k(x) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{M}(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

Alors $\mathcal{M}$ est une matrice unipotente de substitution si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$c_k(x) = c_0(x)\frac{\left(\frac{c_1(x)}{c_0(x)}\right)^k}{k!} \qquad (4)$$

Donc

$$c_0(x) = g(x) \text{ et } \frac{c_1(x)}{c_0(x)} = \phi(x)$$

Il a été prouvé (*G. Duchamp et al.,2003*) que pour tout mot $w \in \{a,a^\dagger\}^*$ avec un seul opérateur d'annihilation, qu'il existe deux séries formelles $g(x)$ et $\phi(x)$ avec $[1]g(x) = 1$ et $[x]\phi(x) = 1$ tel que

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} S_w(n,k)\frac{x^n}{n!} = g(x)\frac{\phi(x)^k}{k!}}$$

Soit $\mathcal{M}$ une matrice unipotente. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice $c_k(x)$ de la k^{ieme} colonne de $\mathcal{M}$

$$c_k(x) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{M}(n,k)\frac{x^n}{n!}$$

Alors $\mathcal{M}$ est une matrice unipotente de substitution si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$c_k(x) = c_0(x)\frac{\left(\frac{c_1(x)}{c_0(x)}\right)^k}{k!} \tag{4}$$

Donc

$$c_0(x) = g(x) \text{ et } \frac{c_1(x)}{c_0(x)} = \phi(x)$$

- $c_0 = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{M}[i,0]\frac{x^i}{i!}$
- $c_k = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{M}[i,k]\frac{x^i}{i!}$
- $\varphi = \frac{c_1}{c_0}$
- $c_1 = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{M}[i,1]\frac{x^i}{i!}$

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{10} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{20} & x_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\
x_{30} & x_{31} & x_{32} & 1 & \cdots & \cdots \\
x_{40} & x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \frac{x^0}{0!} \\ \vdots \\ \frac{x^k}{k!} \end{matrix}
\\
\begin{matrix} c_0 & c_1 & & c_k & & \end{matrix}
\end{array}$$

Matrices de substitution approximées

Remarque

En prenant les sous matrices $[0..n] \times [0..n]$ de l'algèbre des transformations de matrices triangulaires inférieures $\mathcal{T}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ d'une matrice, on a un morphisme d'algèbres

$$\boxed{\tau_n : \mathcal{T}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}([0..n] \times [0..n],\mathbb{C})}$$

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ une matice de substitution alors $\mathcal{M}^t$ l'est aussi $\forall \quad t \in \mathbb{C}$

Idée de la preuve

- Considérons l'ensemble des matrices à coefficients complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]}$ l'ensemble des matrices de taille $(n+1) \times (n+1)$.

Matrices de substitution approximées

Remarque

En prenant les sous matrices $[0..n] \times [0..n]$ de l'algèbre des transformations de matrices triangulaires inférieures $\mathcal{T}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ d'une matrice, on a un morphisme d'algèbres

$$\boxed{\tau_n : \mathcal{T}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}([0..n] \times [0..n],\mathbb{C})}$$

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ une matice de substitution alors $\mathcal{M}^t$ l'est aussi $\forall \quad t \in \mathbb{C}$

Idée de la preuve

- Considérons l'ensemble des matrices à coefficients complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]}$ l'ensemble des matrices de taille $(n+1)\times(n+1)$.

Matrices de substitution approximées

Remarque

En prenant les sous matrices $[0..n] \times [0..n]$ de l'algèbre des transformations de matrices triangulaires inférieures $\mathcal{T}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ d'une matrice, on a un morphisme d'algèbres

$$\boxed{\tau_n : \mathcal{T}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}([0..n] \times [0..n],\mathbb{C})}$$

Théorème

Soit $\mathcal{M}$ une matice de substitution alors $\mathcal{M}^t$ l'est aussi $\forall \quad t \in \mathbb{C}$

Idée de la preuve

- Considérons l'ensemble des matrices à coefficients complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]}$ l'ensemble des matrices de taille $(n+1) \times (n+1)$.

MATRICES DE SUBSTITUTION APPROXIMÉES

- Considérons la troncature r_n de ces matrices prenant la sous matrice principale supérieure gauche de dimension $(n+1)$
  $\Rightarrow$ On obtient une application linéaire

$$\boxed{r_n : \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]}}$$

- Considérons $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices triangulaires inférieures et $\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})$ les matrices de taille $([0\cdots n]\times[0\cdots n])$ obtenues par la troncature τ_n.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_n : \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})}$$

MATRICES DE SUBSTITUTION APPROXIMÉES

- Considérons la troncature r_n de ces matrices prenant la sous matrice principale supérieure gauche de dimension $(n+1)$
  $\Rrightarrow$ On obtient une application linéaire

$$\boxed{r_n : \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]}}$$

- Considérons $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices triangulaires inférieures et $\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})$ les matrices de taille $([0\cdots n]\times[0\cdots n])$ obtenues par la troncature τ_n.

$$\Rrightarrow \quad \boxed{\tau_n : \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})}$$

Matrices de substitution approximées

- Considérons la troncature r_n de ces matrices prenant la sous matrice principale supérieure gauche de dimension $(n+1)$
  $\Rightarrow$ On obtient une application linéaire

$$\boxed{r_n : \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]}}$$

- Considérons $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices triangulaires inférieures et $\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})$ les matrices de taille $([0\cdots n]\times[0\cdots n])$ obtenues par la troncature τ_n.

$\Rightarrow$ $$\boxed{\tau_n : \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})}$$

MATRICES DE SUBSTITUTION APPROXIMÉES

- Considérons la troncature r_n de ces matrices prenant la sous matrice principale supérieure gauche de dimension $(n+1)$
  $\Rrightarrow$ On obtient une application linéaire

$$\boxed{r_n : \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]}}$$

- Considérons $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices triangulaires inférieures et $\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})$ les matrices de taille $([0\cdots n]\times[0\cdots n])$ obtenues par la troncature τ_n.

$$\Rrightarrow \qquad \boxed{\tau_n : \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})}$$

- On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \arrow[r, "r_n"] & \mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]} \\
\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathcal{J}_1"] \arrow[r, "\tau_n"] & \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathcal{J}_2"']
\end{tikzcd}$$

Remarque

$$\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \varprojlim(\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}))$$

i.e $\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})$ est la limite projective de $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$

- Soit τ_n et τ_m deux morphismes d'algèbre, alors pour tout $m \leq n$, on a le système projectif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[dr, "\tau_m"'] & \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}) \arrow[d, "\tau_{mn}"] \\
& \mathcal{UT}([0\cdots m],\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

- On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \arrow[r, "r_n"] & \mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]} \\ \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathcal{J}_1"] \arrow[r, "\tau_n"] & \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathcal{J}_2"'] \end{tikzcd}$$

Remarque

$$\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \varprojlim(\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}))$$

i.e $\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})$ est la limite projective de $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$

- Soit τ_n et τ_m deux morphismes d'algèbre, alors pour tout $m \leq n$, on a le système projectif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[dr, "\tau_m"'] & \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}) \arrow[d, "\tau_{mn}"] \\ & \mathcal{UT}([0\cdots m],\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

- On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \arrow[r, "r_n"] & \mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]} \\
\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathcal{J}_1"] \arrow[r, "\tau_n"] & \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathcal{J}_2"']
\end{tikzcd}$$

Remarque

$$\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \varprojlim(\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}))$$

i.e $\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})$ est la limite projective de $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$

- Soit τ_n et τ_m deux morphismes d'algèbre, alors pour tout $m \leq n$, on a le système projectif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[dr, "\tau_m"'] & \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}) \arrow[d, "\tau_{mn}"] \\
 & \mathcal{UT}([0\cdots m],\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

- On a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \arrow[r, "r_n"] & \mathbb{C}^{[0\cdots n]\times[0\cdots n]} \\ \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathcal{J}_1"] \arrow[r, "\tau_n"] & \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}) \arrow[u, "\mathcal{J}_2"'] \end{tikzcd}$$

Remarque

$$\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \underleftarrow{\lim}(\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}))$$

i.e $\mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C})$ est la limite projective de $\mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C})$

- Soit τ_n et τ_m deux morphismes d'algèbre, alors pour tout $m \leq n$, on a le système projectif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{UT}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \arrow[r, "\tau_n"] \arrow[dr, "\tau_m"'] & \mathcal{UT}([0\cdots n],\mathbb{C}) \arrow[d, "\tau_{mn}"] \\ & \mathcal{UT}([0\cdots m],\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

- Par (4) on a
$(\forall n \in \mathbb{N})(\tau_n(\mathcal{M}))$ est une matrice de substitution avec préfonction si et seulement si

$$(\forall k \leq n) \quad c_k(\tau_n(\mathcal{M})) = c_0(\tau_n(\mathcal{M}))\left(\frac{\left(\frac{c_1(\tau_n(\mathcal{M}))}{c_0(\tau_n(\mathcal{M}))}\right)^k}{k!}\right)$$

$$\Rrightarrow \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad c_k(\tau_n(\mathcal{M})) = \left\lfloor c_k(\tau_{\mathbb{N}}(\mathcal{M})) \right\rfloor_n$$

- Conditions polynomiales

$\Rrightarrow$ Groupe algébrique des matrices unipotentes.

- Par (4) on a
  $(\forall n \in \mathbb{N})(\tau_n(\mathcal{M}))$ est une matrice de substitution avec préfonction si et seulement si

$$(\forall k \leq n) \quad c_k(\tau_n(\mathcal{M})) = c_0(\tau_n(\mathcal{M}))\left(\frac{\left(\frac{c_1(\tau_n(\mathcal{M}))}{c_0(\tau_n(\mathcal{M}))}\right)^k}{k!}\right)$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad c_k(\tau_n(\mathcal{M})) = \left\lfloor c_k(\tau_{\mathbb{N}}(\mathcal{M}))\right\rfloor_n$$

- Conditions polynomiales

  $\Rightarrow$ Groupe algébrique des matrices unipotentes.

OUTLINE

Objectifs

- Soit Ω un opérateur homogène (*i.e.*un seul opérateur d'annihilation à chaque monôme) de la forme

$$\Omega = \sum_{|w|_a=1, poid(w)=e} \alpha_w w \tag{5}$$

$\Rightarrow$ Reconstruire les séries caractéristiques

$$\sum_{n,k} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k$$

Solution

Donner un sens au groupe à un paramètre $e^{\lambda\Omega}$ (Opérateur d'évolution).

Les conditions suivantes sont équivalentes

$$\sum_{n,k\geq 0} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = g(x) e^{y\phi(x)}$$

$$U_\lambda[f](x) = g(\lambda x^e) f(x(1+\phi(\lambda x^e)))$$

Objectifs

- Soit Ω un opérateur homogène (*i.e.*un seul opérateur d'annihilation à chaque monôme) de la forme

$$\Omega = \sum_{|w|_a=1, poid(w)=e} \alpha_w w \qquad (5)$$

$\Rightarrow$ Reconstruire les séries caractéristiques

$$\sum_{n,k} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k$$

Solution

Donner un sens au groupe à un paramètre $e^{\lambda\Omega}$ (Opérateur d'évolution).

Les conditions suivantes sont équivalentes

$$\sum_{n,k\geq 0} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = g(x) e^{y\phi(x)}$$

$$U_\lambda[f](x) = g(\lambda x^e) f(x(1+\phi(\lambda x^e)))$$

OBJECTIFS

- Soit Ω un opérateur homogène (*i.e.*un seul opérateur d'annihilation à chaque monôme) de la forme

$$\Omega = \sum_{|w|_a=1, poid(w)=e} \alpha_w w \tag{5}$$

$\Rightarrow$ Reconstruire les séries caractéristiques

$$\sum_{n,k} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k$$

Solution

Donner un sens au groupe à un paramètre $e^{\lambda\Omega}$ (Opérateur d'évolution).

Les conditions suivantes sont équivalentes

$$\sum_{n,k\geq 0} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k = g(x) e^{y\phi(x)}$$

$$U_\lambda[f](x) = g(\lambda x^e) f(x(1+\phi(\lambda x^e)))$$

Objectifs

- Soit Ω un opérateur homogène (*i.e.*un seul opérateur d'annihilation à chaque monôme) de la forme

$$\Omega = \sum_{|w|_a=1, poid(w)=e} \alpha_w w \tag{5}$$

$\Rightarrow$ Reconstruire les séries caractéristiques

$$\sum_{n,k} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k$$

Solution

Donner un sens au groupe à un paramètre $e^{\lambda\Omega}$ (Opérateur d'évolution).

Les conditions suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} \sum_{n,k\geq 0} S_\Omega(n,k) \frac{x^n}{n!} y^k &= g(x) e^{y\phi(x)} \\ U_\lambda[f](x) &= g(\lambda x^e) f(x(1+\phi(\lambda x^e))) \end{aligned}$$

Outline

Cas homogène unipotent

$\boxed{\Omega = (a^\dagger)^r a}$ représentation de Bargmann Fock $\boxed{x^r \dfrac{d}{dx}}$

- Redresser le champs de vecteur $\Rrightarrow$ Définir un difféomorphisme u

$\Rrightarrow$ Champ de vecteur constant

Le groupe à un paramètre (local) est

$$\boxed{U_\lambda[f](x) = f(u^{-1}(u(x) + \lambda))}$$

Un calcul direct donne le vecteur tangent

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} f(u^{-1}(u(x) + \lambda)) = \frac{1}{u'(x)} f'(x)}$$

Cas homogène unipotent

$\boxed{\Omega = (a^\dagger)^r a}$ représentation de Bargmann Fock $\boxed{x^r \frac{d}{dx}}$

- Redresser le champs de vecteur $\Rrightarrow$ Définir un difféomorphisme u

$\Rrightarrow$ Champ de vecteur constant

Le groupe à un paramètre (local) est

$$\boxed{U_\lambda[f](x) = f(u^{-1}(u(x)+\lambda))}$$

Un calcul direct donne le vecteur tangent

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} f(u^{-1}(u(x)+\lambda)) = \frac{1}{u'(x)} f'(x)}$$

Cas homogène unipotent

$\boxed{\Omega = (a^{\dagger})^r a}$ représentation de Bargmann Fock $\boxed{x^r \dfrac{d}{dx}}$

- Redresser le champs de vecteur $\Rrightarrow$ Définir un difféomorphisme u

  $\Rrightarrow$ Champ de vecteur constant

Le groupe à un paramètre (local) est

$$\boxed{U_\lambda[f](x) = f(u^{-1}(u(x) + \lambda))}$$

Un calcul direct donne le vecteur tangent

$$\boxed{\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} f(u^{-1}(u(x) + \lambda)) = \frac{1}{u'(x)} f'(x)}$$

Cas homogène unipotent

Pour trouver le difféomorphisme $u \Rightarrow \frac{1}{u'(x)} = x^r$

- $r \neq 1$

$$u(x) = \frac{x^{1-r}}{1-r} \quad \Rightarrow \quad u^{-1}(y) = ((1-r)y)^{\frac{1}{1-r}}$$

$$\Rightarrow \qquad e^{\lambda x^r \frac{d}{dx}}[f](x) = f\left(\frac{x}{(1-\lambda(r-1)x^{r-1})^{\frac{1}{r-1}}}\right)$$

- $r = 1$

$$e^{\lambda x \frac{d}{dx}}[f](x) = f(e^{\lambda}x)$$

Cas homogène unipotent

Pour trouver le difféomorphisme $u \Rrightarrow \frac{1}{u'(x)} = x^r$

- $r \neq 1$

$$u(x) = \frac{x^{1-r}}{1-r} \quad \Rightarrow \quad u^{-1}(y) = ((1-r)y)^{\frac{1}{1-r}}$$

$$\Rrightarrow \quad e^{\lambda x^r \frac{d}{dx}}[f](x) = f\left(\frac{x}{(1-\lambda(r-1)x^{r-1})^{\frac{1}{r-1}}}\right)$$

- $r = 1$

$$e^{\lambda x \frac{d}{dx}}[f](x) = f(e^{\lambda} x)$$

Cas homogène unipotent

Pour trouver le difféomorphisme $u \Rrightarrow \frac{1}{u'(x)} = x^r$

- $r \neq 1$

$$u(x) = \frac{x^{1-r}}{1-r} \quad \Rightarrow \quad u^{-1}(y) = ((1-r)y)^{\frac{1}{1-r}}$$

$$\Rrightarrow \qquad e^{\lambda x^r \frac{d}{dx}}[f](x) = f\left(\frac{x}{(1-\lambda(r-1)x^{r-1})^{\frac{1}{r-1}}}\right)$$

- $r = 1$

$$e^{\lambda x \frac{d}{dx}}[f](x) = f(e^{\lambda}x)$$

Cas homogène unipotent

Pour trouver le difféomorphisme $u \Rightarrow \frac{1}{u'(x)} = x^r$

- $r \neq 1$

$$u(x) = \frac{x^{1-r}}{1-r} \quad \Rightarrow \quad u^{-1}(y) = ((1-r)y)^{\frac{1}{1-r}}$$

$$\Rightarrow \qquad e^{\lambda x^r \frac{d}{dx}}[f](x) = f\left(\frac{x}{(1-\lambda(r-1)x^{r-1})^{\frac{1}{r-1}}}\right)$$

- $r = 1$

$$e^{\lambda x \frac{d}{dx}}[f](x) = f(e^{\lambda} x)$$

Cas homogène général

$$\boxed{\Omega = (a^\dagger)^{r-p} a a^{\dagger p} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^{r-p}\frac{d}{dx}x^p}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{r=0}^{e+1} \alpha_r (a^\dagger)^{e+1-r} a (a^\dagger)^r \\ &= (\sum_{r=0}^{e+1} \alpha_r)(a^\dagger)^{e+1} a + (\sum_{r=1}^{e+1} r\alpha_r)(a^\dagger)^e \\ &= \rho (a^\dagger)^{e+1} a + \rho' (a^\dagger)^e\end{aligned}$$

- $\rho = 0$

$\Rightarrow$ Le problème de l'ordre normal est trivial

$\mathcal{N}(\Omega^n) = (\rho')^n (a^\dagger)^{ne}$

Cas homogène général

$$\boxed{\Omega = (a^\dagger)^{r-p} a {a^\dagger}^p \quad \Longleftrightarrow \quad x^{r-p}\frac{d}{dx}x^p}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{r=0}^{e+1} \alpha_r (a^\dagger)^{e+1-r} a (a^\dagger)^r \\ &= (\sum_{r=0}^{e+1} \alpha_r)(a^\dagger)^{e+1} a + (\sum_{r=1}^{e+1} r\alpha_r)(a^\dagger)^e \\ &= \rho (a^\dagger)^{e+1} a + \rho' (a^\dagger)^e\end{aligned}$$

- $\rho = 0$

$\Rightarrow$ Le problème de l'ordre normal est trivial $\mathcal{N}(\Omega^n) = (\rho')^n (a^\dagger)^{ne}$

Cas homogène général

$$\boxed{\Omega = (a^\dagger)^{r-p} a a^{\dagger p} \quad \Longleftrightarrow \quad x^{r-p}\frac{d}{dx}x^p}$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= \sum_{r=0}^{e+1} \alpha_r (a^\dagger)^{e+1-r} a (a^\dagger)^r \\
&= (\sum_{r=0}^{e+1} \alpha_r)(a^\dagger)^{e+1} a + (\sum_{r=1}^{e+1} r\alpha_r)(a^\dagger)^e \\
&= \rho (a^\dagger)^{e+1} a + \rho' (a^\dagger)^e
\end{aligned}$$

- $\rho = 0$

  $\Rrightarrow$ Le problème de l'ordre normal est trivial
  $\mathcal{N}(\Omega^n) = (\rho')^n (a^\dagger)^{ne}$

Cas homogène général

- $\rho \neq 0$

$\Rrightarrow$ Redresser le champ de vecteur $\Rrightarrow$ Définir le difféomorphisme u

$$u(x) = x^{\frac{\rho'}{\rho}}$$

$\Rrightarrow$

$$\begin{aligned} e^{\lambda\Omega}[f](x) &= \frac{1}{x^{\frac{\rho'}{\rho}}} f(s_\lambda(x))(s_\lambda(x))^{\frac{\rho'}{\rho}} \\ &= \left[\frac{(s_\lambda(x))}{x}\right]^{\frac{\rho'}{\rho}} f(s_\lambda(x)) \end{aligned}$$

avec

$$s_\lambda(x) = \frac{x}{(1-\lambda(r-1)x^{r-1})^{\frac{1}{r-1}}}$$

CAS HOMOGÈNE GÉNÉRAL

- $\rho \neq 0$

$\Rrightarrow$ Redresser le champ de vecteur $\Rrightarrow$ Définir le difféomorphisme u

$$u(x) = x^{\frac{\rho'}{\rho}}$$

$\Rrightarrow$

$$\begin{aligned} e^{\lambda\Omega}[f](x) &= \frac{1}{x^{\frac{\rho'}{\rho}}} f(s_\lambda(x))(s_\lambda(x))^{\frac{\rho'}{\rho}} \\ &= \left[\frac{(s_\lambda(x))}{x}\right]^{\frac{\rho'}{\rho}} f(s_\lambda(x)) \end{aligned}$$

avec

$$s_\lambda(x) = \frac{x}{(1-\lambda(r-1)x^{r-1})^{\frac{1}{r-1}}}$$

CAS HOMOGÈNE GÉNÉRAL

- $\rho \neq 0$

$\Rrightarrow$ Redresser le champ de vecteur $\Rrightarrow$ Définir le difféomorphisme u

$$u(x) = x^{\frac{\rho'}{\rho}}$$

$\Rrightarrow$

$$\begin{aligned} e^{\lambda\Omega}[f](x) &= \frac{1}{x^{\frac{\rho'}{\rho}}} f(s_\lambda(x))(s_\lambda(x))^{\frac{\rho'}{\rho}} \\ &= \left[\frac{(s_\lambda(x))}{x}\right]^{\frac{\rho'}{\rho}} f(s_\lambda(x)) \end{aligned}$$

avec

$$s_\lambda(x) = \frac{x}{(1-\lambda(r-1)x^{r-1})^{\frac{1}{r-1}}}$$

Conclusion

1. Developper le cas hétérogène $\Omega = f(a^\dagger)a + g(a^\dagger)$.
2. Etudier le cas des mots avec au moins deux opérateurs d'annihilation (*i.e.* matrices doublement infinies non unipotentes)

Conclusion

1. Developper le cas hétérogène $\Omega = f(a^\dagger)a + g(a^\dagger)$.
2. Etudier le cas des mots avec au moins deux opérateurs d'annihilation (*i.e.* matrices doublement infinies non unipotentes)