Des arbres dans les étoiles, des arbres dans les grains de lumière

Xavier Viennot

conférence du Dimanche 29 mars 2009 dans le cadre de la «Fête à Fermat»

Les arbres et les structures arborescentes sont partout dans la nature. Bien entendu, il y a les arbres naturels de la botanique, mais un réseau fluvial vu d'avion présente aussi une structure en forme d'arbre, tout comme le réseau des bronches et bronchioles d'un poumon ou encore certains dépôts électrolytiques. Même dans certaines molécules, comme par exemple en biologie moléculaire celles du type appelé ARN, il y a aussi des structures arborescentes sous-jacentes.

Mais affirmer qu'il y a des arbres dans les étoiles ou dans les particules élémentaires de la lumière comme les photons, est une forme poétique de mettre la conclusion de cet exposé dans le titre lui-même, à savoir que derrière ces arbres et structures arborescentes naturelles, il y a des mathématiques, et que ces mathématiques des arbres se retrouvent dans des recherches contemporaines de physique théorique aussi bien au niveau de l'univers que des particules élémentaires.

Mais qu'est ce qu'un arbre mathématique ? C'est une abstraction de ces arbres naturels. En oubliant les largeurs et longueurs des branches, ou la géométrie particulière des méandres des fleuves, et ne retenant que la façon «topologique» dont les branchements sont disposés, on arrive à définir un arbre comme un objet mathématique, et qui est visualisé sur la Figure 1. Ici il ne sera question que d' *arbre binaire* (comme la plupart des arbres botaniques à part les espèce du genre palmier ou les rares réseaux fluviaux où trois rivières se joignent au même endroit).

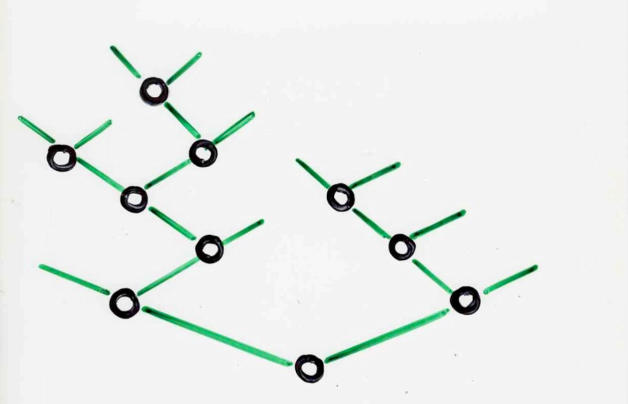

Fig. 1 Un arbre binaire

Une définition «informatique» est de dire qu'un arbre binaire A est un triplet A=(G,r,D) dans lequel r est un sommet appelé *racine* et G et D sont eux mêmes des arbres binaires, qui peuvent tous les deux être «vides». C'est une définition récursive, qui s'appelle elle même, comme ont l'habitude d'en faire les informaticiens. Les arbres G et D sont les *sous-arbres* gauches et droits issus de la racine r, leur racine respective sont les fils gauche droit de la racine r de l'arbre A. L'arbre A a des sommets, de deux types: soit ils ont deux fils (on parle en informatique de *sommets internes*), soit ils n'ont aucun fils (ce sont les *feuilles* ou *sommets externes*). L'arbre de la Figure 1 a 10 sommets internes et 11 sommets externes. Ces arbres binaires forment un objet de base en informatique et se retrouvent sous-jacents dans de nombreux programmes informatique.

Mais quel est le rapport avec Fermat ? Fermat est bien connu pour ses travaux en arithmétique. Il a aussi entretenu une correspondance avec Pascal, sur les jeux et possibilités et tous les deux sont considérés comme les précurseurs de la théorie des probabilités. Dans cette correspondance, il est question du triangle de Pascal donnant les coefficients binomiaux.

$\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers.

Un problème naturel de combinatoire est de dénombrer les arbres. Quel est le nombre C_n d'arbres binaires ayant n sommets internes (et donc (n+1) sommets externes) ? Ces nombres sont appelés nombres de Catalan et se retrouvent partout en mathématique et aussi en physique théorique. Il sont donnés par une formule très simple en fonction du terme central de chaque ligne paire du triangle de Pascal: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Cette formule n'est pas évidente à priori. Il faudrait déjà montrer que c'est bien un entier. Une autre formule équivalente est la récurrence «multiplicative» suivante: $2(2n+1)C_n = (n+2)C_{n+1}$. Cette dernière formule peut se démontrer par une preuve dite «bijective», c'est-à-dire en construisant une *bijection* entre des objets combinatoires interprétant les deux membres de l'égalité. A gauche on pourrait dire qu'il s'agit d'un arbre ayant n sommets internes, ayant un sommet pointé (interne ou externe) colorié bleu ou rouge. Le membre de droite est interprété par un arbre ayant (n+1) sommets internes, avec une feuille (ou sommet externe) pointé. L'égalité, et donc la formule donnant C_n n'est alors que le reflet d'une bijection entre les deux ensembles d'arbres pointés coloriés définis ci-dessus. Essayer de trouver une telle construction !

En fait ces nombres sont apparus bien avant Eugène Catalan qui les considérait dans les années 1830, mais avec le célèbre savant universel Leonhard Euler, mathématicien d'origine suisse, ayant vécu à Saint-Pétersbourg et à Berlin du temps du «siècle des lumières». L'année 2007 célébrait le tricentenaire de sa naissance. C'est dans une lettre d'Euler à son grand ami Golbach, le 4 Septembre 1751, de Berlin, que Euler découvre les nombres qui seront appelés plus tard «nombres de Catalan». Il n'est nullement question d'arbres binaires, mais de triangulations d'un polygone régulier, comme celle visualisée sur la Figure 2. Il s'agit de tracer des diagonales, en nombre maximum, joignant les sommets d'un polygone régulier, et ne se coupant pas (sauf aux extrémités). Euler propose la formule et la récurrence ci-dessus, et en plus introduit dans cette lettre un outil qui va devenir très efficace et répandu dans la combinatoire énumérative actuelle: la notion de série génératrice d'une suite de nombre, à savoir la série formelle: $y = C_0 + C_1 + \ldots + C_n t^n + \ldots$ notée aussi $\sum_{n\geq 0} C_n t^n$. Le nombre de triangulations d'un polygone de (n+2) côtés est C_n , le nombre d'arbres binaires. Une preuve possible est à nouveau de construire une bijection entre les arbres binaires ayant n sommets internes et les triangulations d'un polygone régulier de (n+2) côtés. Une telle construction est visualisée sur la Figure 3, avec n=10. L'arbre binaire associé est celui de la Figure 1. Une vidéo de cette construction est donnée sur la page «vidéo» du site web.mac.com/xgviennot/Cont_Science . Les violons accompagnent la construction. C'est la philosophie des preuves «sans mots».

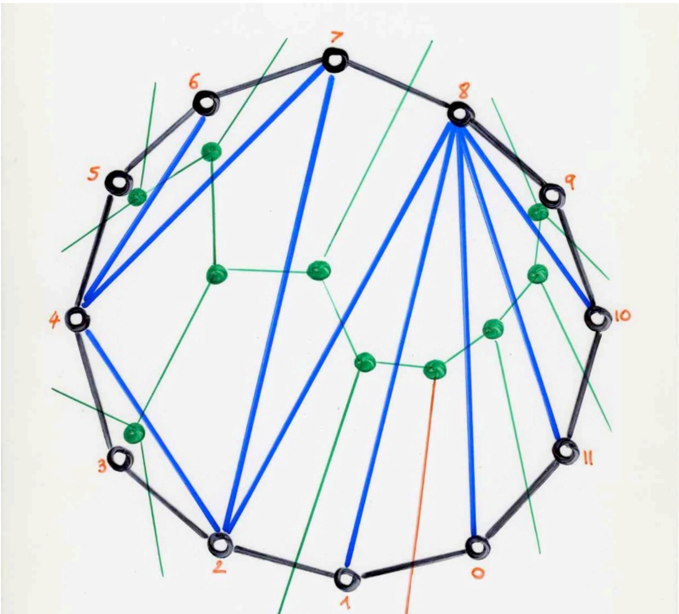

Fig. 2 Une triangulation d'Euler et son arbre binaire associé

Cette attitude ou nouveau paradigme, que l'on pourrait appelé le *paradigme bijectif,* a révolutionné la combinatoire classique et a permis de donner des relations profondes et fécondes entre la combinatoire contemporaine et d'autres parties des mathématiques classiques (algèbre, analyse,etc.) ainsi que la physique théorique contemporaine. On parle de combinatoire énumérative, algébrique, bijective, analytique, expérimentale, existentielle, quantique, voir .. magique.

Je finirai pas esquisser deux exemples venant de recherches actuelles en physique. Deux théories ont révolutionné la physique du 20ème siècle: la *relativité* (*restreinte* et *générale*) de A. Einstein et la *mécanique quantique.* L'une parle de l'*espace-temps* courbé par la présence de masse, d'expansion de l'univers, etc. L'autre au contraire décrit le monde des particules élémentaires. Les deux théories sont incompatibles. C'est l'un des grands défis de la physique contemporaine d'englober ces deux théories en une théorie unique. C'est le domaine de la *gravitation quantique*. Plusieurs tentatives sont développées, comme la *théorie des cordes* ou la *gravitation à boucle*. Une approche moins connue est formée des *triangulations dynamiques Lorentziennes*: l'espace-temps soumis aux fluctuations quantiques est discrétisé par des triangulations. La dimension 2 a retenue quelques attentions des physiciens, car le modèle devient alors «résoluble». Il s'agit alors en particulier de dénombrer certaines triangulations comme celle de la Figure 3. La surprise est que les nombres de Catalan réapparaissent. Une «explication» combinatoire est basée en construisant une bijection entre les triangulations d'Euler et les triangulations Lorentziennes. Cette correspondance passe par les arbres binaires, puis des *chemins* dans le plan discret et des objets combinatoires appelés *empilements de dominos* sur une droite discrète.

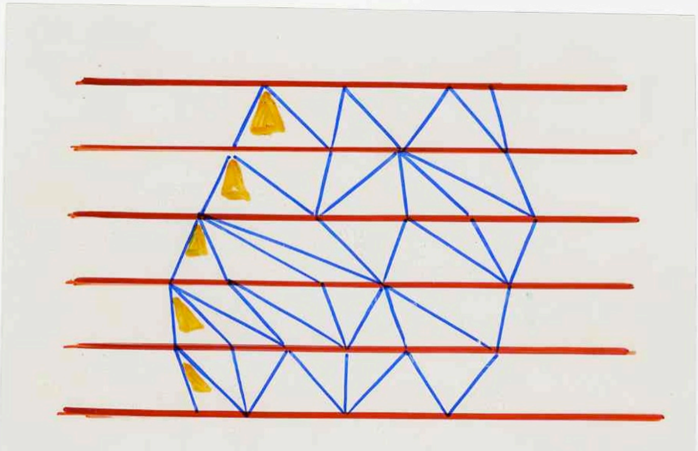

Fig. 3 Une triangulation Lorentzienne en gravitation quantique 2D

Le deuxième exemple est relatif aux célèbres *diagrammes de Feynman*, du nom de son inventeur, célèbre physicien, prix Nobel. Il s'agit d'*électrodynamique quantique relativiste*. Les diagrammes symbolisent les *interactions* entre particules élémentaires dans l'espace-temps. Ce sont simplement certains graphes. A un sommet par exemple peut arriver trois arêtes exprimant qu'un électron et son antiparticule le positron se transforme un photon de lumière. Certaines arêtes sont orientées, exprimant la flèche de temps. A chaque diagramme est associé un calcul très compliqué. Il faut faire la somme de quantités contenant des infinis. On parle de *renormalisation*, afin d'éliminer entre eux ces quantités infinies. Les techniques mises au point par les physiciens ont trouvé une explication récente avec des nouvelles structures mathématiques basées sur les arbres. Ceux-ci sont munis d'une structure d'*algèbre de Hopf*. Pour parler plus simplement, tout comme chacun sait faire le produit de deux nombres, on peut définir le *produit* de deux arbres binaires. C'est une *somme formelle* d'arbres binaires (ou ensemble d'arbres binaires avec répétitions possibles) , comme le montre l'exemple de la Figure 4.

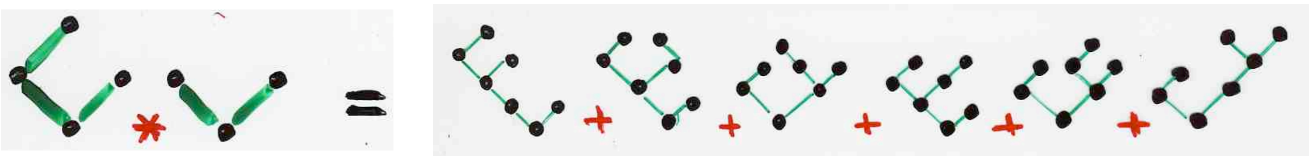

Fig. 4 Produit de deux arbres binaires

Xavier Viennot
CNRS, LaBRI, Université de Bordeaux
www.labri.fr/perso/viennot