## L1PCSC : Calcul Formel Partiel de Février 2012.

Seules les notes manuscrites et le polycopié sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie.

Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en indiquant clairement la référence de celle-ci.

### I) Question de Cours:

A) 1) Quels sont les objets définis par la grammaire suivante ?

$$\mathcal{A} = \square + \begin{array}{ccc} & \bullet & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{A} & & \mathcal{A} \end{array}$$

2) a) Donner les premiers arbres pour un nombre de feuilles $\leq 4$ (9 arbres en tout).

b) Pour les arbres à 4 feuilles (5 arbres en tout), on donnera : (b1) les sous-arbres droit et gauche de la racine, (b2) le nombre de sommets, (b3)le nombre de sommets internes.

B) (Commandes Maple) 1) Donner le sens, la syntaxe et un exemple des commandes suivantes:

`for, if, op, nops, whattype, random`

C) (Numération) 1) Que signifie, pour un entier naturel $N$, le développement en base $B$ suivant?

$$N = \sum_{j=0}^{m} a_j B^j \tag{1}$$

2) (Application) Mettre les nombres binaires suivants sous forme décimale

a) $a_1 = (110)_2$ b) $a_2 = (110110)_2$ c) $a_3 = (110110110)_2$

d) Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, on définit la suite suivante

$$a_n = (\underbrace{110 \cdots 110 \cdots 110}_{\text{3n chiffres}})_2 \tag{2}$$

soit $n$ groupes (110).

d1) Expliquer pourquoi

$$a_1 = 1 \; ; \; a_{n+1} = 8.a_n + 6 \tag{3}$$

d2) Calculer $a_n$ pour $3 \leq n \leq 6$ (pour vérification $a_n = 6, 54, 438$ pour $n = 1, 2, 3$).

D) (Fractions continues) 1) Comment développe-t-on un réel en fraction continue ? (donner les procédé de calcul). Quand s'arrête le calcul ?

2) Expliquer pourquoi $\frac{\sqrt{3}}{2}$ se développe ainsi (on donnera la période)

$$x = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}} \tag{4}$$

### II) Exercices :

A) Numération :

1) Calculer en fonction de $n$, les nombres suivants exprimés en base $B$ (les résultats seront donnés dans la même base).

$\heartsuit$) $(100110111011)_2$ $\diamondsuit$) $b_n = 1, \underbrace{121 \cdots 121 \cdots}_{\text{3n chiffres}}; \; B = 4$

$\spadesuit$) $(A, ABAB)_{16}$ $\clubsuit$) $(10011410011)_5$

(pour le $\diamondsuit$, on pourra s'inspirer de la méthode de la question de cours)

2) Conversion DDI$\leftarrow$ Fraction (les énoncés sont et les résultats seront donnés en base dix).

a) $0,(1443)^\infty$ b) $0,0(153)^\infty$ c) $1,(219)^\infty$

3) Conversion Fraction $\rightarrow$ DDI (les résultats seront donnés en base 10).

a) $4/13$ b) $2/7$ c) $1/9$

4) (Fractions continues) Soit le réel $x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
a) Vérifier (en donnant les détails du calcul) que

$$x = 2 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{x}} \tag{5}$$

b) En déduire le développement de $x$ en f.c., puis retrouver le développement de la question de cours.

**III. (Petit) Problème ("Balls and bars", BB). —**
On appelle ainsi des structures du type

$$\bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet | \bullet \bullet \tag{6}$$

c'est à dire des points équidistants et horizontaux séparés par des | de façon que :

*Toutes les barres ont (au moins) un point qui les précède et un point qui les suit.*

Attention : la structure vide n'est pas admise, on commence avec un point.
1) a) Montrer que les BB peuvent être construits par la grammaire suivante

$$BB = \bullet + (BB \mid BB) \tag{7}$$

b) Et aussi par (expliquez)

$$BB = \bullet + (\bullet BB) + (\bullet \mid BB) \tag{8}$$

Soit $a_n$, le nombre de ces structures avec $n$ points.
2) a) Expliquer pourquoi $a_n$ vérifie la récurrence

$$a_1 = 1;\ a_{n+1} = 2a_n \tag{9}$$

b) Calculer $a_n$ pour $n \leq 7$ et dessiner les structures obtenues pour $n \leq 4$ (15 en tout).
c) Montrer que $a_n = 2^{n-1}$.
Un *vecteur d'entiers* (VE) est une liste d'entiers non nuls $\mathbf{I} = [i_1, i_2, \cdots i_k]$ et son *poids* est la somme de ses coordonnées. En voici quelques uns avec leur poids

| $\mathbf{I}$ | $[1,4]$ | $[3,1,1]$ | $[2,1,3]$ | $[1,2,1,3]$ |
|---|---|---|---|---|
| $poids(\mathbf{I})$ | 5 | 5 | 6 | 7 |

3) Donner une correspondance naturelle entre les BB de poids $n$ et les vecteurs d'entiers de poids $n$.
4) Se servir de ce qui précède pour montrer que la série génératrice $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ vérifie

$$S = z + 2zS \tag{10}$$

5) Résoudre (10) et montrer que $S = \frac{z}{1-2z}$.