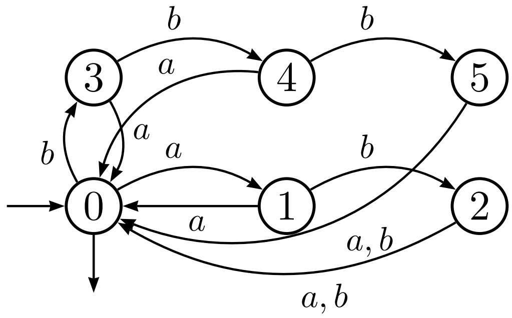
**INFO 1 (Théorie des Langages): Partiel de Juin 2012**.

Seuls les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifies.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

## I) Question de Cours:

1) a) Qu'est-ce qu'un Automate Fini (AF) ? Quels sont les mots qu'il reconnaît ?
b) Qu'est-ce qu'un automate déterministe $\mathcal{A} = (Q, A, ., q_0, F)$ ?
c) On suppose toujours que $\mathcal{A}$ est déterministe, que reconnait alors l'automate
$\mathcal{A}_1 = (q_0, A, ., q_0, Q - F)$ ?

2) a) Soit $A = \{x, y\}$. Écrire la table de l'automate ci-dessous (entrées, sorties, transitions).




b) Décrire, en général, l'algorithme de minimisation d'un AFD.
c) Le faire tourner complètement sur l'automate ci-dessus.
**Indication pour le (c)**. — On donnera la succession des classes d'équivalence et on dessinera l'automate obtenu (pour vérification, il doit avoir 4 états).

## II) Exercices

Dans la suite $A = \{a, b\}$ est l'alphabet à deux lettres, $A^+ = A^* - \{\epsilon\}$ est l'ensemble des mots non vides.
1) a) Montrer que

| | | |
|---|---|---|
| i) $bA^*a = (b^+a^+)^+$ | ii) $A^*abA^* \cap A^*baA^* = A^*ab^+aA^* + A^*ba^+bA^*$ | iii) $A^*a \cap A^*ba = aA^*ba$ |
| iv) $bA^*a = b^+a(b^+a)^*$ | v) $A^* - A^*aa = \epsilon + a + A^*b + A^*ba$ | vi) $aA^* \cap A^*ab = ab + aA^*ab$ |

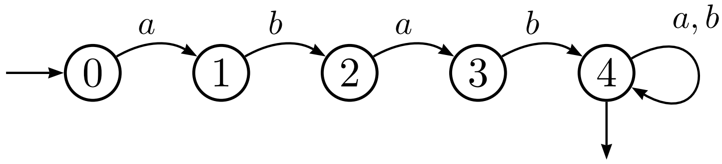
b) Former des automates qui reconnaissent ces langages.
c) Former les automates minimaux qui leur correspondent.

## III. (Petits) Problèmes

PbA) (Complété d'un AFD). —
Soit $\mathcal{A} = (Q, A, \bullet, q_0, F)$ un automate fini déterministe (i.e. $(\forall a \in A)(\forall q \in Q)(|q.a| \leq 1)$. Soit la nouvelle fonction de transition $\circ$ sur $Q \cup \{p\}$ ($p \notin Q$ est un nouvel) obtenue en rajoutant un état supplémentaire et les flèches $(q, x, p)$ pour $q.x = \emptyset$ et $(p, x, p)$ pour touutes les lettres $x \in A$.
a) Montrer que le nouvel automate $\mathcal{A}^c = (Q \cup \{p\}, A, \circ, q_0, F)$

1. est déterministe et complet
2. est équivalent à $\mathcal{A}$ (i.e. reconnait le même langage).

b) Appliquer la procédure sur l'automate suivant, d'alphabet de commande $A = \{a, b\}$ (on dessinera l'automate $\mathcal{A}^c$ obtenu).




c) Donner une expression rationnelle du langage reconnu par l'automate précédent.

PbB) On pose $\pi(a) = 1,\ \pi(b) = 2$ et $\pi(w) = \sum_{i=1}^{|w|} \pi(w[i])$ (les sommes vides sont toujours nulles donc $\pi(\epsilon) = 0$). Si l'on préfère

$$\pi(a_1 a_2 \cdots a_n) = \pi(a_1) + \pi(a_2) + \cdots + \pi(a_n) \tag{1}$$

Soit

$$L_n := \{w \in A^* | \pi(w) = n\} \tag{2}$$

Pour vérification $L_4 = \{aaaa, aab, aba, baa, bb\}$

a) Écrire les premiers $L_n$ $(0 \leq n \leq 3)$?

*Pour vérification, on a*

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert L_n \rvert$ | 1 | 1 | 2 | 3 |

b) Montrer que, pour $n \geq 2$, on a

$$L_n = aL_{n-1} + bL_{n-2} \tag{3}$$

c) En déduire que la suite $l_n = |L_n|$ vérifie

$$l_0 = l_1 = 1\ ;\ l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \tag{4}$$

puis que $l_n = F_n$, le nième nombre de Fibonacci.