Programmation **Partiel III**

(11.06.2012)

Seules les notes manuscrites, le support de cours et la calculette sont autorisés. Le candidat s'efforcera de rédiger lisiblement et avec soin sa copie. En particulier, les réponses doivent être justifiées.
Le sujet est (en principe) trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

I) Question de Cours :
A) 1) Que représentent les courbes de `Lissajous`

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & sin(a.t) \\ y(t) & = & cos(c.t) \end{array}\right. , \tag{1}$$

2) a) Expliquer pourquoi, pour $(a, c) = (1, 2)$, les coordonnées vérifient $y(t) = 2x(t)^2 - 1$. Quelle est la portion de la courbe $y = 2x^2 - 1$ qui est parcourue ? la représenter.
b) Reprendre la question pour $(a, c) = (2, 1)$, expliquer pourquoi la courbe est $x = 2y\sqrt{1 - y^2}$. Indiquer la portion et la représenter.
B) 1) a) Soit un réel dont le développement en base $B = 10$ est

$$X = (0, (a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-p})^{\infty})_{10} \tag{2}$$

donner la formule qui permet de retrouver la fraction X.
b) Soit maintenant un réel dont le développement en base $B = 10$ est

$$X = (a_m a_{m-1} \cdots a_0, (a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-p})^{\infty})_{10} \tag{3}$$

utiliser la formule précédente pour retrouver X.
c) Généraliser la formule précédente pour retrouver pour B quelconque.
d) Utiliser la formule (2) pour trouver les fractions dont le DDI est

$$\text{a) } 0, (1114)^{\infty};\ b = 10 \quad \text{b) } 0, (047619)^{\infty};\ b = 10$$

2) a) Quels sont les réels qu'on peut représenter par une fraction continue (f.c.) ?
b) Donner le procédé de calcul des coefficients.
c) Quels sont les réels dont la représentation est ultimement périodique ?
d) Application. — Calculer les coefficients de la représentation en f.c. de $\sqrt{3}$. De $\sqrt{17}$.
C) 1) a) Qu'est-ce qu'un arbre binaire complet ?
b) Donner la grammaire qui permet de les définir/construire.
Soit a_n, le nombre d'arbres binaires complets à n feuilles.
c) Dessiner les arbres binaires complets à n feuilles pour $n \leq 4$ et donner les nombres a_n correspondants.
d) Expliquer pourquoi a_n vérifie la récurrence :

$$a_1 = 1\ ;\ a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \tag{4}$$

2) a) Qu'est-ce qu'un arbre binaire incomplet ?
b) Donner la grammaire qui permet de les définir/construire.
Soit b_n, le nombre d'arbres binaires incomplets à n nœuds.
c) Dessiner les arbres binaires incomplets à n nœuds pour $n \leq 4$ et donner les nombres b_n correspondants.
d) Expliquer pourquoi b_n vérifie la récurrence :

$$b_1 = 1 \;;\; b_n = 2b_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} b_k b_{n-1-k} \tag{5}$$

II) Exercices. —
1) Conversions Fraction ← Développements illimités en base b (les résultats seront toujours donnés en base dix).

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 13,(1114)^\infty;\; b = 10 & \text{b) } 10,(047619)^\infty;\; b = 10 \\ \text{c) } 0,0(1311)^\infty;\; b = 10 & \text{d) } 0,(10111)^\infty;\; b = 10 \end{array}$$

2) Conversions Fraction → Développements illimités (les résultats seront donnés en base 10).

a) 9/47 b) 11/101 c) 1/13 c) 3/8

III) Problème. —
A) On définit une suite de points (c'est à dire une application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$) par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
 & & & & & & \uparrow \\
\bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet \\
\uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow \\
\bullet & \leftarrow & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\circ & \rightarrow & \bullet & & \bullet & \rightarrow & \bullet
\end{array}$$

c'est une suite de couples (c_n), le point de départ ($\circ$) étant l'origine ($c_0 = (0,0)$).
1) Soit $h_0(n)$, l'indice du (n+1)$^{\text{ème}}$ passage de c_n sur l'"axe des abcisses" (d'équation $y = 0$), on a $h_0(0) = 0$.
a) Vérifier que les premières valeurs de h_0 sont

n	0	1	2	3	4	5
$h_0(n)$	0	1	8	9	24	25

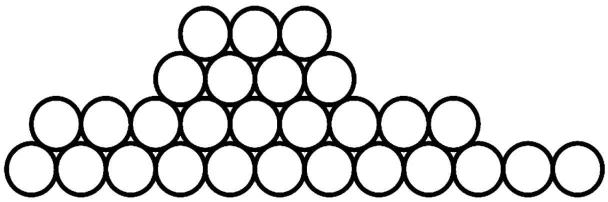
b) Évaluer la longueur du "serpent" qui

1. part verticalement du point $(2n+1, 0))$
2. pour aller à la diagonale en $(2n+1, 2n+1)$
3. puis vers l'"axe des ordonnées" en $(0, 2n+1)$

4. s'élève d'un pas en $(0, 2n+2)$
5. revient vers la diagonale en $(2n+2, 2n+2)$
6. puis vers l'"axe des abcisses" en $(2n+2, 0)$
7. refait un pas en $(0, 2n+3)$

c) En déduire que $h_0(2n+1) = (2n+1)^2$.
2) Soit $h_1(n)$, l'indice du $\mathrm{n}^{\text{ème}}$ passage de c_n sur la première demi-diagonale $x = y;\ x > 0$.
a) Donner les premières valeurs de $h_1(n)$. b) Calculer $h_1(n)$ en général.

B) (Fontaines de pièces). —
Les fontaines de pièces sont des structures comme figuré ci-dessous



Une fontaine de pièces.

1) Montrer qu'une fontaine de pièces est

1. soit une ligne de pièces (et rien au dessus)
2. soit une ligne de pièces sur laquelle on pose une autre fontaine

Soit c_n le nombre de fontaines qui ont n pièces "à la base". Pour vérification les premières valeurs de c_n sont

n	1	2	3	4
c_n	1	2	5	13

2) Expliquez pourquoi c_n vérifie la récurrence suivante

$$c_1 = 1\ ;\ c_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\, c_j \tag{6}$$

3) En déduire que $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, z^n$ vérifie

$$S = \frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2}\, S \tag{7}$$

4) Résoudre (7) et montrer que

$$S = \frac{z(1-z)}{1-3z+z^2} \tag{8}$$