Institut Galilée L1PC – Année 2011–2012

Programmation **Partiel II**

(30.04.2012)

Seules les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours :

A) 1) Que représentent les courbes de `Lissajous`

$$\begin{cases} x(t) & = & sin(a.t) \\ y(t) & = & cos(c.t) \end{cases}, \tag{1}$$

2) a) Expliquer pourquoi, pour $(a, c) = (1, 2)$, les coordonnées vérifient $y(t) = 2x(t)^2 - 1$. Quelle est la portion de la courbe $y = 2x^2 - 1$ qui est parcourue ? la représenter.
b) Reprendre la question pour $(a, c) = (2, 1)$, expliquer pourquoi la courbe est $x = 2y\sqrt{1 - y^2}$. Indiquer la portion et la représenter.
B) 1) a) Soit un réel dont le développement en base $B = 10$ est

$$X = (0, (a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-p})^\infty)_{10} \tag{2}$$

donner la formule qui permet de retrouver la fraction X.
b) Soit maintenant un réel dont le développement en base $B = 10$ est

$$X = (a_m a_{m-1} \cdots a_0, (a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-p})^\infty)_{10} \tag{3}$$

utiliser la formule précédente pour retrouver X.
c) Généraliser la formule précédente pour retrouver pour B quelconque.
d) Utiliser la formule (2) pour trouver les fractions dont le DDI est

$$\text{a) } 0, (1114)^\infty;\ b = 10 \quad \text{b) } 0, (047619)^\infty;\ b = 10$$

2) a) Quels sont les réels qu'on peut représenter par une fraction continue (f.c.) ?
b) Donner le procédé de calcul des coefficients.
c) Quels sont les réels dont la représentation est ultimement périodique ?
d) Application. — Calculer les coefficients de la représentation en f.c. de $\sqrt{3}$. De $\sqrt{17}$.
C) 1) a) Qu'est-ce qu'un arbre binaire complet ?
b) Donner la grammaire qui permet de les définir/construire.
Soit a_n, le nombre d'arbres binaires complets à n feuilles.
c) Dessiner les arbres binaires complets à n feuilles pour $n \leq 4$ et donner les nombres a_n correspondants.
d) Expliquer pourquoi a_n vérifie la récurrence :

$$a_1 = 1 \ ; \ a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \tag{4}$$

2) a) Qu'est-ce qu'un arbre binaire incomplet ?
b) Donner la grammaire qui permet de les définir/construire.
Soit b_n, le nombre d'arbres binaires incomplets à n nœuds.
c) Dessiner les arbres binaires incomplets à n nœuds pour $n \leq 4$ et donner les nombres b_n correspondants.
d) Expliquer pourquoi b_n vérifie la récurrence :

$$b_1 = 1 \;;\; b_n = 2b_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} b_k b_{n-1-k} \tag{5}$$

II) Exercices. —
1) Conversions Fraction $\leftarrow$ Développements illimités en base b (les résultats seront toujours donnés en base dix).

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 13,(1114)^\infty;\ b=10 & \text{b) } 10,(047619)^\infty;\ b=10 \\ \text{c) } 0,0(1311)^\infty;\ b=8 & \text{d) } 0,(10111)^\infty;\ b=2 \end{array}$$

2) Conversions Fraction $\rightarrow$ Développements illimités (les résultats seront donnés en base 10).

a) 9/47 b) 11/101 c) 1/13 c) 3/8

III) Problème. —
A) On définit une suite de points (c'est à dire une application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$) par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & \cdots & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\ & & & & & & \uparrow \\ \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet \\ \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow \\ \bullet & \leftarrow & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ \circ & \rightarrow & \bullet & & \bullet & \rightarrow & \bullet \end{array}$$

c'est une suite de couples (c_n), le point de départ ($\circ$) étant l'origine ($c_0 = (0,0)$).
1) Soit $h_0(n)$, l'indice du (n+1)$^{\text{ème}}$ passage de c_n sur l'"axe des abcisses" (d'équation $y = 0$), on a $h_0(0) = 0$.
a) Vérifier que les premières valeurs de h_0 sont

n	0	1	2	3	4	5
$h_0(n)$	0	1	8	9	24	25

b) Évaluer la longueur du "serpent" qui

1. part verticalement du point $(2n+1, 0)$)
2. pour aller à la diagonale en $(2n+1, 2n+1)$
3. puis vers l'"axe des ordonnées" en $(0, 2n+1)$

4. s'élève d'un pas en $(0, 2n+2)$
5. revient vers la diagonale en $(2n+2, 2n+2)$
6. puis vers l'"axe des abcisses" en $(2n+2, 0)$
7. refait un pas en $(0, 2n+3)$

c) En déduire que $h_0(2n+1) = (2n+1)^2$.
2) Soit $h_1(n)$, l'indice du n$^{\text{ème}}$ passage de c_n sur la première demi-diagonale $x = y;\ x > 0$.
a) Donner les premières valeurs de $h_1(n)$. b) Calculer $h_1(n)$ en général.
B) On construit une suite de $\mathbb{Z}^2$ par le procédé suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow \\
\bullet & & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & & \bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \bullet & & \circ & \rightarrow & \bullet & & \bullet \\
 & & \downarrow & & & & & & \uparrow \\
 & & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet
\end{array}$$

c'est une suite de couples (c_n), le point de départ $(\circ)$ étant l'origine $(c_0 = (0,0))$.
a) Soit $d_1(n)$, l'indice du n$^{\text{ème}}$ passage de c_n sur la première demi-diagonale $x = y;\ x > 0$. On a

n	1	2	3	4	5
$d_1(n)$	2	12	30	56	90

montrer que $a_1(n) = d_1(n+1) - d_1(n)$ vérifie $a_1(n+1) - a_1(n) = 8$ (on pourra donner une preuve "picturale", sinon il est conseillé d'admettre le résultat et de continuer).
b) Déduire de la question précédente que $a_1(n) = 8n + 2$.
c) Déduire de ce qui précède que $d_1(n) = (2n)^2 - 2n$.
3) Montrer que les indices du n$^{\text{ème}}$ passage de c_n sur 3 autres demi-diagonales sont respectivement (en tournant dans le sens trigonométrique)

$$d_2(n) = (2n)^2;\ d_3(n) = (2n)^2 + 2n;\ d_4(n) = (2n)^2 + 4n = (2n+1)^2 - 1$$

donner les séries génératrices (en z) de $d_i;\ i = 1..4$.
4) Selon la position de k par rapport à $d_1(n) < d_2(n) < d_3(n) < d_4(n)$ donner la valeur de $c_k = (x_k, y_k)$.